

结构有限元法 及软件应用

Finite Element Method with Application

曾 勇 / 编著



科学出版社

结构有限元法及软件应用

曾 勇 编著



科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书阐述结构有限单元法的基本原理及其应用。全书分为两篇,共九章,内容包括:绪论、有限元分析的通用过程、杆系结构的有限元分析——直接刚度法、杆系结构有限元法——形函数法、薄板弯曲与空间问题的有限元法、动力问题的有限元法简述、ANSYS 基本使用功能、ANSYS 建模过程、ANSYS 建模实例。本书附有 ANSYS 常用菜单的中英文对比、单元类型、单位制等说明。

本书可以作为高等学校土木工程、力学、机械及道路、桥梁与渡河工程等专业有限元法课程的教材,也可以作为研究生的专业拓展书籍,还可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构有限元法及软件应用 / 曾勇编著. — 北京: 科学出版社, 2018.8

ISBN 978-7-03-058529-5

I. ①结… II. ①曾… III. ①土木工程-有限元分析-应用软件
IV. ①TU-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 187821 号

责任编辑: 张 展 刘莉莉 / 责任校对: 陈 杰

责任印制: 罗 科 / 封面设计: 墨创文化

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

四川煤田地质制图印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年8月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2018年8月第一次印刷 印张: 17.25

字数: 340千字

定价: 49.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

国内外大学的土木工程专业大都将有限元法纳入本科教学计划，国内工程界也更广泛地应用有限元通用软件程序分析复杂结构的静动力问题。因此，21 世纪的高校土木工程专业学生有必要学习与掌握有限元方法，以适应新形势下土木工程的技术要求。

本书力求从物理直观入手，由浅及深、循序渐进地介绍结构有限元方法，侧重于力学概念的阐述和工程结构的分析。读者不必先修弹性力学和结构力学，只需在材料力学基础上直接学习有限元分析方法，用以掌握有限元的基本原理和解决实际工程问题。根据土木工程的结构特征与受力特点，考虑本科教学的实际情况，本书删除了空间轴对称单元、壳单元、热应力单元、非线性有限元等与土木工程结构关联相对较小的内容，重点介绍杆系单元、平面问题有限元分析、薄板弯曲和空间问题的有限元分析、结构动力学问题等内容，其中杆系单元分别用直接刚度法与形函数法进行介绍，有助于读者快速而又深刻地理解有限元方法。

本书以结构有限元法的基本原理及软件应用为出发点，较系统地介绍了土木工程结构有限元分析的基本方法、常用的单元类型及其应用软件。全书共分为上下两篇，共九章。

本书可用作土木工程专业的本科生教材，也可供一般工科专业的研究生使用，还可以作为工程技术人员的参考书。

限于作者的理论水平和实践经验，书中难免存在疏漏、不妥、不当甚至错误之处，恳请读者给予批评与指正。读者可以将书中错误发送至编者邮箱 cquczy@126.com，编者不胜感激。

目 录

上篇 结构有限元法基本原理

第一章 绪论	3
1.1 有限元法的历史	4
1.2 有限元法的特点	5
1.3 有限元法的发展和现状	7
1.4 有限元法在土木工程中的应用	9
1.5 材料力学求解和有限元求解进行比较	10
1.5.1 材料力学方法求解直杆拉伸	11
1.5.2 有限元法思想求解直杆拉伸	11
1.6 有限元分析的基本过程	13
1.6.1 结构的离散化	13
1.6.2 选择位移插值函数	13
1.6.3 单元分析	14
1.6.4 整体分析	16
1.6.5 约束处理	17
1.6.6 方程求解	17
1.6.7 计算单元应力	18
1.7 有限元的前后处理	18
1.7.1 前处理	18
1.7.2 后处理	19
第二章 有限元分析的通用过程	20
2.1 弹性力学平面问题的基本方程	20
2.1.1 基本变量	21
2.1.2 平面应力和平面应变问题	22
2.1.3 平衡方程	23
2.1.4 几何方程	24
2.1.5 物理方程	25
2.2 单元的位移插值函数	26
2.2.1 位移插值函数的选取方法	26
2.2.2 位移插值函数的连续性	28
2.3 单元刚度矩阵与等效节点载荷向量	29
2.3.1 单元刚度矩阵的计算	29
2.3.2 单元等效节点载荷计算	33
2.4 整体分析	34

