纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第20号

广义多元分析

方开泰　张尧庭　著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第20号

广 义 多 元 分 析

方开泰　张尧庭 著

科 学 出 版 社

1 9 9 3

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了在椭球等高分布的基础上建立的广义多元分析理论．主要讨论了椭球等高分布族的性质、有关的中心分布和非中心分布，球对称矩阵分布和椭球等高矩阵分布的性质，椭球等高分布的各种参数估计量，均值向量和协方差矩阵的各种检验和其他检验，广义线性模型理论．

本书可作为大学教师和研究人员的参考书，也可作为研究生一学期课程的教材．

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1
ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：毕 颖／责任校对：李静科
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1993 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 1 月 印 刷 印张：20
字数：255 000

序

目前，全世界有上百种多元统计方面的书，其中绝大多数论述多元正态分布的理论，也就是所谓的经典多元分析．为了适应理论和实践的需要，我们必须发展一种非正态母体的多元分析．Puri 和 Sen 的《多元分析的非参数方法》一书从非参数的角度论述了多元分析理论．其他一些学者则研究了离散变量的多元分析．在最近的 15 年中，统计学家发现，椭球等高分布族有许多类似于多元正态分布的性质．这种分布族包含许多种的多元分布，特别是包含多元正态分布、多元 t 分布、多元柯西分布、多元拉普拉斯分布、多元稳定律和多元均匀分布，等等．许多数学家在椭球等高分布的基础上建立了与经典多元分析类似的理论和方法，这就是所谓的广义多元分析．

广义多元分析理论的建立与发展是多元分析领域中的一项光辉成就，因而受到许多实际工作者的欢迎与赞扬．本书的目的是总结近 15 年发展起来的广义多元分析理论． 这种理论中所使用的数学工具并没有超出经典多元分析的范围，因此，本书可以用作多元分析课程的教科书，直接向学生介绍这种新的理论，把经典多元分析作为该理论的特例． 本书部分内容曾在 1983 年中国暨南大学的讨论班上由方开泰讲授过，并引起了与会者很大的兴趣，这些内容构成了本书的核心．同时本书也包含了一些新结果．本书第一位作者曾在下列一些大学讲授过这些新结果：美国的斯坦福大学、马里兰大学、乔治华盛顿大学、耶鲁大学、宾夕法尼亚大学、普林斯顿大学、哥伦比亚大学，加拿大的西蒙·伏来佐大学，瑞士联邦苏黎世理工学院、伯恩大学，香港大学，英国的伦敦大学学院、剑桥大学．第二位作者曾在美国的匹兹堡大学讲过本书的部分内容．

第一章介绍了后面几章要用到的矩阵理论的基本知识，详细讨论了矩阵的导数和雅可比行列式，还介绍了极大不变量．第二章叙述广义多元分析的基础，系统地讨论了椭球等高分布族的性质、有关的中心分布和非中心分布．为了发展广义多元分析的抽样理论，在第三章中我们把椭球等高分布的概念从向量情形推广到矩阵情形，其中系统地讨论了球对称矩阵分布和椭球等高矩阵分布的性质．第四章讨论椭球等高分布的各种参数估计量，包括极大似然估计量、极小极大估计量和稳健M估计量等．关于均值向量和协方差矩阵的各种检验和其他检验，则在第五章讨论．最后一章论述广义线性模型理论，包括参数估计(最小二乘估计量和压缩估计量)、假设检验、分布的理论、判别分析以及判别模型和回归模型之间的关系等．

本书的重点是叙述广义多元分析的基本理论．对于非初等而又类似于经典多元分析的那些内容，我们只给出结果或参考文献，读者很容易在其他论述多元分析的书中找到有关的内容．

本书可以用作研究生一学期课程的教材，也可以作为教师和研究人员的参考书．在每章末附有许多练习题．

前三章和最后一章的手稿分别由第一个作者和第二个作者写成．第四、五两章的手稿是陈汉峰在第一作者指导下并经过第二位作者订正而完成的．最后，第一位作者对全部书稿进行了审阅，第二位作者做了全部索引．

