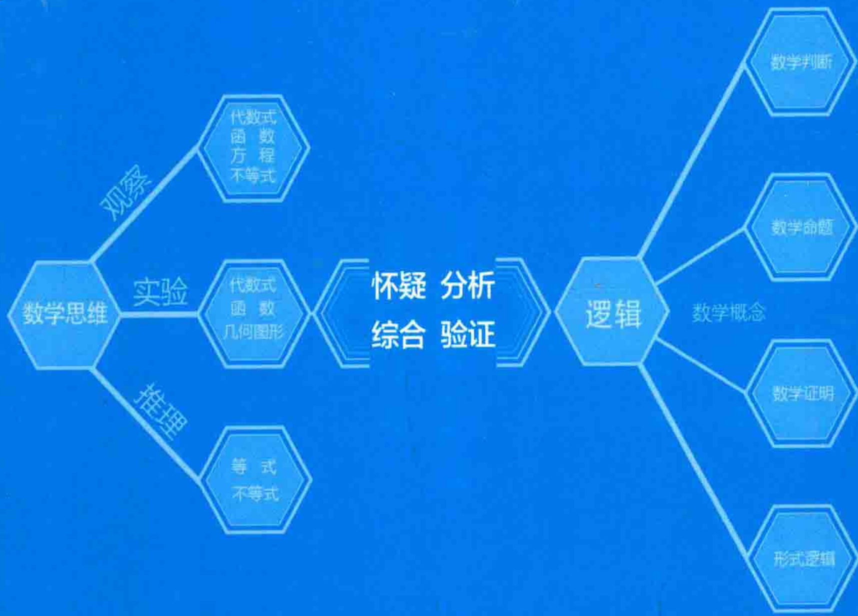


数学思维培训

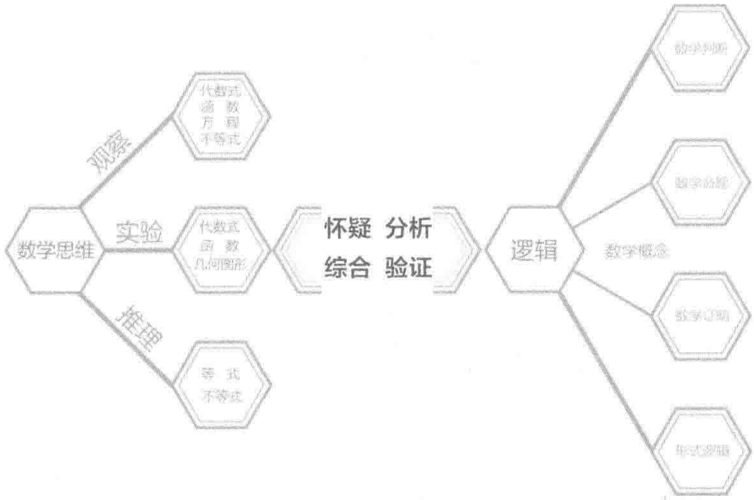
基础教程

高中版

俞海东 编著

MATHEMATICAL
THINKING TRAINER

中国科学技术大学出版社



数学思维培训基础教程

高中版

俞海东 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书从数学解题程序、数学思维和数学逻辑三个层面进行介绍.数学解题程序对如何审题、如何分析、如何叙述解答、如何验证作了系统化的提炼,以达到解题时万法归一,系统、有效、快速地找到解决数学问题的方法;数学思维则从观察、实验、推理与证明三个角度来阐述对于数学问题的思考过程,本书阐述了推理与证明的一般方法;数学逻辑阐述的是数学中逻辑的一般规律,本书对数学概念从文字表达、符号表达、图像表达和数学形象四个维度进行把握,以达到对数学概念最本质的揭示.

本书适合备战高考与竞赛的学生使用,也可供数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学思维培训基础教程/俞海东编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2018.6
ISBN 978-7-312-04404-5

Ⅰ.数… Ⅱ.俞… Ⅲ.中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第045148号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷 合肥华苑印刷包装有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 9.75
字数 196千
版次 2018年6月第1版
印次 2018年6月第1次印刷
定价 36.00元

前　　言

著名数学家华罗庚说过:“学数学不解题,如入宝山而空返.”其实,掌握数学就意味着善于解题.每个学习数学的人都希望自己能用简捷而准确的思维解决各种数学问题.对于高中生而言,不仅仅要会解题,更重要的是通过高中三年的系统学习,真正掌握数学思维,即便在高考短短的两个小时内,也能迅速解决各种类型的数学题目.