2.4.1	刚度集成法的物理意义	34
2.4.2	刚度矩阵集成的规则	35
2.5	约束条件的处理	36
2.5.1	乘大数法处理边界条件	36
2.5.2	划行划列法	38
2.6	有限元一般分析过程算例	38
2.7	几种典型单元及位移模式	40
第三章	杆系结构的有限元分析——直接刚度法	43
3.1	概况	43
3.2	平面桁架的有限元分析	43
3.2.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	44
3.2.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	45
3.2.3	整体平衡方程和单元杆端力的计算	47
3.3	空间桁架的有限元分析	47
3.3.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	49
3.3.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	49
3.4	平面刚架的有限元分析	51
3.4.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	52
3.4.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	54
3.4.3	利用固端反力求等效节点载荷	55
3.4.4	整体平衡方程和单元杆端力	58
3.5	空间刚架的有限元分析	58
3.5.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	59
3.5.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	62
3.5.3	等效节点载荷向量与单元杆端力	65
第四章	杆系结构有限元法——形函数法	66
4.1	杆单元、平面桁架有限元法	66
4.1.1	局部坐标系下单元刚度矩阵	66
4.1.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	68
4.1.3	刚度矩阵的构成	70
4.1.4	约束处理及方程求解	73
4.1.5	求杆中的内力、应力及支座反力	76
4.2	平面梁单元	77
4.2.1	梁单元的单元刚度矩阵	78
4.2.2	单元组集与求解	81
4.2.3	梁的等效外载	82
4.2.4	连续梁	83
4.2.5	铰连接的梁单元	85
4.2.6	考虑剪切变形的梁单元	88
4.3	平面刚架有限元	91
4.3.1	局部坐标系下单元刚度矩阵	91

4.3.2	整体坐标系下单元刚度矩阵	92
4.3.3	平面刚架有限元算例	93
4.3.4	有分布外载时的平面刚架	94
4.4	空间桁架	95
4.4.1	空间桁架的转换矩阵	95
4.4.2	整体坐标系下的单元刚度矩阵	96
4.4.3	空间桁架的例子	97
4.5	空间刚架	98
4.5.1	局部坐标系下的单元刚度矩阵	98
4.5.2	局部坐标系与整体坐标系间的转换矩阵	100
4.5.3	整体坐标系下的单元刚度矩阵	103
第五章	薄板弯曲与空间问题的有限元法	108
5.1	薄板弯曲问题有限单元法	108
5.1.1	薄板弯曲	108
5.1.2	矩形薄板单元	112
5.1.3	三角形薄板单元	115
5.2	空间问题的有限单元法	116
5.2.1	引言	116
5.2.2	四面体单元	118
5.2.3	正六面体单元	123
5.2.4	等参单元	125
第六章	动力问题的有限元法简述	128
6.1	结构的振动方程	128
6.2	一致质量矩阵与集中质量矩阵	130
6.3	阻尼矩阵	133
6.4	结构的自振特性和特征值问题	134
6.5	特征值和特征向量的性质	135
6.6	用逐步积分法求结构动力响应	137
6.6.1	概述	137
6.6.2	Wilson- θ 法	138
6.6.3	算例	140

下篇 有限元软件应用

第七章	ANSYS 基本使用功能	145
7.1	ANSYS 界面介绍	145
7.2	常用术语	150
7.3	坐标系	151
7.3.1	坐标系的类型	151
7.3.2	总体和局部坐标系	152
7.3.3	显示坐标系	153
7.3.4	节点坐标系	154

