概率论

Probability Theory

张颢 编著

高等教

概率论

Probability Theory

张颢 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书以清华大学电子工程系的“概率论”课程讲义为基础扩充改编而成。

本书共分为十五章。包括了古典概型、概率的公理化、随机变量与分布函数、离散随机变量、独立性、条件概率、随机变量的期望、连续随机变量、随机变量的函数、多元随机变量、条件期望与条件分布、特征函数、概率不等式、大数定律和中心极限定理等方面内容。本书作为面向工程类专业读者撰写的概率论入门教材，素材选择充分考虑了读者的工科知识基础，尽量使用基础微积分的方法和技巧进行分析论述，力求通过严密和系统的计算来强化读者对基本概念和方法的理解和掌握。这对于培养读者运用数学工具解决问题的能力有积极作用。

本书可供相关专业本科生作为教材使用，也可供工程技术人员自学和参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论 / 张颢编著 . --北京：高等教育出版社，2018.3

ISBN 978-7-04-047362-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 021214 号

策划编辑 吴陈滨　责任编辑 王　楠　封面设计 张申申　版式设计 马　云
插图绘制 杜晓丹　责任校对 刘丽娴　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市华骏印务包装有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 29
字　　数 640 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2018 年 3 月第 1 版
印　　次 2018 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 53.00元

物 料 号 47362-00

前言

本书以编者过去五年来在清华大学电子工程系讲授"概率论与随机过程 (I)"课程所用讲义为基础，加以适当的扩充改编而成，总结了编者的实际教学经验，并参考了历届学生对该课程教学的反馈与建议。

针对目前市面上已有大量概率论相关教材存在的现状，编者试图在以下几点尝试差异化处理，以突出本书的特色。首先，结合编者以及教学对象的电子信息专业特点，本书强调信息论与概率论的紧密关联，不但将熵看作和期望、方差同等重要的随机变量数字特征加以介绍，而且还使用最大熵原理来引出典型的连续分布 (均匀、指数和高斯)，以期让读者在学习概率论的同时，接触和熟悉信息论的基本概念，为电子信息专业的后续学习提供便利。其次，针对工程学科读者数学基础相对薄弱，大多缺乏严格的实分析训练的现实，本书并没有对概率论基础选择回避，而是大胆使用比较平易的方式介绍基于测度的公理化概率论，并以普通微积分作为基本工具，用相对严格的方式讨论随机变量、独立性、期望、条件期望等基本概念。编者的实际教学经验表明，这样做不但能够使得拥有扎实微积分基础的工科读者大体接受并掌握其中的关键知识点，而且有利于读者进一步学习和了解严格概率论及其广泛的应用。本书还包括超过 300 个不同类型的例题，内容涵盖了电子信息、金融、统计等多个领域，并辅之以部分概率发展历史的简要叙述。这些例题不但能够加深读者对于基本概念和方法的理解和认识，扩充知识面，还可以增强阅读的趣味性。

本书共分为十五章。我们以古典概型作为引入，用严格但几乎自洽的方式介绍概率公理、随机变量及其分布、独立性和条件概率等概率论基础内容，并在此基础上讨论离散随机变量和连续随机变量、期望以及其他数字特征 (矩、熵) 并面向具体应用展开。我们将一些面向应用的典型分布以基本分布的变换形式加以统一处理。多元随机变量虽不是本书重点，我们仍将基本概念作了清晰的呈现。条件期望作为重要的概率论工具，编者给予了充分重视，不仅给出了严格的定义和关键性质，而且还用较多实例帮助读者掌握应用的技巧。特征函数和概率不等式是深入学习和研究

概率论不可或缺的手段，本书均有所涉及。大数定律和中心极限定理是现代概率论的核心内容，本书进行了比较详细的陈述，供有兴趣的读者选读。

本书的每一章都分为四个部分，分别以 Part A~D 进行标示。Part A 是本章节的基本内容，读者在可能的情况下应尽可能仔细阅读；Part B 是扩展内容，读者可根据自身兴趣选看；Part C 是习题，包括"热身""习题"和"挑战"三个部分，形成递增的难度梯次。本书的习题配备不求多求全，读者可根据自身情况选做。如果读者希望能够进行系统的习题训练，应选择专门的概率论习题书籍来进一步研作。Part D 是参考文献和必要的文献点评。