当前,很多学生把大量的宝贵时间花在了题海之中,他们或许都有着这样的困惑:为什么题做了那么多,数学成绩却没有明显提升?

这是因为数学学习可以分为两类,即陈述性知识学习和程序性知识学习.程序性知识包括数学方法、数学思想和数学思维.目前数学的教学过多地强调数学陈述性知识,而对数学思维的培养重视不够,导致学生的数学思维能力普遍不高,以至于对考试中很多需要数学思维引导的题目难以自己解决.

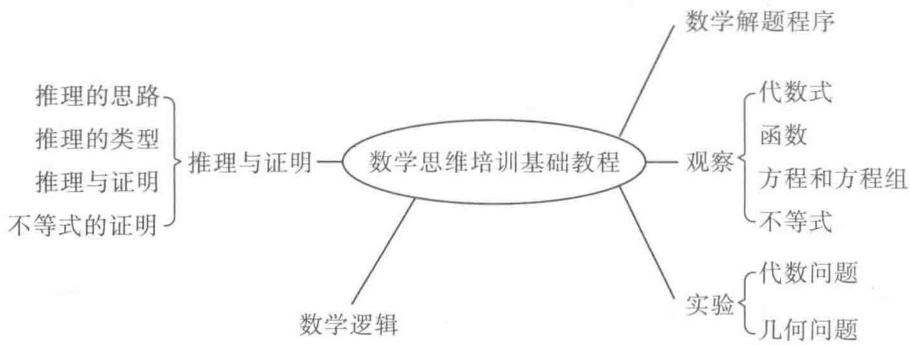
本书就是试图通过系统的数学思维理论的介绍,引导学生去思考,加强学生对数学思维的培养,从而改变学生的数学思维方式.

本书从数学解题程序、数学思维和数学逻辑三个层面进行介绍.

本书的特色主要表现在:① 针对性强.为学生备战高考与竞赛服务,为学生进入数学世界服务.② 系统性好.数学知识只有构建出一个有效的体系,才能快速帮我们解决问题,本书利用思维导图这一工具,引导学生系统把握思考方向.③ 思维性高.数学是思维的体操,站在思维的高度去欣赏题目,才能有效解决问题.

需要注意的是,思维训练不仅需要时间的投入,更需要用心.从长远来说,数学思维方法的系统培训是学好数学的不二法门.只要同学们在本书的指引下坚持不懈地学习,掌握数学思维的本质,不仅将在数学学习上获得成功,而且思维品质会得到提升,理性思维会大大加强,学习效率也会有所提高.

本书的内容框架如下：



数学思维培训师　俞海东

2018 年 4 月于剡溪河畔

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第1章 绪 论

1. 数学、数学教育的现状及数学思维

(1) 数学

数学作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美意境的追求.它的基本要素是逻辑和直观、分析和构作、一般性和特殊性.虽然不同的传统强调不同的方面，但正是这些互相对立的力量的相互作用以及综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值.(如果需要加深对数学本质的理解，可以去看R·柯朗的《什么是数学》一书.)

(2) 数学教育的现状

大多数老师按知识点来构建体系，按题型分类，并以此来教授学生.只有少数老师认为数学应该以概念和公理为基础，依照数学思维和逻辑来构建数学体系，他们认为授课的着重点不在于知识点的讲授，而在于概念与公理的深刻理解和数学思维的强化训练，以及对数学的兴趣的培养.知识点和题型的授课方式只能在短时间内提高学生的分数，但并不能切实提高学生的素质，而且长时间来看，可能会僵化学生的思维，打击学生对数学的兴趣，对学生的长期发展十分不利.

(3) 数学思维

数学思维指在数学活动中的思维，是人脑和数学对象(空间形式、数量关系、结构关系等)交互作用并按照一定思维规律认识数学内容的内在理性活动.它既具有思维的一般性质，又有自己的特性.它最主要的特性表现在思维的材料和结果都是数学内容.

