



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

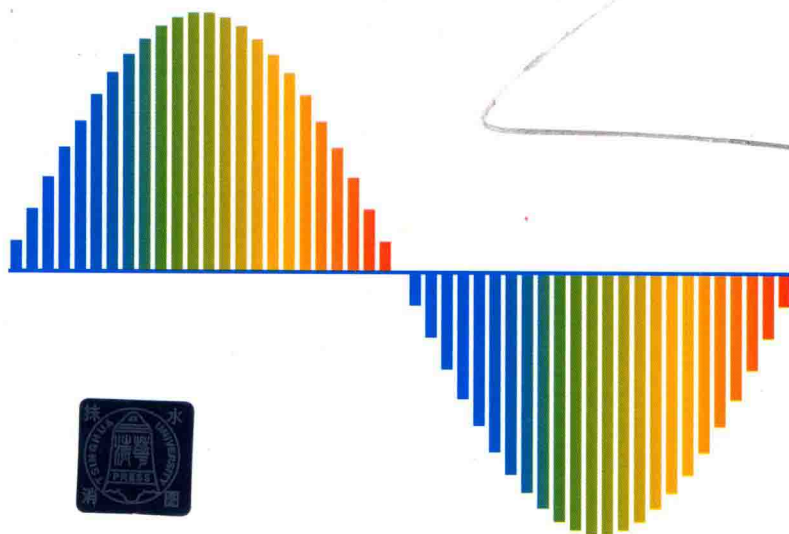
信息与通信工程

Digital Signal Processing

数字信号处理 基础教程

陈纯锴 主编

龙帮强 徐妮妮 王少娜 副主编



清华大学出版社



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

Digital Signal Processing

数字信号处理 基础教程

陈纯锴 主编

龙帮强 徐妮妮 王少娜 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统地讨论了数字信号处理的基础理论、基本概念、基本分析方法、算法和设计。全书共7章,包括三部分内容。第一部分(第1、2章)介绍离散时间信号(序列)与系统的基本概念,模拟信号用数字信号处理的原理与方法,时域、频域(Z变换)的分析方法;第二部分(第3、4章)介绍数字谱分析,离散傅里叶变换及其快速算法;第三部分(第5~7章)介绍各种IIR及FIR数字滤波器的基本概念、理论、结构与设计方法。

本书着重基本概念、基本原理的阐述及各概念之间的相互联系,既重视原理、概念和算法的讲解,保持课程知识体系的完整性和系统性,又重视算法实现和实践。本书图文并茂,在介绍这些理论的同时将MATLAB引入其中,以工程实际为背景,深入详尽分析各种实例,使学生尽快掌握数字信号处理的精髓,掌握数字信号处理系统的设计与开发,并提供完整的MATLAB程序。本书条理清楚,论述深入浅出,有较多的例题,便于自学。

本书可作为大学本科或专科院校通信工程、电子信息工程、信息工程等专业的教材,也可供从事这些专业及相近专业数字信号处理的科学研究工作者和工程技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理基础教程/陈纯锴主编. —北京:清华大学出版社,2018
(高等学校电子信息类专业系列教材)
ISBN 978-7-302-50625-6

I. ①数… II. ①陈… III. ①数字信号处理—高等学校—教材 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第154466号

责任编辑:赵 凯

封面设计:李召霞

责任校对:梁 毅

责任印制:沈 露

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座

邮 编:100084

社总机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印装者:三河市少明印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:15.25

字 数:369千字

版 次:2018年9月第1版

印 次:2018年9月第1次印刷

定 价:49.00元

产品编号:075175-01

前言

PREFACE

随着信息、通信、计算机科学与技术的迅速发展,数字信号处理的理论得到快速发展,其应用领域也日益广泛,“数字信号处理”已快速成长为一个主要的学科领域,成为各大专院校相关专业的一门重要专业基础必修课程,其课程的学科内容也在不断充实和完善,从而推动教材内容也随之进行修改、充实和更新。

本书具有如下主要特点:

(1) 强调基础,内容包括数字信号与系统;离散傅里叶变换及快速算法(数字谱分析);滤波器理论与设计(IIR、FIR)三大块。现在许多高校限于学时等因素也只讲这些内容,而目前许多数字信号处理教材内容不断增加,如小波变换、数字信号处理中的有限字长效应、线性预测和最优线性滤波器、自适应滤波器及功率谱估计等。这些内容往往成了“摆设”,当然并不是说不应该有这些新知识,只是大部分普通高校没有讲授。

(2) 本书的习题也进行了有针对性的设计,包括填空题、选择题、计算题及综合题,同时大部分习题给出了详细答案。这些习题都非常有启迪意义,能够帮助读者更好地理解数字信号处理的相关内容。以往教材每章都给出大量习题,在附录中给出答案,但这些答案非常简单,有的还省略了,同时配套出版习题解答书籍,可能是考虑让学生自己来思考,但对互联网如此发达的今天,这样只会增加障碍与不便。