本书尽量使用具备微积分知识的读者所熟悉的方法和技巧进行分析论述，这一方面可以复习巩固以往所学；另一方面可以在新课程的学习中增强灵活运用已有知识的能力。本书力求通过严密和系统的计算来强化读者对基本概念和方法的理解和掌握。这对于培养读者运用数学工具解决问题的能力有积极作用。

本书可供相关专业本科生作为概率论入门教材使用，也可供工程技术人员自学和参考。限于水平，本书难免有许多不足和不确切之处，恳请读者批评指正。编者邮箱：haozhang@mail.tsinghua.edu.cn。

编　者

2016 年 12 月

目录

第 1 章　古典概型

Part A

1.1　古典概型的定义 ▶▶▶

古典概型的计算严格说来并不是真正的概率问题. 在概率空间的准确定义没有给出之前, 我们通过古典概型的计算可以逐渐熟悉概率的基本含义, 积累计算技巧, 为今后的学习做好准备.

概率论研究的基本对象是统计试验的结果. 由于多种因素的共同影响, 统计试验的结果具有所谓的"随机性", 即在试验没有完成之前无法确切地预知结果. 不同结果的出现具有不同的可能性, 这些可能性由概率进行刻画. 对于某一种给定的试验而言, 把所有可能出现的试验结果全部罗列出来 (假如可能的话), 放到一个集合 Ω 里, 我们称该集合 Ω 为样本空间 (sample space), 集合内的元素, 也就是那些试验结果, 称为样本点 (sample points). 首先考虑简单情况, 假定样本空间是可数的 (countable), 给其中每个元素 ω_k 赋予一个概率值 p_k, 该值描绘了我们对于该元素作为试验结果, 出现的可能性大小的认识. 按照通常思维, 进一步规定 $p_k \geqslant 0$, 且 $p_1 + \cdots + p_n + \cdots = 1$. 建立基本的离散概率模型, 这是我们的出发点.

离散概率模型建立之后, 就可以计算集合的概率了. 事实上, 大部分实际应用问题, 都可以转化为计算样本空间的某些子集的概率. 对于集合 $A \in \Omega$, 定义 A 的概率为

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

也就是说, 集合的概率是其元素的概率之和. 不难看出, 概率计算的实质是求和. 上述定义是直观且合理的. 统计试验的结果落在集合 A 里面, 或者说具有集合 A 的特质的可能性大小应该用 A 中所有元素的可能性大小之和来描述.

古典概型是一种特殊的离散概率模型, 其中样本空间为有限集合, 且每个样本点是等概的, 即其在试验中出现的可能性完全相同. 记样本空间的元素个数为 $\#\Omega$, 那么

$$p_k = \frac{1}{\#\Omega}, \qquad k = 1, 2, \cdots, \#\Omega.$$

考虑集合 A 的概率, 有

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

因此, 集合 A 的概率计算就转化为了 A 和 Ω 元素个数的计算. 这是一个组合计数问题. 古典概型的概率计算大多可以转化为组合计数问题进行处理. 这是由古典概型的特殊性所决定的, 不具备普遍意义. 读者不可片面地认为概率就是计数. 事实上, 我们在古典概型学习部分还没有接触到真正的概率论, 只是为概率论的学习进行认识和技巧方面的铺垫.

1.2 计算实例 ▶▶▶

我们通过几个实例来熟悉古典概型的计算.

例 1.1 先后两次掷骰子, 第一次掷出的值比第二次大的概率是多大?

古典概型计算的关键在于搞清楚两个集合的元素个数. 一个是样本空间, 即所有可能出现的结果; 另一个是需要计算概率的集合 A. 在本例中, 样本空间是

$$\Omega = \{(A_1, A_2) | A_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, k = 1, 2\}.$$

其元素个数为 $6^2 = 36$. 另一方面, 集合 A 为

$$\{(A_1, A_2) | A_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, k = 1, 2, A_1 > A_2\}.$$

其元素个数为 15, 因此

$$P(A) = \frac{15}{36} \approx 0.416\ 67.$$

例 1.2 同时掷出 6 个骰子, 出现的六个面各不相同的概率是多大?

在本例中, 样本空间是

$$\Omega = \{(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) | A_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, k = 1, \cdots, 6\}.$$

其元素个数为 $6^6 = 46\ 656$. 另一方面, 集合 A 为

$$\{(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) | A_k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, k = 1, \cdots, 6, A_i \neq A_j, \forall i, j\}.$$

其元素个数为 $6! = 720$, 因此

$$P(A) = \frac{720}{46\ 656} \approx 0.015\ 432\ 1.$$

例 1.3 一个教学班中有 20 个二年级学生, 4 个三年级学生. 如果将所有学生分为四组, 每组人数相同, 每组内都有三年级学生的概率是多大?