2. 围绕数学思维学习数学

(1) 数学知识的三种形态

经验知识、公理系统和形式系统是数学知识的三种形态.经验知识是有关数学模型及其解决方法的知识；公理系统是应用公理方法从某门数学经验知识中提炼出少数基本概念和公理作为推理的前提，然后根据逻辑规则演绎出属于该门知识的命题，从而构成的一个演绎系统；形式系统是形式化了的公理系统，由形式语言、公理和推理规则

组成.

(2) 数学方法

数学方法是在数学思想的指导下,为数学思维活动提供的具体的实施手段,是提出问题、解决问题过程中所采用的各种数学方式、手段、途径等.

(3) 数学思想

数学思想是人们对数学知识的本质认识,是从某些具体的数学内容和对数学的认识过程中提炼上升的数学观点,它在认识活动中被反复运用,带有普遍的指导意义,是建立数学、掌握数学和用数学解决问题的指导思想.常见的数学四大思想为函数与方程、转化与化归、分类讨论、数形结合.

(4) 高中生的数学思维

高中生的数学思维是指学生在对高中数学有了感性认识的基础上,运用归纳、类比、演绎、证明等思维的基本方法,理解并掌握高中数学内容,同时能对具体的数学问题进行推论与判断,获得对高中数学知识本质和规律的认识能力.在数年的教学实践中,作者发现许多学生的这种思维能力存在缺陷,制约了学生的进一步发展.

对于一个高中生而言,数学水平取决于对数学知识、数学方法、数学思想、数学思维和数学逻辑的把握程度,五个方面缺一不可,并且前者是后者的基础.

由于数学知识、数学基本方法在平常的数学教学中经常出现,所以本书重点围绕数学思维的培训展开.

数学思维的学习是先观察,然后实验,再对实验结果进行归纳、类比推理,逻辑分析,最后证明.

数学思维学习的思维导图如图 1.1 所示.

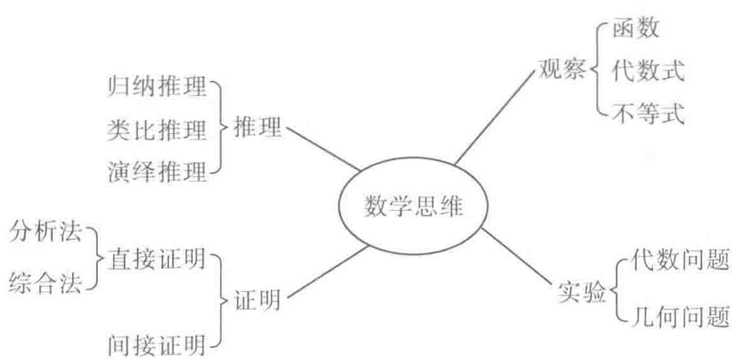


图 1.1

第2章 数学解题程序

现代认知心理学研究告诉我们,学生学习数学的过程实际上是一个数学认知的过程,在这个过程中学生在老师的指导下把教材知识结构转化成自己的数学认知结构.所谓数学认知结构就是学生头脑里获得的数学知识结构,它分化为知识、方法、思想和思维四个维度.而数学知识结构是由数学概念和命题构成的数学知识体系,它以最简约、最概括的方式反映了人类对世界数量关系和空间形式的认识成果,是科学真理的客观反映.

对学生进行数学思维培训,就是在学生原来的数学认知结构基础之上,将数学知识结构用文字、符号和图像的形式展示,并配以思维导图的模式传授给学生,以期学生建立更为高效有用的数学知识结构.

2.1 解题程序化操作

经过规范化而成为可操作的解题过程,是解题的最终形式,也是思想与实践的连接点.

1. 审题、读题,条件的转化

弄清楚用到了哪些知识(或方法),先用哪些,后用哪些,哪个与哪个做了结合,最后组成一个怎么样的逻辑结构,学会对解题过程做结构分析,是提高解题能力的有效途径.先看一个简单的例子.

例 2.1 已知函数 $f(x)=\dfrac{bx+c}{ax^2+1}$($a,c\in\mathbf{R},a>0,b$ 是自然数)是奇函数,$f(x)$有最大值$\dfrac{1}{2}$,且 $f(1)>\dfrac{2}{5}$.求函数 $f(x)$的解析式.

分析 本题条件较多,搞清楚每个条件,就是将条件转化为关于 a,b,c 的限制条件.了解结论,求解析式就是求 a,b,c.