7.3.5 单元坐标系	154
7.3.6 结果坐标系	155
7.4 工作平面	155
第八章 ANSYS 建模过程	158
8.1 ANSYS 建模方案规划	158
8.1.1 规划的重要性	158
8.1.2 确定分析目标	158
8.1.3 选择模型类型(二维、三维等)	158
8.1.4 确定合适的网格密度	159
8.2 典型的 ANSYS 静力分析步骤	160
8.2.1 指定作业名和分析标题	160
8.2.2 定义单元的类型	161
8.2.3 定义单元实常数	161
8.2.4 定义材料特性	162
8.2.5 创建几何模型	163
8.2.6 加载和求解	163
8.2.7 检查分析结果	164
8.3 定义节点	164
8.3.1 节点的生成	165
8.3.2 从已有节点生成另外的节点	165
8.3.3 查看和删除节点	165
8.3.4 节点的其他操作	166
8.4 定义单元	167
8.4.1 组集单元表	167
8.4.2 指向单元表中的项	167
8.4.3 查看单元表的内容	167
8.4.4 查看和删除单元	168
8.4.5 从已有单元生成另外的单元	169
8.4.6 读写包含单元数据的文本文件	169
8.4.7 修改单元属性	169
8.5 常见的单元	170
8.5.1 三维杆单元 LINK180	170
8.5.2 二维梁单元 BEAM3	171
8.5.3 三维梁单元 BEAM188	173
8.5.4 三维壳单元 SHELL63	174
8.6 选择和元件	175
8.6.1 选择	175
8.6.2 打组	177
8.7 网格划分	177
8.7.1 网格类型	177
8.7.2 网格划分控制	179

8.8 添加约束与荷载	183
8.9 APDL 基础	185
8.9.1 定义参数	186
8.9.2 宏基础	186
8.9.3 一些常见的命令	187
第九章 ANSYS 建模实例	192
9.1 平面杆系结构 ANSYS 求解实例	192
9.2 三杆轴力计算的有限元分析	194
9.3 平面梁结构的内力计算	196
9.3.1 基于欧拉梁理论的求解过程	197
9.3.2 基于 Timoshenko 梁理论的求解过程	206
9.4 基于图形界面的桁架桥梁结构分析	215
9.5 悬臂梁的建模	218
9.6 坝体的有限元建模与应力应变分析	224
9.7 三维实体结构的有限元分析	226
9.7.1 问题描述	226
9.7.2 实训步骤	226
参考文献	234
附录 1 ANSYS 常用菜单的中英文对比	236
附录 2 ANSYS 单元类型	258
附录 3 ANSYS 的单位制	265



结构有限元法基本原理

第一章 绪 论

对于许多工程问题，我们虽然已经得到了它们的基本方程和边界条件及初始条件，但是能用解析方法求解的只是少数方程简单、边界规则的问题，而绝大多数只能通过其他途径解决。随着计算机硬件和软件的发展，数值方法越来越受到人们的青睐，其中有限元法以其方法的统一性和理论的普遍性而优点突出，已经成为处理各类科学和工程问题的有效方法之一。亦有众多的有限元商用软件流行，如 ANSYS、NASTRAN、ADINA、ABAQUS 等，它们包含众多单元类型，能求解各类问题。

有限元方法 (finite element method) 是求取复杂微分方程近似解的一种非常有效的工具，是现代数字化科技的一种重要基础性原理。将它应用于科学研究中，可成为探究物质客观规律的先进手段；将它应用于工程技术中，可成为工程设计和分析的可靠工具。有限元法是一种结构分析方法，其基本思想是将连续的求解区域离散为一组由有限个单元组成的并按一定方式相互连接在一起的单元组合体来加以分析。分析假想将物体划分为小的单元，然后对各个单元进行分析，最后再将单元分析结果组合起来，得到整个对象的分析结果。有限元法的一个重要特点是利用每一个单元内的近似函数来分片地表示全求解域上的待求未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场函数或其导数在单元的各个节点的数值及其插值来表示。这样一来，在一个问题的有限元分析中，未知场函数或其导数在各个节点上的数值就成为新的未知量，使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一旦求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域的近似值。

