高等数学解析教程

常有礼　主编

科学出版社

高等数学解析教程

常有礼　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书系统地讲解了函数、极限、导数、积分、级数、微分方程等知识内容，强调高等数学知识的内在统一性.书中介绍了重要的基本原理，注重对高等数学中基本概念的理解及由基本概念、定理出发进行计算、推理和证明.希望学习者能比较容易地抓住重点，对加深基本知识的认识、建立数学思维、提高应用数学知识建模能力有一定帮助.

本书可以作为高等院校理工科有关专业本科生高等数学的教材，也可供大、中学教学教师和科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解析教程/常有礼主编. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-056905-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①常…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 049625 号

责任编辑：郑述方 / 责任校对：韩雨舟

责任印制：罗　科 / 封面设计：墨创文化

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第　一　版　开本：16(787×1092)

2018 年 8 月第一次印刷　印张：11.75

字数：280 千字

定价：38.00 元

《高等数学解析教程》编委会

主　编

常有礼

副主编

冯　涛　夏　兰　谢应齐

前　言

高等数学是高等院校理工科非常重要的一门学科基础课，是认识自然、表达自然的语言，在培养学生科学素养、逻辑能力及计算技巧方面起着重要作用.

高等数学具有高度抽象性、先验性及应用的广泛性等特点. 目前在高等数学教学中存在孤立地、碎片化地学习知识的现象，比较缺乏在宏观层面对高等数学教学中的经典内容进行整合. 正如张筑生教授所言“初学者在很长一段时间里只见树木不见森林. 对每一细部进行详尽的考查有时影响了微积分完整的艺术形象.”也像有些数学家讲的那样“传统的课本很像一间车间的工具箱，只说明这儿有大小不同的锤子，那儿有锯子，而刨子在另一个地方，只教给学生每种工具的用法，而很少教学生这些工具一起用于构造某个真正有意义的东西.”

现今高等数学教学中还存在的一个问题是讲授方法单一，师生互动不强. 在加入现代信息技术的教学过程中，师生互动、激发学生主动学习的效果改善得并不明显. 学生被动接受或因内在兴趣而主动学习的热情低. 只有提高学生的学习兴趣，实现自主学习，提升自学能力，实现个性化学习，才能达到教学目标.

产生这些问题的根源可能是对新时代教学理念的认识不足，以及传统教学理念的巨大历史惯性. 高等数学教学中要逐步提高以培养思维模式为中心的教学，还原、迁移用数学语言、数学符号表达的公式，定理背后的自然、社会现象或从复杂的自然、社会现象中抽象出数学模型，这种数学知识的重构与重建能力可以结合数学知识的普遍性与应用数学知识的学科特殊性，是新时期培养学生的一个可能方向.

云南大学大气科学专业从 20 世纪 70 年代创立之初就十分重视高等数学这类学科基础课程的教学与研究，谢应齐、阎冠雄等教授多年坚持给本科生讲授高等数学等学科基础课. 2014 年大气科学系设立“菁英班”，按照“理论基础型”模式培养，制定“学研结合”的人才培养方案和教学计划，培养高水平大气科学人才. “菁英班”在基础数学课的讲授过程中，适当融入以学生为中心的教学理念，以解决现实问题为目标的教学内容，用普遍性的数学方法，解决不同领域的具体问题，强调系统、整体、具体的解决问题的方法，取得了较好的效果.

本书获得云南大学“以数学建模为中心提升人才综合素质的探索与实践”、资源环境与地球科学学院教改项目“翻转课堂”在地学类高等数学教学中的应用与实践支持.

