铁路运输系统复杂性研究
——基于复杂网络理论与方法

孟学雷　贾利民　秦　勇　王　莉　著

科　学　出　版　社

铁路运输系统复杂性研究
——基于复杂网络理论与方法

孟学雷　贾利民　秦　勇　王　莉　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统阐述了复杂网络理论在铁路运输组织中的应用，反映了作者在该研究领域开创性的工作，是一本全面介绍铁路运输组织与复杂网络理论研究相融合的交叉学科的学术专著。本书研究的主要内容如下：图与网络；复杂网络与铁路运输系统；列车服务网络构建与鲁棒特性分析；列车服务网络脆弱性；列车服务网络可控性；列车服务网络优化；列车服务网络映射；基于复杂网络的旅客列车开行方案评价；列车运行图稳定性优化；列车运行图稳定性评估；列车运行仿真与列车运行图稳定性优化；列车流混沌特性分析。

本书结构严谨，理论与应用结合密切，便于读者自学。本书适合从事铁路运输组织工作和研究的科研人员及相关专业的高等院校师生参考。

图书在版编目（CIP）数据

铁路运输系统复杂性研究：基于复杂网络理论与方法/孟学雷等著. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055328-7

Ⅰ. ①铁… Ⅱ. ①孟… Ⅲ. ①铁路运输–交通运输系统–系统复杂性–研究 Ⅳ. ①U2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 280182 号

责任编辑：李 萍 赵鹏利 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：张 伟 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 1 月第一次印刷 印张：14 1/2
字数：292 000

定价：95.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

铁路作为服务于社会的一种公共运输形式，其始终不变的目的是安全、迅速、可靠、准确和经济地运送旅客和货物。随着我国铁路路网运营里程的不断增加，对铁路运输也提出了“更高、更快、更多”的要求。然而，随着铁路尤其是高速铁路运营里程不断增长，我国铁路线路网络拓扑结构也在发生不断的变化。新的路网逐渐形成，为路网列车运行组织工作提供了条件，同时也使列车运行组织工作变得更加复杂，着眼于路网的列车运行组织问题亟待研究。

铁路线路网络，尤其是在此基础上建立的运营与服务网络，逐渐显示出其复杂特性。旅客列车开行方案作为铁路运输组织中一个起着承上启下作用的策略层技术文件，可直观地表示为列车服务网络。利用现有的复杂网络理论，对该网络的鲁棒性、脆弱性、可控性进行深入研究，并建立相关的基于复杂网络的优化模型，将优化后的列车服务网络再映射为列车开行方案，是一种切实可行的方法。另外，对列车开行方案的进一步细化，即为铁路运输组织中运营层的关键技术文件——增加时间维度的运行图。显而易见，增加了时间维度的运行图也具有复杂特性，其研究的难度要远大于对于列车服务网络复杂性的研究。本书致力于研究上述两个方面的问题，将复杂网络理论运用于铁路运输组织方案优化中，希望起到抛砖引玉的作用。

本书的撰写分工如下：北京交通大学贾利民教授撰写第 1、4 章，兰州交通大学孟学雷副教授撰写第 2、6～9 章，北京交通大学王莉老师撰写第 3、5 和 12 章，北京交通大学秦勇教授撰写第 10、11 章，全书由孟学雷策划统筹，并审阅统稿。

本书由国家重点研发计划课题“重载铁路运营与安全综合保障系统集成与应用示范验证”（课题编号：2016YFB1200105）[所属项目“基于空天车地信息协同的轨道交通运营与安全综合保障技术”（项目编号：2016YFB1200100）]资助出版，在此表示感谢。同时，本书的出版也得到了兰州交通大学交通运输学院、北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室和交通运输学院的大力支持，在此一并致谢。

在本书撰写过程中，作者查阅了大量的参考文献，在叙述上力求概念明确、思路清晰，运用熟悉的实例来阐明复杂的理论与方法，尽可能使各类读者对复杂网络理论在铁路运输组织中的应用有清楚的了解和认识。由于作者知识水平和研究的深度与广度有限，书中所提到的观点、方法和理论难免有不足之处，敬请读者指教。