因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$,即 $\frac{-bx+c}{ax^2+1}=-\frac{bx+c}{ax^2+1}$,亦即 $-bx+c=-bx-c$,故 $c=0$. 于是 $f(x)=\frac{bx}{ax^2+1}$.

由 $a>0$,b 是自然数,得当 $x\leqslant 0$ 时,$f(x)\leqslant 0$;当 $x>0$ 时,$f(x)>0$. 所以 $f(x)$ 的最大值在 $x>0$ 时取得且 $b>0$.

当 $x>0$ 时,$f(x)=\frac{1}{\frac{a}{b}x+\frac{1}{bx}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b^2}}}$,当且仅当 $\frac{a}{b}x=\frac{1}{bx}$ 时取等号,即 $x=\sqrt{\frac{1}{a}}$ 时,$f(x)$ 有最大值 $\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{b^2}}}=\frac{1}{2}$,即 $\sqrt{\frac{a}{b^2}}=1$,于是

$$a=b^2. \qquad ①$$

又 $f(1)>\frac{2}{5}$,所以 $\frac{b}{a+1}>\frac{2}{5}$,即

$$5b>2a+2. \qquad ②$$

把式①代入式②,得 $2b^2-5b+2<0$,解得 $\frac{1}{2}<b<2$. 又 $b\in\mathbf{N}$,所以 $b=1$,$a=1$.

故 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

点评 审题是解决问题的第一步,未知数是什么? 已知数据(已知数、已知图形和其他已知事项)是什么? 满足条件是否可能? 要确定未知数,条件是否充分? 或者它是否不充分? 或者是多余的? 或者是矛盾的?

2. 一般性解决

在策略水平上解决问题,以明确解题的大致范围和总体方向,这是对思考做定向调控.

例 2.2 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}$,$a_8=2$,则 $a_1=$________.

解 本题策略分析:根据条件,已知数列的一阶递推关系,根据前一项,可以知道后一项,倒过来,根据后一项也可以知道前一项,所以既然知道 a_8,就可以知道 a_7.

解决总体方向:依次进行,一定可以算到 a_1,当然若已知项与未知项项数相差太大,直接求太麻烦,则要学会寻找前面一些项之间的规律.

因为

$$a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n},$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

所以

$$1-a_n=\frac{1}{a_{n+1}},$$

即 $a_n=1-\frac{1}{a_{n+1}}$. 又 $a_8=2$,所以

$$a_7=1-\frac{1}{a_8}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$a_6=1-\frac{1}{a_7}=-1,$$

$$a_5=1-\frac{1}{a_6}=2,$$

$$a_4=1-\frac{1}{a_5}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots,$$

故$\{a_n\}$是以 3 为周期的数列,于是 $a_1=a_7=\frac{1}{2}$.

3. 功能性解决

在数学方法上解决问题,以明确具有解决问题功能的解题手段,这是对解决方法进行选择.

(1) 结构分析

例 2.3　在锐角$\triangle ABC$中,若 $\sin A=2\sin B\cdot\sin C$,则 $\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$ 的最小值为________.

解　观察发现条件 $\sin A$,$\sin B$,$\sin C$ 无齐次性,因此无法转化为边. 设 $Z=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}$(化切为弦).

列等式

$$\cos B\cos C-\sin B\sin C=\cos(B+C),$$

于是

$$\cos B\cos C=\frac{1}{2}\sin A-\cos A,$$

故

$$Z=\frac{\frac{1}{2}\sin^2 A}{\cos A\left(\frac{1}{2}\sin A-\cos A\right)}=\frac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-2\cos A)}$$

$$=\frac{\tan^2 A}{\tan A-2}\quad(\text{利用齐次性消元}).$$

令 $t=\tan A-2$,则

$$Z=\frac{(t+2)^2}{t}=t+\frac{4}{t}+4.$$

因为$\triangle ABC$ 为锐角三角形,$\cos B\cdot\cos C>0$,所以$\frac{1}{2}\sin A-\cos A>0$,即 $\tan A>2$,故 $t>0$.

当 $t=2$,即 $\tan A=4$ 时,$Z_{\min}=8$.

点评 观察到代数式具有齐次性,就对变量比值化;若代数式没有齐次性,则争取增加齐次性.

观察代数式是否具有对称性,然后对等式中的对称变量进行相同处理;若代数式没有对称性,则争取增加对称性.