我们非常感谢 T. W. Anderson 教授，他指导第一位作者进入了广义多元分析这一重要的方向． 本书的许多结果取自 T. W. Anderson 和第一位作者合作的论文．T. W. Anderson 的著名著作《多元统计分析引论》对我们有很大的帮助．本书有些地方还参考了 R. J. Muirhead 的《多元统计概论》以及 M. S. Srivastava 和 C. G. Khatri 的《多元统计引论》两本书．本书中有些结果是由作者的学生陈汉峰、范剑青、李刚、全辉、吴月华、许建伦和张洪青完成的．

我们还要感谢钟开莱教授，是他首先鼓励我们写这本书的．我

们感谢邓炜材教授和贺霖教授，他们仔细地阅读了手稿并提出了许多宝贵的意见，使本书得到很大的改进。

本书英文版已由科学出版社和德国 Springer 出版社合作出版。中文版由程锦芙、刘嘉善根据英文版翻译，方碧琪校订。

我们非常欢迎读者对本书提出批评和指正。

中国科学院应用数学研究所　方开泰

武汉大学　张尧庭

目　　录

第一章　矩阵理论和不变性

在本章中，我们将介绍本书要用到的矩阵代数的一些重要定义和结果。对于读者已熟悉的一些基本结果，我们只叙述而不证明，仅对那些在矩阵代数书中不常见的结果给出证明。本章的最后一节将定义和讨论一些群的理论并给出本书所需要的在群下的多种极大不变量。

1.1　定　　义

1.1.1　矩阵

定义 1.1.1　按一定顺序排列的实元素 a_{ij} 的矩形阵列叫做 $n\times p$ 实矩阵 A：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{bmatrix}, \tag{1.1.1}$$

记作 $A=(a_{ij})$。

如果 $n=p$，则 A 称为 p **阶方阵**。如果 $p=1$，则 A 是一个列向量；而如果 $n=1$，则 A 是一个行向量。大小相同的两个矩阵 $A(m\times p)$ 和 $B(n\times p)$ 称为**相等的**（记作 $A=B$），如果对于 $i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,p$ 有 $a_{ij}=b_{ij}$。若所有的 $a_{ij}=0$，则 A 称为**零矩阵**，记作 $A=O$。若 $p=n$，而 $a_{ii}=1$，$i=1,\cdots,p$ 且 $a_{ij}=0$，$i\neq j$，则 A 称为 p **阶单位矩阵**，记作 $A=I_p$ 或 $A=I$。$p\times p$ 矩阵的对角元素是 $a_{11},\cdots,a_{pp}$。

$n\times p$ 矩阵 A 的转置是 $p\times n$ 矩阵 A'：

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots\cdots & a_{np} \end{bmatrix}.$$

它是由交换 A 的行与列的位置而得到的. 矩阵 A 可由元素、列和行表示如下:

$$(1.1.2) \qquad A = (a_{ij}) = (a_1, \cdots, a_p) = \begin{bmatrix} a'_{(1)} \\ \vdots \\ a'_{(n)} \end{bmatrix}.$$

设 A 是 p 阶方阵. A 称为**对称的**,如果 $A' = A$. A 称为**斜对称的**,如果 $A = -A'$. 显然,斜对称的所有对角元素都是零.

p 阶方阵 A 称为**对角阵**,如果它的所有非对角元素都是零,记作 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{pp})$. 如果 p 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 中对 $j < i$ 有 $a_{ij} = 0$, 则 A 称为**上三角阵**, 记作 $UT(p)$; 如果对 $j > i$ 有 $a_{ij} = 0$,则 A 称为**下三角阵**,记作 $LT(p)$. p 阶方阵称为正交的,如果 $A'A = AA' = I_p$,记为 $A \in O(p)$.