严格来说，有限元分析必须包含三个方面：①有限元方法的基本数学力学原理；②基于原理所形成的实用软件；③使用时的计算机硬件。随着现代计算机技术的发展，一般的个人计算机硬件的发展和有限元软件的普及与软件的成熟普及就能满足第②与③方面的要求。因此，本书的重点将在以上的第①方面，将通过一些典型的实例来深入浅出地系统阐述有限元分析的基本原理，并强调原理的工程背景和物理概念；介绍有限元原理的编程方法和过程；通过 ANSYS 分析平台来展示具体应用有限元方法的建模过程。

1.1 有限元法的历史

有限元法的思想最早可以追溯到古人的“化整为零”“化圆为直”的做法，其实这个思想很早就在各个领域被人们采用，如“曹冲称象”的典故，以及我国古代数学家刘徽采用割圆法来对圆周长进行计算(图 1.1)。老子说“道生一，一生二，二生三，三生万物”，他将世间万物全部分解成最基本的“道”。这些实际上都体现了离散逼近的思想，即采用大量的简单小物体来“充填”出复杂的大物体。有限元法把一个复杂的结构分解成相对简单的“单元”，各单元之间通过节点相互连接。单元内的物理量由单元节点上的物理量按一定的假设内插得到，这样就把一个复杂结构从无限多个自由度简化为有限个单元组成的结构。我们只要分析每个单元的力学特性，然后按照有限元法的规则把这些单元“拼装”成整体，就能够得到整体结构的力学特性。可见，有限元“化整为零”的思想十分简单明了。但更重要的是，有限元可以建立在严格的数学基础上，成为求解微分方程的标准方法之一，从而它不仅能够解决结构分析问题，也能解决工程中如电磁场、流体力学、热传导、渗流等领域的诸多问题。

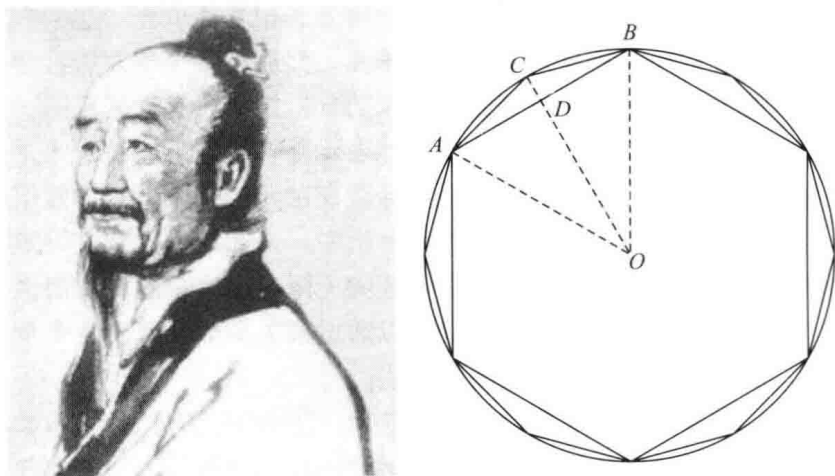


图 1.1 刘徽及其割圆法

早在 1870 年，英国科学家 Rayleigh 就采用假想的“试函数”来求解复杂的微分方程；1909 年，Ritz 将其发展成为完善的数值近似方法，为现代有限元方法打下坚实基础；20 世纪 40 年代，由于航空事业的飞速发展，设计师需要对飞机结构进行精确的设计和计算，便逐渐在工程中产生了矩阵力学分析方法；1943 年，Courant 发表了第一篇使用三角形区域的多项式函数来求解扭转问题的论文；1956 年，波音公司的 Turner、Clough、Martin 和 Topp 在分析飞机结构时系统研究了离散杆、梁、三角形的单元刚度表达式；1960 年，Clough 在处理平面弹性问题时，