(2) 条件到结论的结构分析

① 由不等式推出不等式.

例 2.4 等差数列$\{a_n\}$中,$1\leqslant a_2\leqslant 3$,$2\leqslant a_3\leqslant 4$,求 S_6 的范围.

解 等差数列中,基本量可选为 a_1,d.

$$\begin{cases}1\leqslant a_1+d\leqslant 3,\\ 2\leqslant a_1+2d\leqslant 4,\end{cases}$$

$$S_6=6a_1+15d=3(2a_1+5d),$$

因为

$$2a_1+5d=-(a_1+d)+3(a_1+2d),$$

所以

$$3\leqslant 2a_1+5d\leqslant 11,$$

故

$$9\leqslant S_6\leqslant 33.$$

点评 碰到三个及三个以上的二元一次代数式,考虑将两个二元一次代数式作为"基底",其余的用"基底"表达.

② 由等式推出不等式.

例 2.5 若 $0<x,y<\frac{\pi}{2}$,且$\frac{\sin x}{x}=\cos y$,则(　　).

A. $y<\frac{x}{4}$　　B. $\frac{x}{4}<y<\frac{x}{2}$　　C. $\frac{x}{2}<y<x$　　D. $x<y$

分析 本题为选择题,可假设某一选项正确,再等价转化到某一已知数,最后分析其是否正确.

假设 $x<y$,则 $\cos x>\cos y$. 利用 $\cos y=\frac{\sin x}{x}$,消元得 $\cos x>\frac{\sin x}{x}$,于是 $x>\tan x$.

而$0<x<\frac{\pi}{2}$，于是 $\sin x<x<\tan x$ 成立，假设不成立，故 $x>y$.

假设 $\frac{x}{2}<y$，则 $\cos\frac{x}{2}>\cos y$. 利用 $\cos y=\frac{\sin x}{x}$，消元得 $\cos\frac{x}{2}>\frac{\sin x}{x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{x}$，于是 $x>2\sin\frac{x}{2}$，即$\frac{x}{2}>\sin\frac{x}{2}$成立.

故$\frac{x}{2}<y$，选 C.

点评　推理方式为由等式推导不等式，可考虑对结论进行反推.

(3) 条件到结论的差异性分析

例 2.6　在$\triangle ABC$ 中，如果有性质 $a^2=b(b+c)$，求证：$A=2B$.

分析条件　条件与结论中的符号为 a,b,c,A,B，根据正弦定理与余弦定理使用的各种情况，可列出方程

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

分析结论　从结论来看是一个证明题，证明问题的方向有两种：综合法是从已知出发到结论，分析法是从结论出发到已知.

结论为 $A=2B$，证明过程就是不断寻找条件 $a^2=b(b+c)$的必要条件（即中间结论），最后由中间结论推出 $A=2B$；或者不断寻找结论 $A=2B$ 成立的充分条件（即中间结论），最后中间结论为条件 $a^2=b(b+c)$的充分条件. 由于条件为边，比较复杂，结论为角，比较简单，且为等式，所以可以考虑分析结论 $A=2B$ 的充要条件.

要证明 $A=2B$，只需证明 $A-B=B$.

因为 $0<A<\pi$，$0<B<\pi$，所以只需证 $\sin(A-B)=\sin B$.

$$\begin{aligned}\sin(A-B)=\sin B&\Leftrightarrow\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin B\\&\Leftrightarrow a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\\&\Leftrightarrow a^2-b^2=bc\\&\Leftrightarrow a^2=b^2+bc=b(b+c),\end{aligned}$$

得证.

点评　观察条件与结论的差异性，决定问题的解决方向.

分析条件与结论的变量差异，利用等式将多余的变量消去，或利用不等式消去结论

中没有出现的变量(结合不等式的传递性).

分析条件与结论的代数式次数差异,寻找通过等式运算或不等式运算将代数式统一的途径.

(4) 程序性分析

例 2.7 已知△ABC 的内切圆半径是 2,$\tan A=-\dfrac{4}{3}$,求△ABC 面积的最小值.

分析 ① 弄清元素.

本题中的元素是次要元素 r 和主要元素 A,把次要元素 r 转化为

$$\frac{2S}{a+b+c}=\frac{bc\sin A}{a+b+c},$$

即 $r=\dfrac{bc\sin A}{a+b+c}$,这样就把 r 转化为主要元素的关系式.

