KAOYAN GAODENG SHUXUE
JINGXUAN XITIJI

考研高等数学

精选习题集

薛 威 编著

251道
核心题

做三遍 背三遍 抄三遍

真题三遍，效果立现！

化学工业出版社

考研高等数学

精选习题集

薛 威 编著

化学工业出版社

·北京·

本书是新东方名师薛威老师经过多年的教学实践,由内部讲稿打磨而成的精选习题集,体系成熟,有很好的训练效果,得到了学生的一致欢迎与认可。高等数学是考研复习的重中之重,本书围绕提高考研数学的复习效率,培养考生相应计算能力而编写。全书分为八章,对考研数学中高等数学部分进行了全面梳理,有针对性地编写了735道题,并配有基本的答案,供考生进行全面的复习训练,以冲刺高分。本书题量适中,可以反复演练,巩固提高;难度适中,避免做不下去的挫败感;题型覆盖全面,对常规题型的熟练掌握,有利于短时间内提高计算能力,帮助考生建立起对考试的信心。

图书在版编目(CIP)数据

考研高等数学精选习题集/薛威编著.—北京:化学工业出版社,2018.8

ISBN 978-7-122-32380-4

Ⅰ.①考… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第125687号

责任编辑:旷英姿　　装帧设计:关　飞

责任校对:王素芹

出版发行:化学工业出版社(北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011)

印　　刷:三河市航远印刷有限公司

装　　订:三河市宇新装订厂

710mm×1000mm　1/16　印张 $5\frac{3}{4}$　字数180千字　2018年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询:010-64518888(传真:010-64519686)　售后服务:010-64518899

网　　址:http://www.cip.com.cn

凡购买本书,如有缺损质量问题,本社销售中心负责调换。

定　　价:25.00元　

目　　录

第一章　函数　极限　连续

一、函数练习题

1. 求函数$f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$的定义域.

2. 设$f(x)$的定义域为$[-a,a]$,其中$(a>0)$,求$f(x^2-1)$的定义域.

3. 已知$f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$,求$f(x)$的定义域及$f(f(-7))$的值.

4. 设$f(x)=\cos x$, $f(g(x))=1-x^2$,求$g(x)$及其定义域.

5. 设函数$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,定义函数列$f_1=f(x)$, $f_2=f(f_1(x))$, $\cdots$, $f_n=f_{n-1}(f(x))$,求$f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$.

6. 设$f(x)=\begin{cases}e^x, x<1\\ x, x\geqslant 1\end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, x<0\\ x^2-1, x\geqslant 0\end{cases}$,求$f(\varphi(x))$.

7. 设$f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1\\ 0, |x|>1\end{cases}$,则$f(f(x))=$________.

8. 设$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$.则$g(f(x))=$　　(　　).

(A)$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2-x, x\geqslant 0\end{cases}$　(B)$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2+x, x\geqslant 0\end{cases}$　(C)$\begin{cases}2-x^2, x<0\\ 2-x, x\geqslant 0\end{cases}$　(D)$\begin{cases}2+x^2, x<0\\ 2+x, x\geqslant 0\end{cases}$

9. 函数$y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$的反函数是________.

10. 已知$f(\sin x)=3-\cos 2x$,试证$f(\cos x)=3+\cos 2x$.

11. 设$f(\ln x)=x^2(1+\ln^2 x)$,求$f(x)$.

12. 设$F'(x)=f(x)$,则下列结论中正确的是　　(　　).

(A)若$f(x)$为奇函数,则$F(x)$为偶函数

(B)若$f(x)$为偶函数,则$F(x)$为奇函数

(C)若$f(x)$为周期函数,则$F(x)$为周期函数

(D)若$f(x)$为单调函数,则$F(x)$为单调函数

13. 求$I=\int_{-1}^{1}x[x^5+(e^x-e^{-x})\ln(x+\sqrt{x^2+1})]dx$.

14. 设$f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$,且$f(\varphi(x))=\ln x$,求$\int\varphi(x)dx$.