(3) 本书中各章末都拿出一节增加 MATLAB 应用实例,并给出完整程序,有助于学生理解和掌握数字信号处理的基本理论和基本实现方法。

(4) 本书虽强调基础,但知识能全面、深入地阐述近年来数字信号处理领域的新技术和新成果;图文并茂,能用图形说明的不用文字阐述;结合典型实例进行分析,实用性、实践性强,理论联系实际,侧重实用,使学生在实践中掌握数字信号处理的基本概念、基本方法和基本应用。

本书由陈纯锴进行规划、组织和统编,天津工业大学电子与信息工程学院数字信号处理课程组老师均参与编写,陈纯锴编写了绪论、第6、7章及第1、5章部分内容,第4章由龙帮强老师完成,第1章部分内容由徐妮妮老师完成,第2章由王少娜老师完成,第3章由关雪梅老师完成,第5章部分内容由王雯老师完成。全书由陈纯锴统稿。澳大利亚 Wollongong 大学的 J. Tong 教授与天津工业大学的吴涛老师提出了建议与意见,在此表示感谢!

在本书的编写过程中,我们参阅了大量文献,在此对本书末列出的参考文献以及书中未能提及资料来源的文献的作者表示诚挚的感谢。另外还要感谢清华大学出版社的赵凯编辑及其他工作人员,他们在本书的出版过程中给予了大力支持与帮助。由于编者水平有限,疏漏和不当之处在所难免,敬请读者批评指正。本教材配有完整课件,联系人:陈纯锴, E-mail: chenchunkai@tjpu.edu.cn。

编者

2018年5月

目录

CONTENTS

绪 论	1
第 1 章 离散时间信号与系统	5
1.1 引言	5
1.2 模拟信号转换成数字信号方法	6
1.2.1 理想采样	7
1.2.2 采样定理	7
1.2.3 重构带限模拟信号	10
1.3 离散时间信号——序列	12
1.3.1 离散时间信号及其表示	12
1.3.2 常用典型序列	13
1.3.3 序列的周期性	15
1.3.4 序列的运算	17
1.3.5 序列的能量	20
1.3.6 用单位脉冲序列表示任意序列	20
1.3.7 序列的卷积	20
1.4 离散时间系统	24
1.4.1 线性系统	24
1.4.2 时不变系统	25
1.4.3 系统的因果性	25
1.4.4 系统的稳定性	26
1.4.5 常系数线性差分方程	26
1.4.6 线性时不变系统的输入输出关系	27
1.4.7 线性时不变系统的性质	28
1.5 MATLAB 应用实例	29
【本章习题】	33
第 2 章 Z 变换与序列傅里叶变换	35
2.1 序列的 Z 变换	35
2.2 序列傅里叶变换	49
2.3 拉普拉斯变换、Z 变换、傅里叶变换的关系	54
2.4 离散时间系统的频域分析	57
2.5 MATLAB 应用实例	64
【本章习题】	67

第 3 章 离散傅里叶变换	72
3.1 引言	72
3.2 周期序列的离散傅里叶级数	74
3.2.1 离散傅里叶级数定义	74
3.2.2 离散傅里叶级数的性质	79
3.3 有限长序列离散傅里叶变换	80
3.3.1 离散傅里叶变换定义	80
3.3.2 DFT 与序列傅里叶变换、 Z 变换的关系	82
3.4 离散傅里叶变换的性质	84
3.5 频域采样理论	89
3.6 MATLAB 应用实例	95
【本章习题】	98
第 4 章 快速傅里叶变换	100
4.1 直接计算 DFT 的运算量和减少运算量的途径	100
4.2 基 2-FFT 算法	102
4.2.1 时域抽取法基 2-FFT(DIT-FFT)基本原理	102
4.2.2 DIT-FFT 算法与直接计算 DFT 运算量的比较	108
4.2.3 DIT-FFT 的运算规律及编程思想	109
4.2.4 按时间抽取的 FFT 算法的其他形式流程图	114
4.3 频域抽取法基 2-FFT(DIF-FFT)基本原理	114
4.3.1 算法原理	115
4.3.2 DIT-FFT 与 DIF-FFT 的异同	117
4.3.3 IDFT 的高效算法及编程考虑	117
4.4 利用 FFT 分析时域连续信号频谱	118
4.4.1 基本步骤	118
4.4.2 可能出现的误差	124
4.5 MATLAB 应用实例	131
【本章习题】	133
第 5 章 数字滤波器基本结构及状态变量分析法	136
5.1 引言	136
5.2 用信号流图表示网络结构	137
5.3 无限长单位冲激响应滤波器的基本结构	139
5.3.1 直接型	139
5.3.2 级联型	141
5.3.3 并联型	143
5.4 有限长单位冲激响应滤波器的基本结构	144
5.4.1 直接型	144
5.4.2 级联型	144
5.4.3 频率采样型	145
5.5 状态变量分析法	149
5.5.1 由信号流图建立状态方程	149
5.5.2 由系统函数建立状态方程	152