在本例中, 样本空间是所有可能的分组方法构成的集合, 元素个数为

$$\#\Omega = \frac{24!}{6!6!6!6!}.$$

另一方面, 集合 A 为符合要求的分组方法构成的集合, 元素个数为

$$\#A = \frac{20!4!}{5!5!5!5!}.$$

因此

$$P(A) = \frac{6^4 \times 4!}{21 \times 22 \times 23 \times 24} \approx 0.12.$$

例 1.4 桥牌游戏中, 四个 A 被同一个人拿到的概率是多大?

在本例中, 样本空间由所有可能的牌的分布方式构成. 由于桥牌游戏一般由 4 人参与且共有 52 张牌, 因此

$$\#\Omega = \frac{52!}{13!13!13!13!}.$$

如果所有的 A 被一个人拿到, 那么对应集合 B 的元素个数为

$$\#B = 4 \times \frac{48!}{9!13!13!13!}.$$

因此

$$P(B) = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 4}{49 \times 50 \times 51 \times 52} \approx 0.01.$$

例 1.5 一个班有 N 个人, 存在两个人生日相同的概率是多大?

在本例中, 样本空间由班内所有 N 个人可能出现的生日分布情况构成. 不考虑闰年的影响, 设一年有 365 天, 那么

$$\#\Omega = 365^N.$$

设 A 为班内存在生日相同情况的生日分布所构成的集合. 直接计算 A 元素个数不太方便, 考虑其反面, 即班内所有人的生日都不同的情况所构成的集合 $\Omega \setminus A$, 有

$$\#(\Omega \setminus A) = \binom{365}{N} N!.$$

因此

$$P(A)=\frac{\#\Omega-\#(\Omega\setminus A)}{\#\Omega}=1-\frac{\binom{365}{N}N!}{365^N}. \tag{1–1}$$

这个例子告诉我们,有时从反面思考会有不错的效果.

值得一提的是,一群人中出现生日相同情形的概率相当大,和直觉存在一定的差异. 在式 (1–1) 中令 $N=50$,可以得到所求概率超过 0.9,即 50 人的班里出现两个同学生日相同情形的可能性超过 90%,这多少有些出人意料.

古典概型计算中,样本点的等概性质是重要的前提条件. 如果这个条件不成立,那么计算结果将会出现偏差. 在这一点上,不用说普通同学,就连名气很大的科学家都难免犯错误. D.Alembert 是 18 世纪法国著名学者,在数学和力学的许多分支都有重要贡献. 但是,对于一个非常简单的古典概型问题,他却也难免犯错误.

例 1.6 掷两个均匀硬币,出现正、反两面的概率是多大?

你可能会不假思索地说出 1/2 这个正确答案. 但是当年的 D.Alembert 却认为应该是 1/3,他的看法是这样的,掷两个均匀硬币,出现的结果无外乎"均正""均反""一正一反"三种情况,所以出现"正反"的概率是 1/3. 他的逻辑漏洞在哪里呢?

很明显, D.Alembert 在使用古典概型进行计算的时候,隐含地使用了等概条件. 但是不难看出,这一条件在本例中不成立. 也就是说,"一正一反""均正"和"均反"三种情况出现概率并不相同. 事实上,

$$P(\text{正正})=\frac{1}{4},\quad P(\text{反反})=\frac{1}{4},\quad P(\text{正反})=\frac{1}{2}.$$

所以, D.Alembert 的结论是错误的,和试验事实也不吻合.

这个例子还可以引发进一步思考. 我们在否认 D.Alembert 的同时,事实上也使用了隐含的条件,即两个硬币是"可区分的". 换句话说,"反正"和"正反"在我们的眼中是两种不同的结果. 如果去掉这一条件,即两个硬币是"不可区分"的,那么样本空间会发生变化,但是 D.Alembert 的逻辑仍然不合理,原因在于出现"一正一反"的可能性明显要多于其他两种情况. 也就是说,尽管样本空间发生了变化,但是样本空间中的样本点出现的可能性大小是不相同的,所以不能使用古典概型进行分析.