作　者

2017 年 7 月

目　　录

第 1 章　图 与 网 络

1.1　图论的基本概念

网络是包含大量个体以及个体之间相互作用的系统。如果把个体视为网络的节点，把个体间的相互作用视为网络节点与节点之间的连接，那么任意复杂系统都可以表示为图的形式。

节点是图最基本、最重要的组成元素。根据所研究网络的不同，图中节点具有的含义也不同。例如，在 Internet 中，节点是路由器（或者是子网络），它们之间是通过某种物理方式连接起来的；万维网是由文本文档（如网页）组成的复杂网络，节点是网页，它们之间的连接方式是超链接；在社会网络中，节点可以是个体、组织，甚至是国家，在这个网络中，节点之间是通过社会关系进行连接的；在科学学术合作网络中，节点是科学家，如果两位科学家有合作（如合作写论文等），那么他们之间就可以看成是一种连接。

图是图论研究的对象，是网络的一种基本表示方法。图是对系统中基本单元（节点）集合，以及每两个基本单元之间关系（边）集合之间关系的描述。图可以定义为一个三元组 $G=(V, E, \varphi)$，其中，集合 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_N\}$ 称为节点集，集合 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_M\}$ 称为边集，φ 是边集 E 到节点集 V 的一个映射，称为关联函数。V 中的元素 v_i 称为节点或顶点（node 或 vertex），E 中的元素 e_m 称为边、弧或连线（edge、arc 或 line），E 中的每条边 e_m 都有 V 的一对节点 (v_i, v_j) 与之对应。例如，在某一领域的研究学者构成的网络中，网络中的每个人都是一个节点，根据其是否合作发表过文章确定他们之间是否存在连接边。所有人的集合就代表非空集合 V，所有参与者彼此之间的合作情况代表集合 E，并存在一种映射 φ 连接这两个不同集合。在实际描述中，人们通常将 G 简单地表示为二元组 $G=(V, E)$，其中，E 包含了上面提到的 E 和 φ，即这里 E 中描述的是已经包含连接关系的节点对的集合。

值得注意的是，有些图可能包含不同类型的节点和不同权重的边。在上述的科学学术合作网络中，每个人都有国籍、地区、年龄、性别等不同属性，而不同属性可以用不同类型的节点表示。如果按照性别不同来构建图，则可构建具有两种节点的科学学术网络；如果将两个人的合作程度表示为权重，则可构建具有多种权重的科学学术合作网络。

下面简单介绍不同类型的图的定义。如果图中任意的节点对 (v_i, v_j) 和 (v_j, v_i)

对应同一条边，则该图称为无向图（undirected graph），否则称为有向图（directed graph），这时 (v_i,v_j) 表示方向从 v_i 到 v_j 的弧。如果给每条边都赋予相应的权值，则该网络称为加权图（weighted graph），否则称为无权图（unweighted graph），显然，无权图也可以视为每条边的权值均为 1 的等权图。V 中的元素个数记为 $N=|V|$，E 中的元素个数记为 $M=|E|$，它们分别称图的阶（order）和边数（size）。阶和边数都有限的图称为有限图（finite graph）。边所连接的节点也称端点（end-vertices），两端点相同的边称为自环（self-loop）。有公共起点并且有公共终点的两条边称为平行边（parallel edges）或重边（multi-edge）。只有节点没有边的图称为零图（null graph）或无边图（edgeless graph），只有一个节点的零图称为平凡图（trivial graph），无边无节点的图称为空图（empty graph）。从同一个节点伸向其他不同节点的边称为邻边（adjacent edges），同一条边的两个端点互称为邻点（adjacent nodes），一条边上的节点和该条边称为关联（incident）。不存在重边和自环的图称为简单图（simple graph），存在重边或者自环的图称为复杂图（complex graph），所有节点对(对于有向图是指起点终点对)之间均有一条边连接的简单图称为完全图（complete graph）。显然，N 阶无向完全图有 $N(N-1)/2$ 条边，而 N 阶有向完全图有 $N(N-1)$条弧。

1.2 图的矩阵表示

图可以用集合来定义，也可以用矩阵来表示，图中节点与边之间的关联关系、节点与节点之间的相邻或邻接关系、节点之间的连通或可达关系都可以用矩阵来描述。通过图的矩阵表示可以很清楚地观察到图的性质，且便于用计算机处理图数据。图的矩阵表示架起了图论与矩阵之间的桥梁，通过这种表示方法就能借助于矩阵的理论和分析方法来研究图论中的问题。