5.5.3 由状态变量分析法转换到输入输出分析法	154
5.6 MATLAB应用实例	155
【本章习题】	157
第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计	160
6.1 滤波器基本概念	160
6.2 模拟滤波器设计	161
6.2.1 巴特沃斯型模拟低通滤波器的设计方法	162
6.2.2 模拟高通、带通和带阻滤波器设计	165
6.3 脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器	168
6.3.1 变换原理	169
6.3.2 变换方法	170
6.3.3 脉冲响应不变法的优缺点	171
6.4 用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器	173
6.4.1 变换原理	173
6.4.2 双线性变换法设计数字滤波器的步骤	174
6.4.3 数字角频率和模拟角频率之间的关系	174
6.4.4 双线性变换法特点	174
6.5 MATLAB应用实例	177
【本章习题】	178
第7章 有限脉冲响应数字滤波器的设计	181
7.1 线性相位 FIR 数字滤波器的性质	181
7.1.1 FIR 滤波器	181
7.1.2 线性相位 FIR 滤波器特性	183
7.1.3 线性相位 FIR 数字滤波器的幅度特点	184
7.1.4 线性相位 FIR 数字滤波器零点分布特点	187
7.2 用窗函数法设计 FIR 滤波器	188
7.2.1 设计思路	188
7.2.2 设计原理	189
7.2.3 典型窗函数	192
7.2.4 用窗函数法设计 FIR 滤波器方法	197
7.3 频率取样设计法	200
7.3.1 设计思路与原理	200
7.3.2 线性相位的约束	201
7.3.3 设计步骤	203
7.3.4 FIR 滤波器和 IIR 滤波器的比较	207
7.4 MATLAB应用实例	208
【本章习题】	211
附录A 各章习题详细解答	214
参考文献	234

绪 论

数字信号处理是当前信息处理技术中十分活跃的一个分支。在过去的数十年中,数字信号处理的领域,无论在理论上还是技术上都有非常重要的发展。工业上开发和利用廉价的硬件和软件,使不同领域的新工艺和新应用都在使用 DSP 算法。

数字信号处理:利用数字计算机或专用数字硬件、对数字信号所进行的一切变换或按预定规则所进行的一切加工处理运算。例如,滤波、检测、参数提取、频谱分析等。数字信号处理一般简称为 DSP。对于 DSP,可狭义理解为 Digital Signal Processor(数字信号处理器);可广义理解为 Digital Signal Processing(数字信号处理技术)。本书讨论的 DSP 的概念是指广义的理解。数字信号处理作为一门新的学科真正出现是在 1965 年 Cooley 和 Tukey 提出快速傅里叶变换(Fast Fourier Transform, FFT)算法之后。FFT 算法与莱维逊(Levinson)自回归谱估计算法形成了数字信号处理现代算法的两大支柱。

1. 数字信号处理的研究内容

数字信号处理主要研究:信号的采集和数字化,包括取样、量化;信号的分析,包括信号描述与运算、 Z 变换、离散傅里叶变换(DFT)、Hilbert 变换、离散余弦变换(DCT)、离散小波变换(DWT)、快速算法理论(FFT)、快速卷积、相关算法、信号建模(AR、MA、ARMA)、特征估计(自相关函数、功率谱估计);数字滤波器设计理论包括 IIR 滤波器设计、FIR 滤波器设计、卡尔曼滤波器设计、维纳滤波器设计及自适应滤波器设计理论。其中有些知识是在研究生阶段的“现代信号处理”课程中介绍。数字信号处理理论结构如图 0-1 所示。

2. 数字信号处理的实现方法

数字信号处理的主要对象是数字信号,采用数值运算的方法达到处理目的。因此,其实现方法不同于模拟信号的实现方法,基本上可以分成三种,即软件实现方法、硬件实现方法和片上系统实现方法。

(1) 数字信号处理的软件实现。

软件实现方法指的是按照原理和算法,自己编写程序或者采用现成的程序在通用计算机上实现,其优点是经济,可以一机多用;缺点是处理速度慢,这是由于通用计算机的体系结构并不是为某一种特定算法而设计的。在许多非实时的应用场合,可以采用软件实现方法。例如,处理一混有噪声的视频,可以将图像(声音)信号转换成数字信号并存入计算机,用较长的时间一帧一帧地处理这些数据。处理完毕,再实时地将处理结果还原成清晰的视频。通用计算机即可完成上述任务,而不必花费较大的代价去设计一台专用计算机。