第一次提出并使用“有限元方法”(finite element method)的名称;1955年,德国的 Argyris 出版了第一本关于结构分析中能量原理和矩阵方法的书,为后续的有限元研究奠定了重要的基础;1967年, Zienkiewicz 和 Cheung 出版了第一本有关有限元分析的专著;1970年以后,有限元方法开始应用于处理非线性和大变形问题。我国的一些学者也在有限元领域做出了重要的贡献,如胡海昌于1954年提出了广义变分原理;钱伟长最先研究了拉格朗日乘子法与广义变分原理之间的关系;钱令希在20世纪50年代就研究了力学分析的余能原理;冯康在20世纪60年代就独立地、并先于西方奠定了有限元分析收敛性的理论基础。

随着计算机技术的飞速发展,基于有限元方法原理的软件大量出现,并在实际工程中发挥了越来越重要的作用。目前,著名的专业有限元分析软件公司有几十家,国际上著名的通用有限元分析软件有 ANSYS、ABAQUS、MSC/NASTRAN、MSC/MARC、ADINA、ALGOR、PRO/MECHANICA、IDEAS。还有一些专门的有限元分析软件,如 LS-DYNA、DEFORM、PAM-STAMP、AUTOFORM、SUPER-FORGE 等。在我国,有限元软件发展也很快,已引进的主要程序有: SAP5、SAP7、SAP84、Super SAP、ADINA、ANSYS、MSC/NASTRAN、ASKA 等。大部分程序具备前后处理功能,不仅提高了解题速度,还极大地方便了使用者,对有限元法的普及与应用起到很大的促进作用。图 1.2 展示了有限元方法的发展过程。

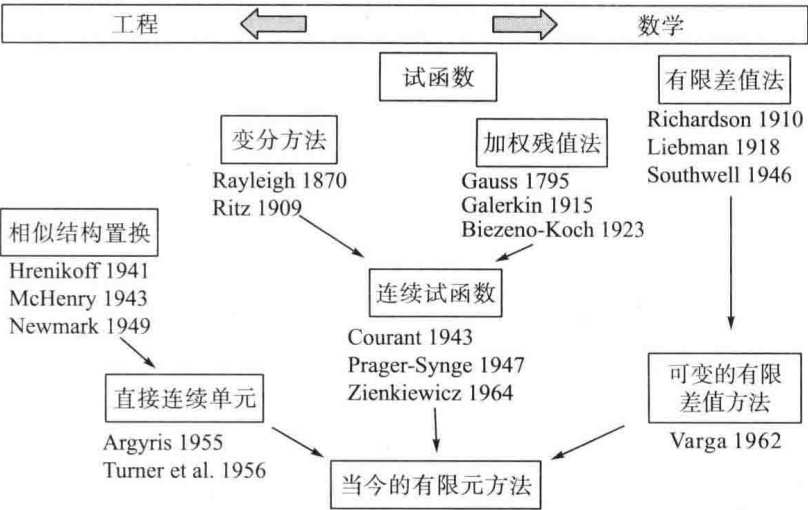


图 1.2 有限元方法的发展过程

1.2 有限元法的特点

有限单元法与有限差分法、古典变分法虽然都是近似解法,但近似的本质是不同的。众所周知,微分方程式能正确反映所需分析的连续体的规律,差分法只

是在数学上将微分方程用差分方程代替,而后进行数值运算,因此差分法可看成是数学上的近似。有限单元法则是在力学模型上做了近似(或者说是做了物理上的近似),它得到的结果是模型化了的结构的数值精确解。由于有限单元的分割和节点的配置比较灵活,即使边界较复杂,也可使边界节点落在实际边界上,因而可给出边界的较好的逼近,且可以在应力集中区域配置较多的节点,以提高解的精度。这都是差分法所不能做到的。有限单元法与古典变分法也有不同。古典变分法是用整体构造的逼近函数(含有若干个待定系数)去计算能量泛函,由能量泛函极小条件导出的是求解待定系数的变分方程。而有限单元法是用分块(单元)构造单元的逼近函数(含有若干个节点基本未知量),去计算每个单元的能量泛函,而后通过集合得到整体结构的能量泛函,由能量泛函极小条件导出的是求解节点基本未知量的代数方程。鉴于分单元构造逼近函数远比整体构造逼近函数方便,有限单元法的实用性便大大超过了古典变分法。