15. 设$f(x)$的定义域为R,存在常数$C\neq0$,使$f(x+C)=-f(x)$.证明$f(x)$是周期函数.

16. 已知$3f(x)+f(2-x)=x^2$,求$f(x)$.

17. 已知$f(x)=3\ln x$, $f(\varphi(x))=\ln(5+2\ln x)$,求$\varphi(x)$.

18. 设函数$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, \quad -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$. 写出$f(x)$的反函数的表达式.

二、极限练习题

1. 设$a\neq0$, $|r|<1$,求$\lim\limits_{n\to+\infty}(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1})$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^3+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+2)}$.

6. 设l是正整数,求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+l)}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx+\arcsin x}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{1-x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{e^{x^2}-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+2}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\cot x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2(3x)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^{x})^{\frac{1}{x}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为正整数）.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{k\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{k}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{1}{4n+k}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}}{\sin^3\dfrac{1}{n}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^{x}-\cos x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\ln\cos x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$.

32. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

33. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

34. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin 2x}$.

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x(e^{2x}-1)\ln(1+\tan^2 x)}$.

37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)\arctan 3x}{(e^{x}-1)\ln(1+2x)\sin 5x}$.

38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(1-x)}{\ln x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 x}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2}$.

41. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+\dfrac{1}{6}x^3}{x^5}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{5}}{(\arcsin x)^7}$.

43. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

44. 设$f'(x_0)=2$,求$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0-2\Delta x)}{\Delta x}$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)(a>0)$.

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}$.

47. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切,求$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

48. 设 $a>0,x_1=b>0,x_2=\dfrac{1}{2}\left(x_1+\dfrac{a}{x_1}\right),\cdots,x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$.求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

49. 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其值.

50. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<0\\ \dfrac{x^2}{1-\cos x} & x>0\end{cases}$, 求$\lim\limits_{x\to0}f(x)$.

51. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

52. 设$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$,求 a 和 b.

53. 设$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$,求 a 和 b.

54. 设$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^3-3x-2}=1$,求 a 和 b.

55. 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$,求 a 和 b.

56. 当 $x\to0$ 时,若有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim0.05x^4+\sin^2(\sqrt{3}x)$,则 $a=$________.

57. 当 $x\to0$ 时,若有 $\ln\left(\cos\dfrac{2x}{3}\right)\sim Ax^k$,则 $A=$________,$K=$________.

58. 当 $x\to0$ 时,若有 $x-\sin ax\sim x^2\ln(1-bx)$,则 $a=$________,$b=$________.

59. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$,($n$ 为正整数).

60. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

61. $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$.

62. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

63. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\mathrm{d}t$.

64. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

65. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

66. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

67. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

69. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

70. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

三、连续练习题

1. 讨论函数$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}+1, & x<0\\ 2, & x=0\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处的连续性.

2. 设函数$f(x)$，$g(x)$，在 x_0 点都不连续，试研究：

(1)函数$\varphi(x)=f(x)+g(x)$在 x_0 点处的连续性.

(2)函数$h(x)=f(x)g(x)$在 x_0 点处的连续性.

3. 设函数$f(x)=\begin{cases}e^x, & 0\leqslant x<1\\ k+x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，在 $x=1$ 处连续，求常数 k.

4. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}, & x\neq 1\\ k, & x=1\end{cases}$，在 $x=1$ 处连续，求常数 k.

5. 求函数$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x|(x^2-4)}$的间断性，并确定其类型.

6. 求函数$f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$的间断性，并确定其类型.

7. 求$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right)-x\right]$的间断性，并确定其类型.

8. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$是连续函数，试求 a 和 b 的值.

9. 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(2+\sin x)$.　　　　10. $\lim\limits_{x\to 0}\arctan\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

11. 证明五次代数方程 $x^5-5x-1=0$ 在区间$(1,2)$内至少有一个根.

12. 证明 $x=\sin x+2$ 至少有一个不超过 3 的实根.

13. 设$f(x)$在$[a,b]$连续,且$f(a)<a$, $f(b)>b$,证明$f(x)=x$ 在(a,b)内至少有一个根.

14. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $a<c<d<b$,证明在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$,其中 p,q 为任意正常数.

15. 设$f(x)$在$[0,2a]$上连续,且$f(0)=f(2a)$,证明在$[0,a]$上至少存在一点 ξ,使得$f(\xi)=f(\xi+a)$.

16. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,下面结论中成立的是　　(　　).

(A)$x=0$ 必是 $g(x)$的第一类间断点

(B)$x=0$ 必是 $g(x)$第二类间断点

(C)$x=0$ 必是 $g(x)$的连续点

(D)$g(x)$在点 $x=0$ 处连续性与 a 的取值有关

17. 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$,在下列哪个区间有界?　　(　　).

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

18. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$. 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$________.

19. 当 $x\to 0^+$时,与$\sqrt{x}$是等价无穷小的是　　(　　).

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

20. 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

(1)证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限.

(2)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

21. 证明公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax+b}{ax+c}\right)^{hx+k}=e^{\frac{(b-c)h}{a}}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=$ (　　).

(A) $\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$　　(B) $2\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$

(C) $2\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

23. 确定 $a,b,c(c\neq 0)$ 的值,使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c$.

24. 已知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导,且

$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$,求 c 的值.

25. 函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$可去间断点的个数为 (　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)无穷多个

26. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^n+x^n)}{n}(x>0)$,试讨论$f(x)$的连续性.

27. 函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点数为 (　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

28. 已知当 $x\to 0$ 时,$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小,则 (　　).

(A)$k=1,c=4$　　(B)$k=1,c=-4$

(C)$k=3,c=4$　　(D)$k=3,c=-4$

第二章　一元函数微分学

一、导数与微分练习题

1. 设$f(x)=|x|\sin x$,求$f'(0)$.

2. 设$f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中$\varphi(x)$在点a处连续,求$f'(a)$.

3. 设$f(x)$是定义在区间$(-a,a)(a>0)$内的偶函数,且$f'(0)$存在,试证:$f'(0)=0$.

4. 设函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ x, & x>0\end{cases}$.求$f'(0)$.

5. 确定常数a和b使函数$f(x)$处可导.

(1)$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x>1\\ x^2, & x\leqslant 1\end{cases}$.　　(2)$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0\\ x^2+ax+b, & x\geqslant 0\end{cases}$.

(3)$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3, & x\leqslant 0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$.

6. (1)设$f(x)=\max\{x,x^2,x^3\}$在$(0,2)$内,求$f'(x)$.

(2)设$f(x)=\min\left\{\ln x,\dfrac{e}{x}\right\}$在$(1,4)$内,求$f'(x)$.

7. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$. 试讨论$f(x)$在$x=0$处的连续性与可导性.

8. 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$,则$f'(0)=$ ________.

9. 求已知函数的导数y'.

(1)$y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$.　　(2)$y=\sin^3(2x+1)$.

(3)$y=e^{\arctan\sqrt{x}}$.　　(4)$y=\ln\cos 5x$.

(5) $y=\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$.　　　　(6) $y=\mathrm{e}^{x^2}\sin\sqrt{x}$.

10. (1) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\arctan x^2$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(2) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x)=\arcsin x^2$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

(3) 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $y=f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

11. (1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 所确定, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

(2) 设 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$, 确定 y 为 x 的函数, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

(3) 设 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

(4) 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{x}x\sin t^2\mathrm{d}t$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ______.

12. (1) 设方程 $x=y^y$, 确定 y 为 x 的函数, 则 $\mathrm{d}y=$ ________.

(2) 设 $\tan y=x+y$, 则 $\mathrm{d}y=$ ________.

(3) 设方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$, 确定 y 为 x 的函数, 则 $\mathrm{d}y=$ ________.

13. 求 y' 和 $\mathrm{d}y$.

(1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(\mathrm{e}^x+x)}}$.　　(2) $y=(\ln x)^x$.　　(3) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

(4) $y=(\sin x)^{\cos x}$.　　　　(5) $y=(\tan x)^x+x^{\sin\frac{1}{x}}$.

14. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$. (数学一、数学二要求)

(1) $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$.　　(2) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$.　　(3) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$.

15. (1) 求曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程和法线方程.

(2) 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin 2t\\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为 ________.

(3)曲线$\begin{cases}x=t^2+2t\\y=\ln(1+t)\end{cases}$在$x=3$处的法线与$x$轴交点的横坐标是________.

(4)曲线$\begin{cases}x=\int_0^{1-t}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u\\y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$在(0,0)的切线方程为________.

(数学一、数学二要求)

16. (1)曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点(0,1)处的切线方程是________.

(2)设$y=f(x)$由方程$\mathrm{e}^{2x+y}-\cos(xy)=\mathrm{e}-1$所确定,则曲线$y=f(x)$在点(0,1)处的法线方程为________.

(3)设函数$y=f(x)$由方程$xy+2\ln x=y^4$所确定,则曲线$y=f(x)$在点(1,1)处的切线方程为________.

17. (1)设$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$,求y''.

(2)设$y=1+x\mathrm{e}^{xy}$,求$y''(0)$.

(3)设$y=y(x)$由方程$x^2+y^2=1$所确定,求y''.

(4)设$y=y(x)$是由方程$xy+\mathrm{e}^y=x+1$确定的隐函数,则$y''(0)=$________.

(5)设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{-t}\\y=\int_0^t\ln(1+u^2)\mathrm{d}u\end{cases}$,则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$________.

18. (1)设k,n为正整数,$y=x^k$,求$y^{(n)}$.

(2)设$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$,求$y^{(n)}$(n为正整数).

(3)设$y=\sin kx$(k为常数),求$y^{(n)}$.

(4)求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)$ $(n\geqslant3)$.

(5)函数$y=\ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0)=$________.

19. (1)设$f(x)=\log_x(\ln x)$,求$f'(\mathrm{e})$.

(2)设$f(x)=1-x|x|$,求$f'(0)$.

20. 设$f(x)$在$x=1$处有连续的导数,$f'(1)=-\dfrac{1}{4}$,求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos^2 2x)$.

21. 设函数$f(x)=\ln(1+ax^2)-b\int\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$,试问$a,b$为何值时,$f''(0)=4$.

22. 抛物线$y=ax^2$与曲线$y=\sqrt{2x-3}$相切,求a的值.

23. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$________.

24. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$ ( ).

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

25. 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

二、微分中值定理练习题

1. 叙述并证明拉格朗日中值定理.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$.

(2) 对任意实数 λ，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，则下列结论皆成立：

(1) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+lf(\xi)=0$（l 为实常数）.

(2) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+k\xi^{k-1}f(\xi)=0$（$k\neq 0$，$k$ 为实常数）.

(3) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$，$g(x)$ 为连续函数.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$.

(2) 存在 $\xi\in(0,\eta)$，使 $f'(\xi)+3\xi^2[f(\xi)-\xi]=1$.

5. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上皆连续，在 (a,b) 内皆可导，且 $f(a)=0$，$g(b)=0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，k 为正整数. 求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\xi f'(\xi)+kf(\xi)=f'(\xi)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. 试

证：对任意正整数 k，存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{kf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

8. 设 $x>0$，试证 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

9. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得 $f'(\xi)>0$.

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

11. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 证明：存在一个点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\dfrac{b}{a}$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，$\eta\in(a,b)$，使 $f'(\eta)=\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{f'(\xi)}{\xi}$.

13. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $f''(x)>0$，x_1,x_2,x_3 是 (a,b) 内相异的三个点. 求证：$f\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)<\dfrac{1}{3}[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$.

14. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，设 $F(x)=x^3f(x)$. 试证：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F'''(\xi)=0$.

15. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，在 $(0,1)$ 内有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$. 试证：方程 $2f'(x)+xf''(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有一实根.

16. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 试证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-\xi}$.

17. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=b$，$f(b)=a$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

18. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f'(\xi)\sin2\xi+2f(\xi)\cos2\xi=0$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：存在