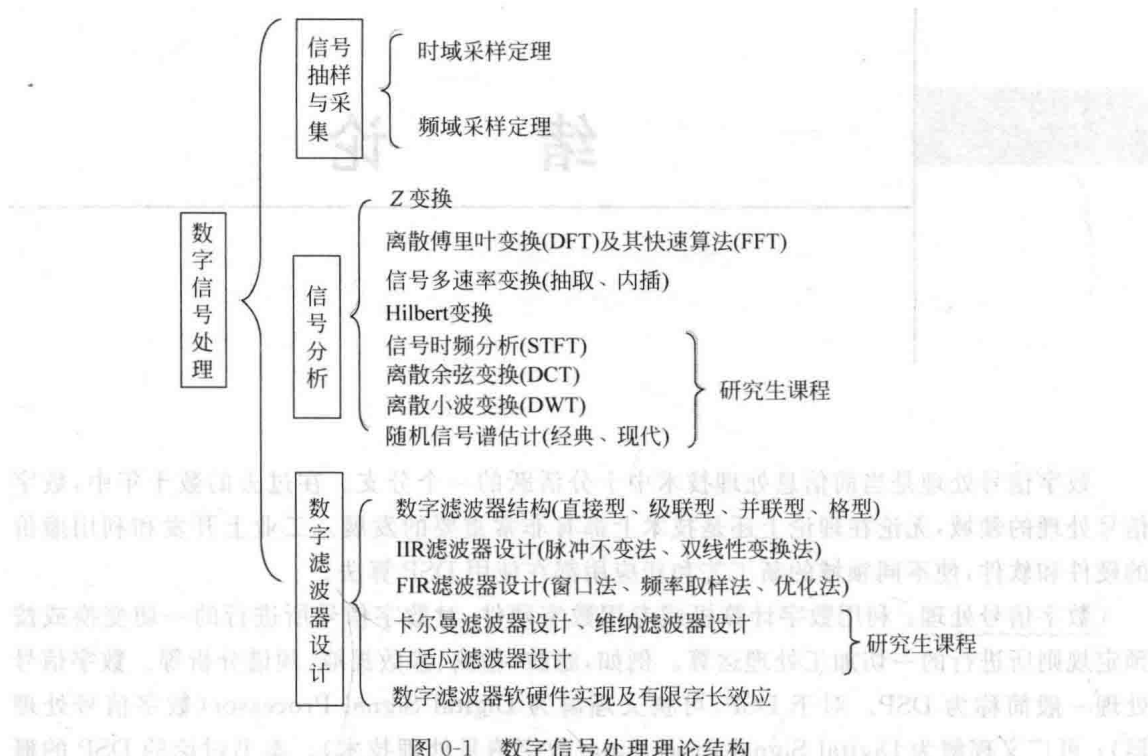


图 0-1 数字信号处理理论结构

(2) 数字信号处理的硬件实现。

硬件实现是按照具体的要求和算法,设计硬件结构图,用乘法器、加法器、延时器、控制器、存储器以及输入输出接口等基本部件实现的一种方法。硬件实现是针对特定的应用目标,设计一个专用的硬件系统。其优点是容易做到实时处理,缺点是设备只能专用。

(3) 数字信号处理的片上系统(System on a Chip, SoC)实现。

随着大规模集成电路的发展,一个复杂数字信号处理系统可以集成在一个芯片上。SoC 包含有数字和模拟电路、模拟和数字转换电路、微处理器、微控制器以及数字信号处理器等。与传统集成电路不同的是,嵌入式软件的设计也被集成到 SoC 设计流程中,SoC 设计以组装为基础,采用自上至下设计方法,设计过程中大量重复使用自行设计或第三方拥有知识产权的 IP(Intelligent Property)模块。SoC 要考虑如何合理划分软件和硬件所实现的系统功能以及如何实现软硬件间的信息传递。SoC 是数字信号处理系统的一个新型实现方法。

3. 数字信号处理系统构成

数字信号处理系统构成如图 0-2 所示,前置取样滤波器也称为抗混叠滤波器,将输入信号 $x_a(t)$ 中高于某一频率(称为折叠频率,等于抽样频率的一半)的分量加以滤除。A/D 转换器由模拟信号产生一个二进制流。在 A/D 转换器中每隔 T 秒(抽样周期)取出一次 $x_a(t)$ 的幅度,抽样后的信号 $x(n)$ 称为离散信号。数字信号处理器(DSP)按照预定要求,对数字信号序列 $x(n)$ 按一定的要求加工处理(滤波、运算等),得到输出信号 $y(n)$ 。D/A 转换器由一个二进制流产生一个阶梯波形,是形成模拟信号的第一步。后置的模拟滤波器把阶梯波形平滑成预期的模拟信号,以滤除掉不需要的高频分量,生成所需的模拟信号 $y_a(t)$ 。

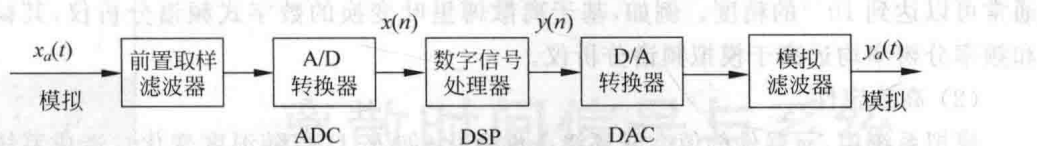


图 0-2 数字信号处理系统构成

4. 数字信号处理的典型应用

在机械制造中,基于 FFT 算法的频谱分析仪用于振动分析和机械故障诊断;医学中使用数字信号处理技术对心电(ECG)和脑电(EEG)等生物电信号作分析和处理;数字音频广播(DAB)广泛使用数字信号处理技术。数字信号处理技术已在各领域引起广泛关注和高度重视,其典型应用如图 0-3 所示。