② 弄清条件.

观察另一个条件"$\tan A=-\dfrac{4}{3}$".因为 $\tan A<0$,所以在△ABC 中,$A>\dfrac{\pi}{2}$,得

$$\cos A=-\frac{3}{5},\quad \sin A=\frac{4}{5},$$

代入上一个条件可得

$$a+b+c=\frac{2}{5}bc,$$

其中 $a,b,c>0$.又根据出现的主要元素 a,b,c 和 A,利用余弦定理列出等式,可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2+\frac{6}{5}bc.$$

③ 弄清结论.

解三角形的问题主要有"证明……"或"推算……"型问题、"求……(值)"或"求所有的……(值)"型问题、"是否存在……"型问题.

本题是求三角形面积的最小值,即"求……(值)"型问题.

④ 作图,引入适当的符号.

本题作图如图 2.1 所示.

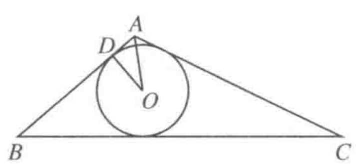


图 2.1

问题就简化为已知

$$\begin{cases}\tan A=-\dfrac{4}{3},\\ a+b+c=\dfrac{2}{5}bc, & ①\\ a^2=b^2+c^2+\dfrac{6}{5}bc, & ②\end{cases}$$

目标函数为

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

目标是要消去 a，由式②得

$$(b+c)^2-a^2=\frac{4}{5}bc,$$

所以

$$(b+c+a)(b+c-a)=\frac{4}{5}bc, \quad ③$$

将式①代入式③得

$$b+c-a=2. \quad ④$$

由式①和式④得

$$(b+c-2)+b+c=\frac{2}{5}bc,$$

即

$$\frac{2}{5}bc=2(b+c)-2.$$

接下来的解题步骤就和上述的不等式问题相类似.

$$\frac{2}{5}bc=2(b+c)-2\geqslant 4\sqrt{bc}-2.$$

令 $\sqrt{bc}=t$，得

$$\frac{2}{5}t^2-4t+2\geqslant 0,$$

解得

$$t\geqslant 5+2\sqrt{5}\quad \text{或}\quad t\leqslant 5-2\sqrt{5},$$

于是

$$bc\geqslant(5+2\sqrt{5})^2=45+20\sqrt{5},$$

所以

$$S=\frac{2}{5}bc\geqslant\frac{2}{5}(45+20\sqrt{5})=18+8\sqrt{5}.$$

综上所述，当 $a=8+4\sqrt{5}$，$b=c=5+2\sqrt{5}$时，$\triangle ABC$ 的面积取得最小值 $18+8\sqrt{5}$.

点评 程序性操作是将数学解题方法统一起来，特别适合应对陌生的、难的问题.

4. 特殊性解决

在数学技能水平上解决问题，以进一步缩小功能性解决问题的途径，明确运算程序或推理步骤，这是对细节做实际完成.

例 2.8 若动点 P,Q 在椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 上，且满足 $H\in PQ$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，则 $|\overrightarrow{OH}|=$（　　）.

A. $6\frac{2}{3}$　　B. $5\frac{3}{4}$　　C. $2\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{15}$

分析 如图 2.2 所示，条件动点 P,Q 在椭圆上动，考虑实验，令 P 为上顶点，Q 为右顶点，满足$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$. 又因为 $H\in PQ$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$，所以 OH 为$\triangle OPQ$ 斜边 PQ 上的高，

$$h=\frac{\frac{1}{2}\times3\times4}{\frac{1}{2}\times5}=\frac{12}{5}.$$

故选 C.

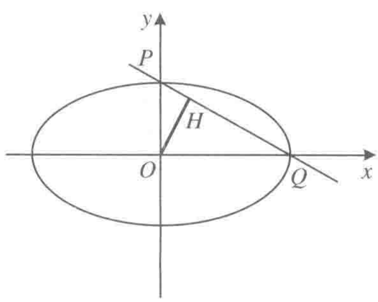


图 2.2

点评 两动点在轨迹上动，又要满足条件$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，一般让一个动点在动，另一个随前一个动点变化，将多动点问题转化为单动点问题.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com