两个 $n \times p$ 矩阵 A 和 B 的和定义作 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. 两个矩阵 $A(p \times q)$ 和 $B(q \times r)$ 的积是 $p \times r$ 矩阵 C, 定义作 $AB = C$,其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}.$$

矩阵 A 与数量 α 的乘积定义为 $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

能够验证,如上定义的运算有如下的性质(这里, 如果涉及到矩阵的和或积,我们假定它们都是有定义的):

$$\begin{cases} A + B = B + A \\ (A + B) + C = A + (B + C) \\ A + (-1)A = O \\ (c + d)A = cA + dA \\ c(A + B) = cA + cB \\ (AB)' = B'A' \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
(A')' = A \\
(A+B)' = A' + B' \\
A(BC) = (AB)C \\
A(B+C) = AB + AC \\
(A+B)C = AC + BC \\
AI = IA = A
\end{cases}
$$

1.1.2 行列式

定义1.1.2 p 阶方阵 A 的行列式定义为

$$|A| = \sum_{\pi} \varepsilon_{\pi} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{pj_p}, \tag{1.1.3}$$

其中 Σ_{π} 表示对$(1,\cdots,p)$的所有 $p!$个排列 $\pi=(j_1,\cdots,j_p)$求和；$\varepsilon_{\pi}=1$ 或-1 视 π 为偶排列或奇排列而定.

A的子矩阵的行列式称为子式. 去掉A的第 i 行与第 j 列而得到的子矩阵的行列式叫做 a_{ij} 的余子式. 将 a_{ij} 的余子式乘以$(-1)^{i+j}$就得到 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}. 能够证明:

$$|A| = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{p} a_{jk} A_{jk}. \tag{1.1.4}$$

行列式有如下的初等性质:

(1) 对某个 i 或 j,若 $a_i=0$ 或 $a_{(j)}=0$,则$|A|=0$.

(2) $|A|=|A'|$.

(3) $|(a_1,\cdots,a_{i-1},\alpha a_i,a_{i+1},\cdots,a_p)|=\alpha|A|$.

(4) $|\alpha A|=\alpha^p|A|$.

(5) $|AB|=|A||B|$和$|A_1\cdots A_m|=|A_1|\cdots|A_m|$.

(6) 若A是 $p\times p$ 阵,则 $|AA'|=|A'A|\geqslant 0$.

(7) $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$, 其中 $A:p\times p$, $B:q\times q$, $C:p\times q$ 和 $D:q\times p$.

(8) $|I_p+AB|=|I_q+BA|$. 其中 $A:p\times q$和$B:q\times p$.

(9) $|T| = \prod_{i=1}^{p} t_{ii}$,其中 $T = (t_{ij}) \in UT(p)$。

(10) $|H| = \pm 1$,若 $H \in O(p)$。

1.1.3 逆矩阵

定义 1.1.3 如果$|A| \neq 0$,则存在唯一的B使得 $AB = I$。B称为A的逆,记作 A^{-1}。

$B = A^{-1}$的(i,j)元素为 $b_{ij} = A_{ij}/|A|$,其中 A_{ij} 是 a_{ij}的代数余子式。一个方阵称为非异的,如果它的行列式不等于零。下列的性质是初等的:

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I$。

(2) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$。

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$。

(4) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$。

(5) $A^{-1} = A'$,若 $A \in O(p)$。

(6) 若 $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{pp})$,其中 $a_{ii} \neq 0$ $(i=1, \cdots, p)$,则 $A^{-1} = \mathrm{diag}(a_{11}^{-1}, \cdots, a_{pp}^{-1})$。

(7) 若 $A \in UT(p)$,则 $A^{-1} \in UT(p)$ 且其对角元素是 a_{ii}^{-1},$i = 1, \cdots, p$。

1.1.4 矩阵的分块

定义 1.1.4 我们说 $n \times p$ 矩阵 $A = (a_{ij})$分块为子矩阵,如果

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $A_{11} = (a_{ij})$,$i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, q$;$A_{12} = (a_{ij}), i = 1, \cdots, m$,$j = q+1, \cdots, p$;$A_{21} = (a_{ij}), i = m+1, \cdots, n, j = 1, \cdots, q$;$A_{22} = (a_{ij})$,$i = m+1, \cdots, n$,$j = q+1, \cdots, p$。

若大小相同的矩阵 A, B 类似地分块,则