- (1) 语音处理: 语音编码、语音合成、语音识别、语音增强、语音邮件和语音存储等。
- (2) 图像/图形: 二维和三维图形处理、图像压缩与传输、图像识别、动画、机器人视觉、多媒体、电子地图和图像增强等。
- (3) 军事: 保密通信、雷达处理、声呐处理、导航、全球定位、跳频电台、搜索和反搜索等。
- (4) 仪器仪表: 频谱分析、函数发生、数据采集和地震处理等。
- (5) 自动控制: 控制、深空作业、自动驾驶、机器人控制和磁盘控制等。
- (6) 医疗: 助听、超声设备、诊断工具、病人监护和心电图等。
- (7) 家用电器: 数字音响、数字电视、可视电话、音乐合成、音调控制、玩具与游戏等。



图 0-3 数字信号处理的典型应用

5. 数字信号处理的优点

数字信号处理采用数字系统完成信号处理的任 务,它具有数字系统的一些共同优点,例如抗干扰、可靠性强,便于大规模集成等。除此以外,与传统的模拟信号处理方法相比,它还具有以下明显的优点:

- (1) 精度高。

在模拟系统的电路中,元器件精度达到 10^{-3} 以上已经不容易了,而数字系统 17 位字长

通常可以达到 10^{-5} 的精度。例如,基于离散傅里叶变换的数字式频谱分析仪,其幅值精度和频率分辨率均远高于模拟频谱分析仪。

(2) 高稳定性。

模拟系统中,元器件的值会随环境条件变化(如 R 、 L 、 C 随温度变化),造成系统性能不稳定。数字系统,只有“0”和“1”两种电平,一般不随环境条件(如温度、电磁感应等)变化,工作稳定。

(3) 可控性好,灵活性好。

数字信号处理采用了专用或通用的数字系统,其性能取决于运算程序和乘法器的各系数,这些均存储在数字系统中,只要改变运算程序或系数,即可改变系统的特性参数,比改变模拟系统方便得多。

(4) 可以实现模拟系统很难达到的指标或特性。

例如,有限长单位脉冲响应数字滤波器可以实现严格的线性相位;在数字信号处理中可以将信号存储起来,用延迟的方法实现非因果系统,从而提高了系统的性能指标;数据压缩方法可以大大地减少信息传输中的信道容量。

(5) 可进行两维和多维处理。

利用庞大的存储单元,可以存储二维的图像信号或多维的阵列信号,实现二维或多维的滤波及谱分析等。

第1章

CHAPTER 1

离散时间信号与系统

随着数字技术的发展,离散时间系统所具有的精度高、可靠性好等一系列的优点逐渐显现出来。尤其是大规模集成电路和高速数字计算机的发展,极大地促进了离散时间信号与系统理论的进一步完善。人们用数字的方法对信号与系统进行分析与设计,不断提高数字处理技术。对大数据量的音频、视频等多媒体数字信息以更有效的方法、更理想的速率进行处理和传输。因此,研究离散时间信号与系统的基本理论和分析方法就显得尤为重要。本章首先介绍模拟信号转换成数字信号的方法,通过阐述离散时间信号和离散时间系统的基本概念,开始研究数字信号处理,集中解决有关信号表示、信号运算、系统分类和系统性质等问题;其次,对于线性时不变系统,将证明输入与输出是卷积和的关系,并讨论卷积和的方法及求卷积和的性质。

1.1 引言

当今社会,我们被各种信号所包围。其中一些信号是自然的,但大多数信号是人为的。有些信号是必需的(如语言),有些信号是为了娱乐(如音乐),有些信号是多余的(如噪声),信号的有用与否取决于应用场合。有些信号是一维信号(如音乐),语音信号是空气压力随时间变化的函数 $f(t)$,图 1-1 为声音“您好”的波形。有些信号是多维的(如二维图像),如图 1-2 所示,灰度图像是亮度随空间位置变化的信号 $f(x,y)$ 。本书只涉及一维信号。一维信号的自变量常常代表时间,事实上也可以不代表时间。实际应用中,根据一维信号的自变量和因变量的取值是离散的还是连续的,信号常分为以下 4 类:

- (1) 连续时间信号: 时间是连续的,幅值是连续的或是离散的。
- (2) 模拟信号: 时间是连续的,幅值也是连续的。可见模拟信号是连续时间信号的一个特例。
- (3) 离散时间信号(或称为序列): 时间是离散的,幅值是连续的。
- (4) 数字信号: 时间是离散的,幅值也是离散的。因为是离散值,因此可以用二进制码表示。

信号按照应用场合,常需要加工处理,处理信号的设备或运算称为系统。按处理的信号种类不同,系统也分为相应的 4 类。本书只涉及离散时间信号和系统。对于数字信号与系统,若信号和系统的量化精度高于 8bit,可以忽略量化误差,本书的离散时间信号与系统的