1.2.1 邻接矩阵

一个网络不仅可用图来表示，也可用邻接矩阵（adjacency matrix）来全面刻画网络中节点之间的相连关系。人们通常用一个一维数组存放网络中所有节点数据，用一个二维数组存放节点连接关系（边或弧）的数据，这个二维数组称为邻接矩阵。邻接矩阵描述了节点与节点之间的邻接关系，通常会用一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 来表示，方阵中的元素用 a_{ij} 来表示。用邻接矩阵表示图，很容易确定图中任意两个节点是否有边相连。邻接矩阵又分为有向图邻接矩阵和无向图邻接矩阵。设 $G=(V,E)$ 是一个图，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_N\}$ 中有 N 个节点，则 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个 N 阶方阵。无向简单图的邻接矩阵是对称的且对角线元素均为零，故仅需要存

储上三角或下三角的数据即可，即只需 $N(N-1)/2$ 个存储单元。因有向图的边是有向边(称为弧)，邻接矩阵未必对称，故需要 N^2 个存储单元。

一个无权简单图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_{N\times N}$ 可以定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & (v_i,v_j)\in E\\ 0, & (v_i,v_j)\notin E\end{cases} \tag{1-1}$$

注意：若不是简单图，a_{ij} 应该定义为 v_i 和 v_j 之间直接相连的边数（无向图）或从 v_i 到 v_j 直接相连的弧数（有向图）。对于一个 N 阶简单无向图 G，其邻接矩阵具有以下性质。

（1）$\boldsymbol{A}$ 是一个主对角线上的元素皆为 0、其余元素为 0 或 1 的对角矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的任何一行(列)的元素之和都等于其相应节点的度。

（2）若记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^2=\{c_{ij}\}_{N\times N}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的主对角线上的元素为

$$c_{ii}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}a_{ji}=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}^2=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}=k_i \tag{1-2}$$

可见对角线元素 c_{ii} 恰好为相应节点 v_i 的度 k_i。

（3）对于任意非负整数 k，$\boldsymbol{A}^k$ 中第 i 行、第 j 列元素表示图 G 中连接节点 v_i 和 v_j 的长度为 k 的路径的数目。

对于一个 N 阶简单有向图 G，其邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有如下性质。

（1）第 i 行元素之和为节点 v_i 的出度 k_i^{out}（以节点 v_i 为起点的邻边数）。

（2）若记 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}=\{c_{ij}\}_{N\times N}$，其中，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{N}a_{il}a_{il} \tag{1-3}$$

表示图 G 中某种节点个数，这种节点的邻边中有两条邻边分别以 v_i 和 v_j 为起点。

（3）若记 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}=\{f_{ij}\}_{N\times N}$，则

$$f_{ij}=\sum_{l=1}^{N}a_{li}a_{lj} \tag{1-4}$$

表示图 G 中某种节点个数，这种节点的邻边中有两条邻边分别以 v_i 和 v_j 为终点。

一个加权简单图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}=\{a_{ij}\}_{N\times N}$ 可以定义为

$$a_{ij}=\begin{cases}\omega_{ij}, & (v_i,v_j)\in E\\ 0或\infty, & (v_i,v_j)\notin E\end{cases} \tag{1-5}$$

其中，ω_{ij} 表示边 $e_{ij}=(v_i,v_j)$ 上的权值（即边权），在相似权含义下，两节点无连接，权值为 0；而在相异权含义下，两节点无连接，权值取 ∞，它表示一个计算

机允许的大于所有边上权值的数。

在邻接矩阵的所有 N^2 个元素中，只有 M 个为非零元素。如果网络化比较稀疏，将浪费大量的存储空间，从而增加在网络中查找边的时间。

1.2.2 关联矩阵

上面的邻接矩阵是用节点之间的连接关系来表示网络的，实际上也可以用节点和边的关联关系来表示一个网络，这就是关联矩阵（incidence matrix）的概念。图 G 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个 $N\times M$ 阶矩阵。对于无向网络 $\boldsymbol{B}=\{b_{ij}\}_{N\times M}$ 的定义如下：