古典概型的计算中,确定样本空间和样本点的等概性质是关键. 对于同一种物理现实而言,从不同的角度思考,可以得出各异的概率模型. 即不同的样本空间和不同的等概性质,也就会有各不相同的结论. Bertrand 悖论充分说明了这一点.

例 1.7 (Bertrand 悖论) 在单位圆内随机挑选一条弦,请问弦长大于圆内接等边三角形边长的概率是多大?

如果固定住弦的一个端点 A, 考查另外一个端点 B, 那么样本空间就是圆周, 等概指的是 B 在圆周上均匀分布. 那么服从要求的 B 必然落在以 A 为端点的圆内接等边三角形中 A 的对边所对应的劣弧中. 这一段劣弧的长度恰为圆周长度的 1/3, 因此所求概率为 1/3.

如果考查弦的中点 O, 以单位圆盘作为样本空间, 等概指的是 O 在圆盘上均匀分布. 那么服从要求的 O 必然落在半径为 1/2 的单位圆的同心圆内. 由于两个圆面积比为 1/4, 因此所求概率为 1/4.

同样考查弦的中点 O, 不过以与该弦垂直的半径作为样本空间, 等概指的是 O 在该半径上均匀分布. 那么服从要求的 O 必然落在靠近圆心的一半上. 因此所求概率为 1/2.

三种角度三个答案, 看似矛盾实际却很合理. 样本空间不同导致概率模型本身存在差异, 出现不同的结果也就不奇怪了.

1.3 “球 – 盒”计数问题

“球 – 盒”模型研究将若干个球放入若干个盒中的放法数目, 这是一种很有普遍意义的组合计数模型. 许多组合计数问题可以用“球 – 盒”模型进行描述. 比如, n 个人按照职业分类, 共有 r 种职业, 那么人就充当球的角色, 而职业就相当于盒; 再比如, n 个印刷错误出现在一本书的 r 页中, 印刷错误就充当球的角色, 而书页就相当于盒, 等等.

“球 – 盒”模型按照球是否可区分、盒是否可区分以及是否允许空盒存在, 可以分为若干个子问题, 设球的数目为 n, 盒的数目为 r, 如果球可区分且盒也可区分, 则放法数目为

$$A_n^r = r^n. \tag{1–2}$$

如果球不可区分, 盒仍可区分, 放法数目为

$$B_n^r = \binom{n+r-1}{n}. \tag{1–3}$$

事实上, 式 (1–3) 能够由多种方法得到. 例如, n 个不可区分的球放在 r 个可区分的盒里的放法, 和不定方程

$$x_1 + \cdots + x_r = n$$

的非负整数解之间存在一一对应, 进一步与不定方程

$$x_1 + \cdots + x_r = n + r \tag{1–4}$$

的正整数解存在一一对应, 而式 (1–4) 等价于在 $n+r$ 个球之间放入 r 个“隔板”, 即在 $n+r-1$ 个空隙中任意取 r 个, 取法数目恰为式 (1–3).

换一个角度, n 个不可区分的球放在 r 个可区分的盒里的放法数目和多项式

$$(1+x+x^2+\cdots)^r=(1-x)^{-r} \tag{1–5}$$

中 x^n 的系数相同. 根据二项式定理, x^n 的系数为

$$(-1)^n\binom{-r}{n}=(-1)^n\frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-n+1)}{n!}=\binom{n+r-1}{n}, \tag{1–6}$$

与式 (1–3) 得到的结果完全相同.

如果假定盒不可区分, 那么问题变得有一点复杂. 我们引入第二类 Stirling 数 $S(n,k)$, 表示将 n 个元素的集合分解为 k 个非空子集的分法数目. 例如, $S(3,2)=3$, 即 3 个元素的集合 $\{1,2,3\}$ 可以分为 $\{1,2\}\cup\{3\}$, $\{1,3\}\cup\{2\}$, $\{3,2\}\cup\{1\}$. 不难验证

$$S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1). \tag{1–7}$$

可以证明

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n. \tag{1–8}$$

利用 Stirling 数, n 个可区分的球放在 r 个不可区分的盒里的放法数目可以表达为

$$C_n^r=S(n,1)+\cdots+S(n,r). \tag{1–9}$$

如果球与盒均不可区分, 引入分划数 $p(n,k)$, 表示将 n 分解为 k 个自然数的和的分法数目 ($p(n,k)$ 的计算相当复杂, 涉及整数以及集合分拆的问题, 有兴趣的读者可以参阅组合计数方面的文献), 那么 n 个不可区分的球放在 r 个不可区分的盒里的放法数目可以表达为