理论是适用的。

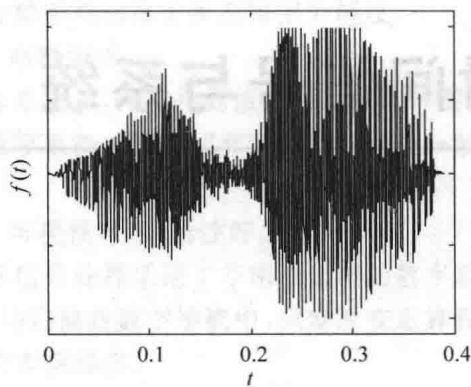


图 1-1 一维声音信号图 $f(t)$



图 1-2 二维图像信号 $f(x,y)$

1.2 模拟信号转换成数字信号方法

数字信号处理技术相对于模拟信号处理技术有许多优点,因此人们往往希望将模拟信号转换成数字信号,再采用数字信号处理技术进行处理;处理完毕,如果需要,再转换成模拟信号。这种处理方法称为模拟信号数字处理方法。模拟信号数字化方法如图 1-3 所示,一般经过3个步骤:采样、量化和编码。将模拟信号转换为数字信号称为模/数(A/D)转换,反转换称为数/模(D/A)转换。最著名的 A/D 转换技术是脉冲编码调制(PCM)技术。PCM 通过对语音采样、量化和二进制数字编码,将模拟语音信号转换为数字信号。脉冲编码调制技术和增量调制技术(ΔM),以及它们的各种改进技术都属于波形编码技术。

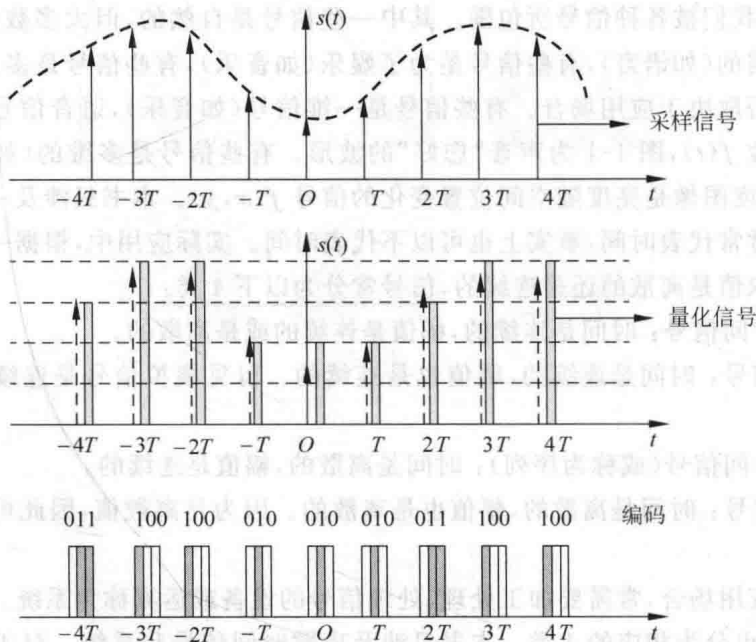


图 1-3 模拟信号数字化 3 个步骤

1.2.1 理想采样

采样是由模拟信号获取离散时间信号的基本途径,采样分自然采样和理想采样,其过程如图 1-4 所示。图 1-4 (a)和(b)分别为采样器和模拟信号,采样器可以看成是一个电子开关,这个过程可以把它看作是一个脉冲调幅过程。被调制的脉冲载波是一串周期为 T 、宽度为 τ 的矩形脉冲信号。自然采样如图 1-4 (c)和(e)所示,而理想采样就是 $\tau \rightarrow 0$ 的极限情况,如图 1-4 (d)和(f)所示。此时,采样脉冲序列 $p(t)$ 变成冲激函数序列 $s(t)$ 。

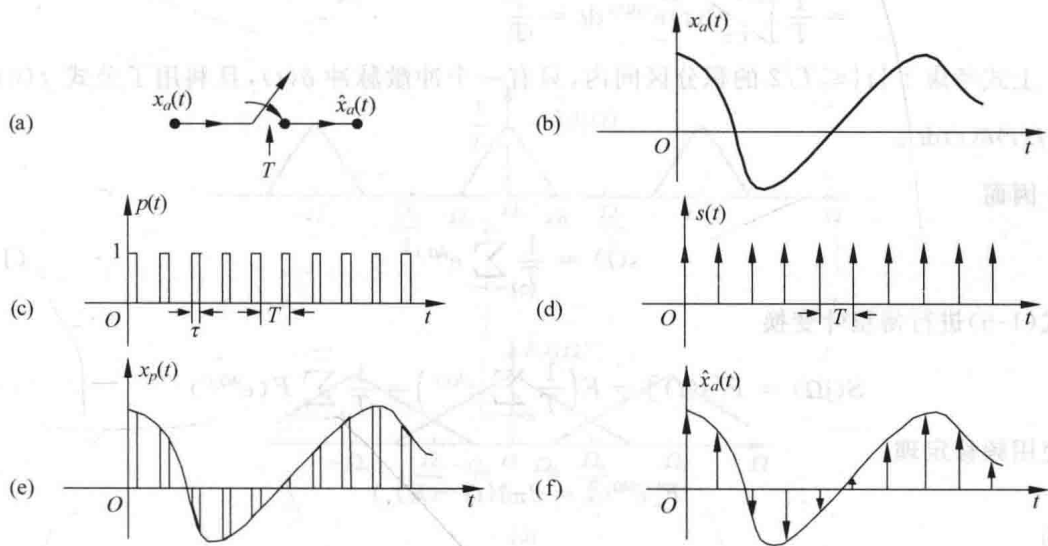


图 1-4 自然采样和理想采样

调制器的输入为连续时间信号 $x_a(t)$ 和单位冲激函数序列 $s(t)$, $s(t)$ 表达式为

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (1-1)$$

式中, $\delta(t)$ 为单位冲激函数, T 为采样周期。用 $x_a(t)$ 调制 $s(t)$ 可得理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$, $\hat{x}_a(t)$ 仍然是模拟信号。调制过程可以表示为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)s(t) \quad (1-2)$$