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\in V\text{与}e_i\in E\text{关联}\\ 0, & v_i\in V\text{与}e_i\in E\text{不关联}\end{cases} \tag{1-6}$$

也就是说，在无向网络关联矩阵中，每行对应于图的一个节点，每列对应于图的一条边，如果一个节点与某条边关联，则关联矩阵中对应的元素为 1；否则，关联矩阵中对应的元素为 0。

无向图的关联矩阵具有以下特性。

（1）关联矩阵中每列元素之和为 2，即 G 中每条边都有唯一的两个端点。

（2）关联矩阵中第 i 行中 1 的个数等于节点 v_i 的度 k_i。

（3）关联矩阵中第 i 行中 1 对应的边组成的集合为节点 v_i 的关联集。

（4）关联矩阵中，若两列相同，则它们对应的边为平行边。

（5）若图 G 有 $\omega(\omega>2)$ 个连通分支，则 G 的关联矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有如下形式：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_\omega\end{bmatrix} \tag{1-7}$$

其中，$\boldsymbol{B}_r$ 为第 $r(r=1,2,\cdots,\omega)$ 个连通分支的关联矩阵。

对于有向网络，$\boldsymbol{B}$ 的定义如下：

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\in V\text{作为起点与}e_j\in E\text{关联}\\ -1, & v_i\in V\text{作为终点与}e_j\in E\text{关联}\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{1-8}$$

也就是说，在有向网络关联矩阵中，如果一个节点是一条弧的起点，则关联矩阵中对应的元素为 1；如果一个节点是一条弧的终点，则关联矩阵中对应的元素为–1；如果一个节点与一条弧不关联，则关联矩阵中对应的元素为 0。对于有向简单图，关联矩阵每列只含有两个非零元（一个 + 1，一个–1）。可以看出，这

种表示法非常简单直接。但是，在关联矩阵的 $N \times M$ 个元素中，只有 M (无向)或 $2M$ (有向)个为非零元素。如果网络比较稀疏，这种表示法也会浪费大量的存储空间。但由于关联矩阵有许多特别重要的理论性质，因此它在网络优化中是非常重要的概念。

有向图的关联矩阵具有以下性质。

（1）关联矩阵的每列元素之和为 0，即图中每条边关联两个节点，一个为起点，一个为终点。

（2）第 i 行元素绝对值之和等于节点 v_i 的度 k_i，第 i 行中 1 的个数等于节点 v_i 的出度 k_i^{out}，第 i 行中−1 的个数等于节点 v_i 的入度 k_i^{in}。

（3）关联矩阵中所有元素之和为零，1 的个数与−1 的个数相同且都为 M。这也说明了关联矩阵中各节点入度之和等于各节点出度之和且都为 M，节点度总和为 $2M$。

（4）若关联矩阵中两列相同，说明两列对应的边有相同的起点和终点，它们是平行边。

1.2.3　可达矩阵

对于有向图 G，可达矩阵也可以用来描述图中节点之间的连接关系。有向图的可达矩阵表示为 $\boldsymbol{P} = \{p_{ij}\}_{N \times N}$，可达矩阵元素 p_{ij} 定义为：若存在以 v_i 为起点、v_j 为终点的边，称节点 v_i 可达 v_j，p_{ij} 的值为 1；否则为不可达，值为 0。

可达矩阵具有下列性质。

（1）可达矩阵的主对角线元素全为 0。

（2）若有向图是强连通的，则 $\boldsymbol{P}$ 的全部元素均为 1。

（3）若 G 是具有 $\omega(\omega > 2)$ 个连通分支的有向图，则 G 的可达矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可表示为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & & & \\ & \boldsymbol{P}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{P}_\omega \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