$$D_n^r=p(n,1)+\cdots+p(n,r). \tag{1–10}$$

如果要求盒不为空, 假定 $n>r$, 则在球与盒均可区分的情况下, 等效于将 n 个球分到 r 个有序的集合中去, 因此放法数目为

$$\widetilde{A}_n^r=r!S(n,r), \tag{1–11}$$

其中, $S(n,r)$ 为第二类 Stirling 数. 若盒不可区分, 则无须对盒进行排序, 放法数目为

$$\widetilde{C}_n^r=S(n,r). \tag{1–12}$$

如果球不可区分, 盒可以区分, 那么等效于在每一个盒中先放入一个球, 剩下的 $n-r$ 个不可区分的球放入 r 个可区分的盒中, 放法数目为

$$\widetilde{B}_n^r = B_{n-r}^r = \binom{n-1}{n-r}. \tag{1–13}$$

如果球不可区分, 盒也不可区分, 放法数目为

$$\widetilde{D}_n^r = p(n, r). \tag{1–14}$$

1.4 几何概率 ▶▶▶

许多有趣的古典概型问题都以几何对象作为研究背景 (例如前述的例 1.7), 它们统称为几何概率问题. 这里再给出两个简单的例子, 读者能够从中初步体会今后将深入学习的基本概念与技巧. 有兴趣的读者可以从本章参考文献 [7] 中获取更多信息.

例 1.8 将长度为 1 的线段随机分为 3 段, 则这三条线段能够构成三角形的概率有多大?

设三条线段的长度为 X, Y 和 $1-X-Y$. 不失一般性, 假设 $X > Y > 1-X-Y$, 那么显然有

$$X > 0, \quad Y > 0, \quad X+Y < 1, \quad X > Y, \quad Y > 1-X-Y. \tag{1–15}$$

在笛卡儿坐标系中, 满足式 (1–15) 的 (X, Y) 组成了以 $(1,0), (1/2, 1/2), (1/3, 1/3)$ 为顶点的三角形. 这是样本空间 Ω.

如果要求三条线段能够组成三角形, 则需要进一步添加条件

$$(1-X-Y)+Y > X. \tag{1–16}$$

在笛卡儿坐标系中, 同时满足式 (1–15) 和式 (1–16) 的 (X, Y) 组成了以 $(1/2,\ 1/4)$, $(1/2,\ 1/2)$, $(1/3,\ 1/3)$ 为顶点的三角形. 这是需要计算的集合 A.

由于 X 和 Y 的随机性, 我们断言 (X, Y) 在 Ω 内各个点出现的可能性均等 (后面章节将会看到, 这意味着 (X, Y) 在 Ω 内均匀分布). 因此, 三条线段能够组成三角形的概率是 A 的面积与 Ω 面积的比, 即 $1/4$.

例 1.9 (Buffon's Needle) 著名的 "Buffon 抛针" 问题可以描述如下: 地面上画着许多条间距为 d 的平行线, 随机地抛下一根长度为 l 的针 $(l < d)$, 那么针落地时恰与一条线相交的概率有多大?

考虑落地后的针, 设其中点与距其最近的线之间的距离为 X, 其与平行线之间的夹角为 Θ. 那么 X 的取值范围是 $(0, d/2)$, Θ 的取值范围是 $(0, \pi/2)$.

假定两者间互不影响 (后面章节将会看到, 这意味着 X 和 Θ 相互独立), 那么 (X, Θ) 的取值范围是以 $(0,0), (d/2, 0), (0, \pi/2), (d/2, \pi/2)$ 为顶点的长方形. 这是样本空间 Ω, 其面积为 $\pi d/4$.

如果要求针与距其中点最近的线相交, 那么

$$X \leqslant \frac{l}{2} \sin \Theta, \tag{1-17}$$

此时 (X, Θ) 所处的区域 A 的面积为

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{l}{2} \sin \Theta} \mathrm{d}X \mathrm{d}\Theta = \frac{l}{2}.$$

因此, 所求概率为

$$\frac{l}{2} \bigg/ \frac{\pi d}{4} = \frac{2l}{\pi d}.$$

$l = \dfrac{d}{2}$ 时, 所求概率为 $\dfrac{1}{\pi}$. $(l > d)$ 的情形, 读者请自行练习.