有限元法概念浅显,容易掌握,可以在不同的水平上建立起对该法的理解,即可以通过非常直观的物理解释理解,也可以建立基于严格的数学分析的理论。它不仅对结构物的复杂几何形状有很强的适应性,也能应用于结构物的各种物理问题。因而,有限元法已经被公认为是工程分析的有效工具,受到普遍重视。有限元法具有以下特点:

(1)物理概念清晰,容易掌握。有限元法一开始就从力学角度进行简化,可以通过非常直观的物理途径来学习并掌握这一方法。

(2)普通有限元法最后得到的大型联立方程组的系数是一个稀疏矩阵,其中所有元素都分布在矩阵的主对角线附近,且是对称的正定矩阵,方程间的联系较弱。这种方程计算工作量小,稳定性好,便于求解,占用的计算机内存也少。

(3)建立于严格理论基础上的可靠性。由于用于建立有限元方程的变分原理或加权余量法在数学上证明是微分方程和边界条件的等效积分形式,只要原问题的数学模型是正确的,同时用来求解有限元方程的算法是稳定的、可靠的,则随着单元数目的增加,即单元尺寸的缩小,或者随着单元自由度数目的增加及插值函数阶次的提高,有限元解的近似程度将不断地被改进。如果单元是满足收敛准则的,则近似解最后收敛于原函数数学模型的精确解。

(4)有限元法具有极大的通用性和灵活性。对于各种复杂的因素(如复杂的几何形状、任意的边界条件、不均匀的材料特性、不同类型构件的组合等),有限元法都能灵活地加以考虑,而不会发生处理、求解上的困难。由于单元在空间上可以是一维、二维、三维的,而且每一种单元可以有不同的形状(如三维单元可以是四面体、五面体或六面体),各种单元之间可以采用不同的连接方式(如两个面之间可以是场函数保持连续,可以是场函数的导数保持连续,还可以仅是场函数的法向分量保持连续),因此可对计算区域做任意形状的划分,能处理复杂边界,具有很强的适应能力。这样一来,工程实际中遇到的非常复杂的结构,都可以离散为单元

组合体表示的有限元模型。例如,它不仅能成功地处理如应力分析中的非均质材料、各向异性材料、非线性应力-应变关系及复杂边界条件等难题,而且随着其理论基础和方法的逐步改进和完善,还能够成功地应用于求解热传导、流体力学以及电磁场领域的许多问题。现在,它几乎适用于求解所有的连续介质及场问题。

(5) 对于各种物理问题具有广泛的应用性。由于用单元内近似函数分片地表示全求解域的未知场函数,并未限制场函数所满足的方程形式,也未限制各个单元所对应的方程必须是相同的形式,所以尽管有限元法开始是针对线弹性的问题提出的,但其很快就发展到弹塑性问题、黏弹塑性问题、动力问题、屈服问题等,并进一步应用于流体力学问题、热传导问题等,而且可以利用有限元法对不同物理现象耦合的问题进行有效的分析。

(6) 不受物体几何形状和结构的限制。物体的几何形状可以用大大小小的多种单元进行拼装,所以有限元法可以分析包括各种特殊结构的复杂结构体。单元之间材料性质可以有跳跃性的变化,所以能处理许多物体内部带有间断性的复杂问题,以适应不连续的边界条件和载荷条件。