其中，$\boldsymbol{P}_r$ 为第 $r(r = 1, 2, \cdots, \omega)$ 个连通分支的可达矩阵。

1.3　网络的基本静态几何特征

本节介绍网络的三个最基本的静态几何量，即平均距离、集聚系数和度分布，并分别介绍它们与邻接矩阵的关系。

1.3.1 平均距离

1. 网络的直径与平均距离

网络中的两节点 v_i 和 v_j 之间经历边数最少的一条简单路径（经历的边各不相同）称为测地线（geodesic）。测地线的边数 d_{ij} 称为两节点 v_i 和 v_j 之间的距离（或称为测地线距离，geodesic distance），也就是节点 v_i 到节点 v_j 所要经历的边的最小数目（即最短路径长度），而它的倒数 $1/d_{ij}$ 称为节点 v_i 和 v_j 之间的效率，记作 ε_{ij}，通常效率用来度量节点间的信息传递速度。当 v_i 和 v_j 没有路径连通时，$d_{ij}=\infty$，$\varepsilon_{ij}=0$，因此效率更适合度量非全通网络。网络的直径(diameter)D 定义为所有距离 d_{ij} 中的最大值：

$$D=\max_{1\leqslant i,j\leqslant N} d_{ij} \tag{1-10}$$

平均距离 L 则定义为所有节点对之间距离的平均值，它描述了网络中节点间的平均分离程度，计算公式为

$$L=\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}d_{ij} \tag{1-11}$$

其中，N 为节点数。网络的平均距离 L 称为网络的特征路径长度（characteristic path length）。对于无向简单图来说，$d_{ij}=d_{ji}$ 且 $d_{ii}=0$，则式（1-11）可简化为

$$L=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}d_{ij} \tag{1-12}$$

一个含 N 个节点和 M 条边的网络的平均距离可利用复杂度为 $O(MN)$的广度优先搜索算法来确定。在人际关系网络中，L 代表了两个人最短关系链中的朋友的平均个数。现在人们已经发现很多实际网络，虽然节点数巨大，但平均距离却很小，这就是所谓的小世界特征。

2. 距离与邻接矩阵的关系

下面来分析无权简单图邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与两节点 v_i 和 v_j 之间的距离 d_{ij} 的关系。首先定义

$$d_{ij}^{(l)}=\begin{cases}1, & v_i与v_j之间的最短路径长度为l\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{1-13}$$

显然对于无权简单图来说，当 $l=1$ 时，$d_{ij}^{(l)}=a_{ij}$。容易证明无权简单图邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 l 次幂 $\boldsymbol{A}^l$ 的元素 $a_{ij}^{(l)}$ 表示节点 v_i 和 v_j 之间通过 l 条边连接的路径数。当 $l=2$ 时，容易推出：

$$d_{ij}^{(2)}=(1-\delta_{ij}-d_{ij}^{(1)})U(a_{ij}^{(2)}) \tag{1-14}$$

其中，U 表示单位指示函数，即当 $x>0$ 时，$U(x)=1$；否则，$U(x)=0$。当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；否则，$\delta_{ij}=0$。容易用数学归纳法证明

$$d_{ij}^{(l)}=(1-\delta_{ij}-d_{ij}^{(l-1)}-d_{ij}^{(l-2)}-\cdots-d_{ij}^{(1)})U(a_{ij}^{(l)}) \tag{1-15}$$

据此，若 D 为网络直径，则两节点 v_i 和 v_j 之间的距离 d_{ij} 可以表示为（熊文海等，2009）

$$d_{ij}=\sum_{l=1}^{D}l\cdot d_{ij}^{(l)} \tag{1-16}$$

1.3.2 集聚系数

最近几年来人们发现大多数真实网络具有一个共同的结构性质——集聚性。在社会关系网中，集聚性表现得尤为明显：你的朋友圈中的很多人都是相互认识的。事实上，因为你的朋友大部分是你的同事、同学、邻居，所以他们认识的概率自然很大。复杂网络这种与生俱来的集聚性可通过平均集聚系数(mean clustering coefficient)加以定量地描述。用图论的语言讲，平均集聚系数是指在网络中与同一个节点连接的两节点之间也相互连接的平均概率，该系数通常用来刻画网络的局域结构性质。为了引出网络的平均集聚系数定义，首先介绍节点的集聚系数定义。假设节点 v_i 与 k_i 个节点直接相连，那么对于无向网络来说，这 k_i 个节点可能存在边数为 $k_i(k_i-1)/2$，而实际存在边数为 M_i，为此定义