Part B

1.5 古典概型与统计物理 ▶▶▶

古典概型以及“球 – 盒”模型和现代统计物理的发展存在着紧密联系.

考查热平衡系统以及其中的粒子, 在温度充分高且粒子在空间中分布的密度足够低的条件下, 粒子间的量子效应可以忽略, 则粒子在各能态 (energy state) 上的分布可以用 Maxwell-Boltzmann 统计进行描述. 假定能态被标记为 $\{1, 2, \cdots, K\}$, 粒子的总数为 N, 那么恰有 N_i 个粒子处于能态 i 上的概率为

$$P_{\text{M-B}} = K^{-N} \frac{N!}{N_1! N_2! \cdots N_K!}, \tag{1-18}$$

其中

$$N_1 + \cdots + N_K = N.$$

不难看出, Maxwell-Boltzmann 统计是将 N 个可区分的球放入 K 个可区分的盒, 且第 i 个盒中恰有 N_i 个球的放法数目, 与同样球盒假设下所有可能放法数目之比.

Maxwell-Boltzmann 统计中最重要的假设是粒子的可区分性. 该假设条件下粒子 A 处于能态 1 且粒子 B 处于能态 2, 与粒子 A 处于能态 2 且粒子 B 处于能态 1 是不同的两种系统状态. 不可否认, 该假设所导出的粒子的能态分布 (即 Boltzmann 分布) 较为符合物理事实, 但是其在熵方面却导致了和物理事实严重违背的结果 (所谓的 Gibbs 悖论), 而一旦假设粒子不可区分, 则矛盾会迎刃而解.

当温度下降, 且粒子的空间密度上升时, 粒子间的量子效应变得显著而不可忽略, 粒子在能态间的分布也随之发生变化. 根据表现的不同, 可以将粒子分为两类: 玻色子 (Boson) 和费米子 (Fermion). 无穷多个玻色子能够在同一时间处于 (“凝聚”)同一能态上, 从而出现统计物理学中著名的 Bose-Einstein 凝聚 (Bose-Einstein condensate, BEC) 现象, 仍假定粒子总数为 N, 能态数目为 K, 则玻骰子在各能态上的分布服从 Bose-Einstein 统计,

$$P_{\mathrm{B-E}} = \frac{1}{B_N^K} = \binom{N+K-1}{N}^{-1}. \tag{1–19}$$

也就是说, Bose-Einstein 统计的粒子能态分布情况与 N 个不可区分的球放入 K 个可区分的盒中的放法形成一一对应.

Bose-Einstein 统计首先由 Bose 于 1924 年用于光子的分析, 随后 Einstein 于 1924 — 1925 年将其用于原子, 并通过对该统计的深入研究, 大胆地预言了 BEC 的存在. 美国学者 Cornell 、 Wieman 和 Ketterle 于 1995 年成功地用实验对 BEC 的存在性进行了验证, 并凭借该成果获得 2001 年度的 Nobel 物理学奖.

费米子的情况和玻色子有很大不同, 它们遵守量子力学中的 Pauli 不相容原则, 即不同的粒子无法处在相同的能态上 (注意玻色子是不满足这一原则的). 因此, 系统中的粒子数目一定比能态数目少, 即 $N < K$. 费米子的能态服从 Fermi-Dirac 分布,

$$P_{\mathrm{F-D}} = \binom{K}{N}^{-1} \tag{1–20}$$

该分布对应于 N 个不可区分的球放入 K 个可区分的盒中, 且每个盒里不能多于两球的放法数目. Fermi-Dirac 统计在帮助人们理解电子的行为方面起到了非常关键的作用.

回顾一下历史, Bose 是孟加拉人, 他于 1924 年在巴基斯坦 (当时孟加拉尚未独立, 是巴基斯坦的一部分) 的达卡大学做学术报告, 试图澄清物理学理论与实验结果之间的某些矛盾. Bose 在报告中犯了一个“错误”, 他认为连抛两次硬币, 出现两次正面向上的概率是 1/3(非常巧, 这个错误和两百多年前 D.Alembert 的错误如出一辙). 但是, 他惊奇地发现, 这个“错误”使他得到了与实验相吻合的理论结果. 事实上, 正是这个“错误”帮助 Bose 找到了传统的 Maxwell-Boltzmann 统计的缺陷, 也是修改理论以适应实验结果的关键, 即应将粒子的不可区分作为基本假定.