根据单位冲激函数的筛选性质, $\hat{x}_a(t)$ 可表示为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \delta(t - nT) \quad (1-3)$$

1.2.2 采样定理

现在从频域分析理想采样。设 $x_a(t)$, $s(t)$ 和 $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换分别为 $X_a(j\Omega)$, $S(j\Omega)$ 和 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 。由信号与系统的频域卷积定理可知

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(j\Omega) * S(j\Omega) \quad (1-4)$$

注意: 本书中总是假设模拟信号 $x(t)$ 是能量有限信号, 因此其傅里叶正变换和反变换都存在, 这种假设在实际应用中总是成立的。

现在求 $S(j\Omega)$ 。由于 $s(t)$ 是以采样频率重复的冲激脉冲, 因此是一个周期函数, 可表示为傅里叶级数, 即

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\Omega_s t} \quad (1-5)$$

其中

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-jk\Omega_s t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\Omega_s t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

上式考虑了 $|t| \leq T/2$ 的积分区间内, 只有一个冲激脉冲 $\delta(t)$, 且利用了公式 $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt$ 。

因而

$$s(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t} \quad (1-6)$$

对式(1-6)进行傅里叶变换

$$S(j\Omega) = F[s(t)] = F\left(\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\Omega_s t}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(e^{jk\Omega_s t})$$

再使用频移定理

$$F[e^{jk\Omega_s t}] = 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

得到

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) = \Omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \quad (1-7)$$

由式(1-4)得

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) * X_a(j\Omega) \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jk\Omega_s) \end{aligned} \quad (1-8)$$

由式(1-8)可知, 理想采样信号的频谱是模拟信号频谱的周期延拓, 延拓周期为 Ω_s , 幅度受 $1/T$ 加权。 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 是周期信号, 周期为 Ω_s 。 $-\pi/T < \Omega \leq \pi/T$ 为 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的主谱, 其他延拓频谱为镜像谱。

图 1-5 给出了理想采样过程中各信号的频谱。图 1-5(a) 表示一带限的模拟信号 $x_a(t)$ 的频谱, 其最高模拟角频率为 Ω_h 。 $\Omega_h = 2\pi f_h$, f_h 是 $x_a(t)$ 的最高自然频率, 也称 $x_a(t)$ 的频域带宽。图 1-5(b) 表示冲激函数串 $s(t)$ 的频谱。若 $\Omega_h < \Omega_s/2$, 则理想采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 的幅度谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的主谱和镜像谱都不会发生混叠现象, 如图 1-5(c) 所示; 若 $\Omega_h > \Omega_s/2$, 则 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的主谱和镜像谱都发生混叠现象, 如图 1-5(d) 所示; 若 $\Omega_h = \Omega_s/2$, 则 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的主谱和镜像谱处于混叠的临界状态。

如果 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 的主谱和镜像谱都不发生混叠现象, 则可以从 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 无失真地恢复 $X_a(j\Omega)$, 或者说, 无失真地恢复原模拟信号 $x_a(t)$ 。