$$C_i=2M_i/[k_i(k_i-1)] \tag{1-17}$$

为节点 v_i 的集聚系数。对于有向网络来说，这 k_i 个节点可能存在的有向弧数为 $k_i(k_i-1)$，此时 v_i 的集聚系数为 $C_i=M_i/[k_i(k_i-1)]$，然后对整个网络中所有节点的集聚系数进行平均，可得网络的平均集聚系数为

$$C=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}C_i \tag{1-18}$$

显然，$0\leqslant C\leqslant 1$。当 $C=0$ 时，所有节点都是孤立节点，没有边连接。当 $C=1$ 时，网络为所有节点两两之间都有边连接的完全图。对于完全随机网络来说，当节点数很大时，$C\to O(1/N)$。而许多大规模的实际网络的集聚系数通常远小于 1 而大于 $O(1/N)$。对于社会网络来说，通常随着 $N\to\infty$，集聚系数 $C\to O(1)$，即趋向于一个非零常数。

从以上集聚系数的定义容易看出，复杂网络结构的“集聚”可以认为是由一些“三角形连接”组成的，即“三个人两两互相认识”。因此，节点 v_i 的集聚系数也可以定义为

$$C_i=N_{i\Delta}/N_{i\wedge}=2N_{i\Delta}/[k_i(k_i-1)]=a_{ii}^{(3)}/[a_{ii}^{(2)}(a_{ii}^{(2)}-1)] \tag{1-19}$$

其中，$N_{i\Delta}$ 代表与节点 v_i 相连的“三角形”数目，数值上等于式（1-17）的 M_i；$N_{i\wedge}$

代表与节点 v_i 相连的“三元组”数目，即节点 v_i 与其他两个节点都有连接，即“至少与其他两个分别认识”，数值上等于 $k_i(k_i-1)/2$ 。

下面介绍如何根据无向无权简单图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来求节点 v_i 的集聚系数 C_i 。显然，邻接矩阵二次幂的对角元素 $a_{ij}^{(2)}$ 表示与节点 v_i 相连的边数，也就是 1.3.3 小节要介绍的节点 v_i 的度 k_i 。而邻接矩阵三次幂 $\boldsymbol{A}^3$ 的对角元素 $a_{ij}^{(3)}=\sum(a_{ij}\cdot a_{jl}\cdot a_{li})$（$j\neq l$）表示的是从节点 v_i 出发经过三条边回到节点 v_i 的路径数，也就是与节点 v_i 相连的三角形数的两倍（正向走和反向走）。因此，由集聚系数的定义可知

$$C_i=N_{i\Delta}/N_{i\wedge}=2N_{i\Delta}/[k_i(k_i-1)]=a_{ii}^{(3)}/[a_{ii}^{(2)}(a_{ii}^{(2)}-1)] \tag{1-20}$$

1.3.3　度分布

1. 节点的度

度（degree）是描述单独节点属性的简单而重要的概念。在网络中，节点 v_i 的邻边数目 k_i 称为该节点 v_i 的度。需要注意的是，一个节点的度并不一定等于与该节点连通的节点数目，这是因为网络中任意两点之间可能不止有一条边。一般而言，一个节点的度越大，该节点越重要。对网络中所有节点的度求平均，可得到网络的平均度：

$$\langle k\rangle=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}k_i \tag{1-21}$$

无向无权图的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的节点 v_i 的度 k_i 的函数关系很简单：邻接矩阵二次幂 $\boldsymbol{A}^2$ 的对角元素 $a_{ii}^{(2)}$ 就是节点 v_i 的邻边数（熊文海等，2009），即

$$k_i=a_{ij}^{(2)} \tag{1-22}$$

实际上，无向无权邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行或第 i 列元素之和也是度，从而无向无权网络的平均度就是 $\boldsymbol{A}^2$ 的对角线之和除以节点数，即

$$\langle k\rangle=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)/N \tag{1-23}$$

其中，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的迹（trace），即对角线元素之和。

2. 度分布

很显然，网络中不是所有点的节点都具有相同的度（即相同的边数）。实验表明，大多数实际网络中的节点的度是满足一定的概率分布的。如果定义 $P(k)$ 为网络中度为 k 的节点在整个网络中所占的比率，那么在网络中随机抽取到度为 k 的节点的概率为 $P(k)$ 。一般地，可以用一个直方图来描述网络的度分布(degree distribution)性质。