(7) 适合计算机的高效计算。由于有限元分析的各个步骤可以表达成规范化的矩阵形式,因此求解方程可以统一为标准的矩阵代数问题,特别适合计算机的编程和执行。随着计算机软硬件技术的高速发展,以及新的数值计算方法的不断出现,大型复杂问题的有限元分析已成为工程技术领域的常规工作。有限元法的这些特点,正好可以克服工程科学计算中所遇到的许多困难。对于已有方程的物理问题,主要是因为几何形状复杂、边界条件复杂、本构关系复杂而无法求解,而利用有限元离散化的手段,用各种小单元来适应这些复杂多变的情况,用分块近似插值函数来逼近全域上的连续函数,问题就迎刃而解。

1.3 有限元法的发展和现状

总之,有限元法已被公认为应力分析的有效工具而受到普遍的重视和广泛应用。有限元法随着所取未知量的不同,有位移法、力法和混合法。本书只讨论最为普遍的位移法。近几十年来,伴随着计算机科学和技术的快速发展,有限元法作为工程分析的有效方法,在理论与方法的研究、计算机程序的开发以及应用领域的开拓诸方面均取得了根本性的发展。

1. 单元的类型和形式

为了扩大有限元法的应用领域,新的单元类型和形式不断涌现。例如等参单元采用和位移插值相同的表示方法,将形状规则的单元变换成边界为曲线或曲面的单元,从而可以更精确地对形状复杂的求解域进行有限元离散。再如在构造节

点参数中同时包含位移和位移导数的梁、板、壳单元,以满足工程实际问题中大量遇到该类结构的需求。构造包括多种材料构成的复合单元,用来分析复合材料、夹板材料、混凝土等组成结构。

2. 有限元法的理论基础和离散格式

在提出新的单元类型、扩展新的应用领域和应用条件的同时,为了给新单元和新应用提供可靠的理论基础,研究工作的进展包括将 Hellinger-Reissner 原理、Hu-Washizu 原理等多场变量的变分原理用于有限元分析,发展了混合型、杂交型的有限元表达格式,并研究了各自的收敛条件;将与微分方程等效的积分形式——加权余量法,用于建立有限元的表达格式,从而将有限元的应用扩展到不存在泛函或泛函尚未建立的物理问题;有限元解的后验误差估计和应力磨平方法的研究进展,不仅改进了有限元解的精度,更重要的是为发展满足规定精度的要求,以细分单元网格或提高插值函数阶次为手段的自适应分析方法提供了基础。

3. 有限元方程的解法

现在用于大型复杂工程问题的有限元分析,其自由度达几十万个甚至上百万个已是经常的情况,这与计算机软、硬件发展相配合的大型方程组解法的研究进展密不可分。有限元求解的问题从性质上可以归结为三类,即:

(1) 独立于时间的平衡问题(或静态问题)。最后归结为求解系数矩阵元素在对角线附近稀疏分布的线性代数方程组。对于常见的结构应力分析问题,求解的是对应给定载荷的结构位移和应力。

此类问题至今主要采用直接解法,先后发展了顺序消去法、三角分解法、波前法等。近年来,为了适应求解大型、特大型方程时减少计算机存储和提高计算速度的需要,迭代解法特别是预条件共轭梯度法受到更多的重视,并已成功地应用。

(2) 特征值问题。特征值问题求解的是齐次微分方程,解答是使方程存在非零解的特征值和与之对应的特征模态。在实际应用中,它们代表的可能是振动的固有频率和振型,或是结构屈曲的临界载荷和屈曲模态等。针对求解大型矩阵特征值问题,先后发展了幂迭代法、同步迭代法、子空间迭代法等。近十多年来,里茨(Ritz)向量直接叠加法和 Laczos 向量直接叠加法由于具有更高的计算效率而受到广泛的重视和应用。

(3) 依赖于时间的瞬态问题。由于这类问题的方程是节点自由度对于时间的一阶、二阶导数的常微分方程组,求解的是在随时间变化的载荷作用下的结构内位移和应力的动态响应,或是波动在介质中的传播、反射等,所以此类问题的求解