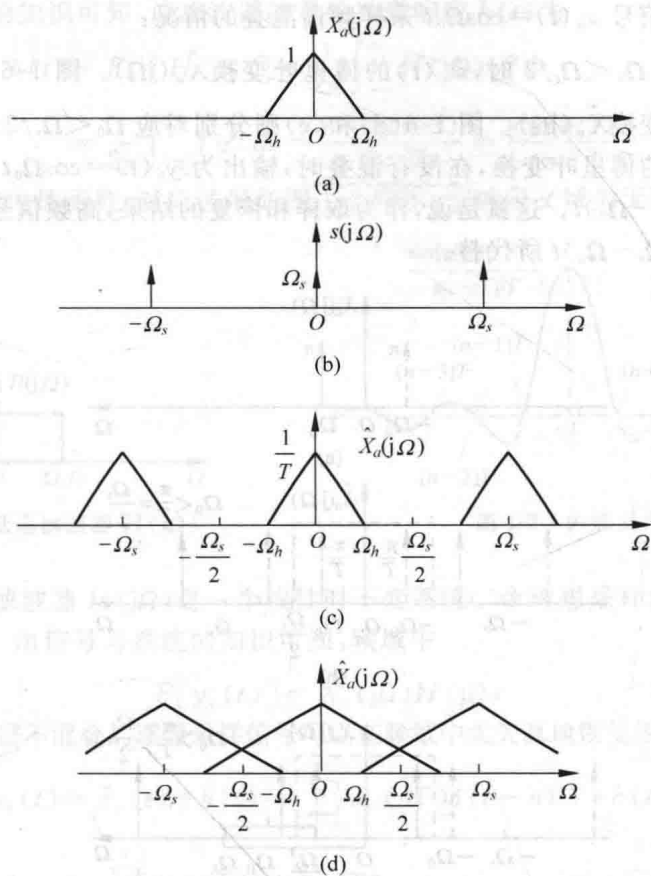


图 1-5 理想采样过程中各信号的频谱

采样定理：又称为奈奎斯特采样定理，如果采样频率 f_s 大于带限信号 $x_a(t)$ 的最高自然频率 f_h 的 2 倍，即 $f_s \geq 2f_h$ ，那么就能从理想采样信号的频谱 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 无失真地恢复原模拟信号 $x_a(t)$ ，将采样频率的一半 $\Omega_s/2$ 称为折叠频率，条件 $f_s > 2f_h$ 还可以表示成 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$ 、 $T \leq \frac{1}{2f_h}$ 。

注意：这种纯粹的带限信号在时域中定义域是无限宽的。而现实中处理的信号时域上是有限宽的，因此理想采样后频谱必然存在混叠现象。若采样频率足够大，远远大于信号带限频率 f_h ，即 $f_s \gg f_h$ ，则可以忽略这种混叠失真。现实中，当 $f_s > 3f_h \sim 5f_h$ 时可以忽略这种失真，或者根据具体应用场合决定采样频率。一些典型的数字信号处理系统如表 1-1 所示。

表 1-1 一些典型的数字信号处理系统

应用系统	上限频率 $f_{\max}$	取样频率 f_s
地质勘探	500Hz	1~2kHz
生物医学	1kHz	2~4kHz
机械振动	2kHz	4~10kHz
语音	4kHz	8~16kHz
音乐	20kHz	40~96kHz
视频	4MHz	8~10MHz

下面讨论余弦信号 $x_a(t) = \cos\Omega_0 t$ 采样频谱混叠的情况：

图 1-6(b)是在 $\Omega_0 < \Omega_s/2$ 时, $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 。图 1-6(c)是在 $\Omega_0 > \Omega_s/2$ 时, $\hat{x}_a(t)$ 的傅里叶变换 $\hat{X}_a(j\Omega)$ 。图 1-6(d)和(e)则分别对应 $\Omega_0 < \Omega_s/2 = \pi/T$ 和 $\Omega_0 > \pi/T$ 时低通滤波器输出的傅里叶变换,在没有混叠时,输出为 $y_a(t) = \cos\Omega_0 t$,在有混叠时,输出则是 $y_a(t) = \cos(\Omega_s - \Omega_0)t$ 。这就是说,作为取样和恢复的结果,高频信号 $y_a(t) = \cos\Omega_0 t$ 已经被低频信号 $\cos(\Omega_s - \Omega_0)t$ 所代替。

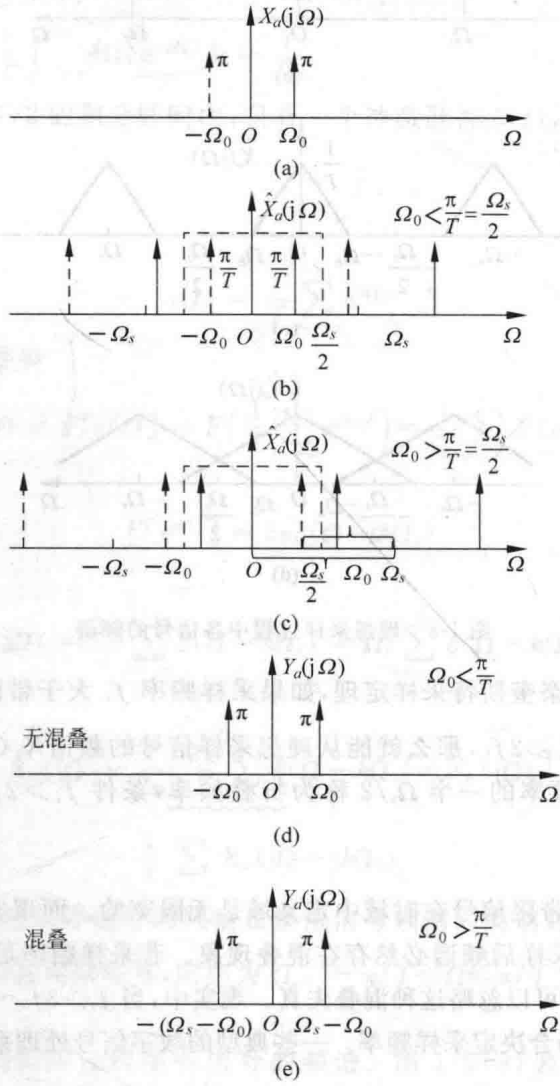


图 1-6 余弦信号采样频谱混叠的情况

1.2.3 重构带限模拟信号

设计截止频率为 $\Omega_s/2$ 的模拟理想低通滤波器 $H(j\Omega)$ 如下

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \Omega_s/2 \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_s/2 \end{cases} \quad (1-9)$$

它的频率特性如图 1-7 所示。