编者

目　录

第一章　函　数

17 世纪之前的数学中心是几何学,多用文字和比例语言表达函数关系. 17 世纪后半期引入的绝大多数函数都被视为曲线来加以研究,函数的“连续”性好像是不言自明的. 1673 年莱布尼茨在拉丁文手稿中首次用“function”表示函数:随曲线上的点变动而变动的几何量,如弦、切线长度. 18 世纪的多数数学家认为函数必须处处都有相同的解析表达式. 欧拉和拉格朗日已经考虑在不同区域上用不同的解析式来表达函数(相当于分段函数),并且在具有同一解析表达式的点上用了“连续”,在改变解析表达式形式的点处用了“不连续”,即使按照现代意义讲整个函数都是连续的. 1734 年欧拉引入符号 $f(x)$表示函数. 19 世纪对函数概念的认识有了进一步发展. 1807 年傅里叶在《热的解析理论》中说:“函数 $f(x)$表示相接的一组值或纵坐标,它们中的每一个都是任意的……我们不假定这些纵坐标服从一个共同的规律;它们以任何方式一个挨着一个……”这动摇了 18 世纪所有函数都是代数函数的推广信念,代数函数的性质也不再能搬到一切函数上去,数学家开始深究函数、连续、可微、可积及其他性质的真实意义. 1821 年柯西从定义变量入手给出了函数的一个定义,“即给定了这些变量中一个的值,就可以决定所有其他变量的值的时候,人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的,这时这个量就取名为自变量,而由这自变量表示的其他量就叫做这个自变量的函数.”柯西给出了无穷级数定义函数的方法,指出函数不一定要有解析式. 1837 年,狄利克雷给出了(单值)函数现今最常用的定义:如果对于给定区间上的每一个 x 的值有唯一的一个 y 值与之对应,则 y 就是 x 的一个函数. 接着他又说,至于在整个区间上 y 是按照一种或多种规律依赖于 x,或者 y 依赖于 x 是否可用数学运算来表达,都是无关紧要的. 早在 1829 年狄利克雷给出了一个以他名字命名的函数:这个函数对于一切有理数取值 c 而对一切无理数取值 d. 这大大拓宽了函数的内涵,使得没有分析表达式的变量关系也成为数学研究的对象. 19 世纪 70 年代,康托尔集合论出现后,函数被定义为集合之间的“对应关系”,进一步拓展和深化了函数概念,使其易于推广到其他数学分支.

中文“函数”是 1859 年清代李善兰意译引入的. 在与伟烈亚力合译的《代数学》卷七中译有“凡式中含天,为天之函数”,意思为式子中含有 x,则称之为关于 x 的函数. 中国古代以天、地、人、物四元表示未知数,将 $f(x)$用“函”字代替. “函”与“含”通用,用“函天”表示$\Phi(x)$,“涵天”表示 $\Psi(x)$等.

高度抽象是数学的一个重要特点,用符号字母表示抽象规律,明晰简便. 亚历山大洛夫在《数学——它的内容,方法和意义中》写道:伽利略发现了自由落体的运动规律,这个规律

可以表示成著名的公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$，s 是落体在 t 时间段内所走过的路程. 运动着的物体的能量是通过它的质量和速度按照公式 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 表示，若物体确定，则能量 E 就是速度 v 的函数. 电学中，导线中有电流通过时单位时间内产生的热量按照已知的规律是 $Q=\frac{1}{2}RI^2$，其中 I 表示电流强度，R 为导线的电阻，当电阻一定时，对于每一电流强度的值 I 对应着在单位时间内产生出来的确定的热量 Q. 具有给定锐角 θ 和直角边 x 的直角三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}x^2\tan\theta$，所有以上公式可以统一成一个公式 $y=\frac{1}{2}ax^2$，这就是从具体变量 t,s,E,Q,v 等过渡到一般变量 x 和 y，从具体的依赖关系过渡到它们的一般形式. 力学、电学等研究的是与具体量联系着的具体公式：$s=\frac{1}{2}gt^2$，$E=\frac{1}{2}mv^2$，$Q=\frac{1}{2}RI^2$，$S=\frac{1}{2}x^2\tan\theta$，数学研究的是与任何具体量都没有联系的一般公式 $y=\frac{1}{2}ax^2$. 对具体量的进一步抽象就是：不考察像 $y=\frac{1}{2}ax^2$，$y=\sin x$，$y=\ln x$，$y=e^x$ 等 y 对于 x 的给定依赖关系，而是考察 y 对于 x 的一般函数关系，以抽象公式 $y=f(x)$ 来表示. 这个公式表明：y 是 x 的某个函数，就是说，对于每个可以取为 x 的值，依某种方法对应着一个确定的 y 值. 不但这样或那样的给定函数（$y=\frac{1}{2}ax^2$，$y=\sin x$，$y=\ln x$，$y=e^x$）是数学研究的对象，而且任意的函数也是数学研究的对象. 开始是舍弃具体量，进而是舍弃具体函数. 这种概括是分析与综合对个别关系的分析和在新概念形式中表现出这些关系的一般特征的综合的深刻相互作用的结果.

一、主要内容

1. 区间、邻域

集合

具有某种共性的对象的全体称为一个集合. 集合中的事物称为集合的元素，简称元.

有限集与无限集

含有有限个元素的集合称为有限集，含有无限个元素的集合称为无限集. 无限集与传统整体大于部分的观念不同. 一个集合是无限集的充分必要条件是该集合可以与其任意一个真子集建立一一对应关系. 有限集不可能与其任意一个真子集建立一一对应关系. 整数集、有理数集都是无限集，并且与自然数集可以建立一一对应关系，这样的无限集又称为可数集；无理数集是不可数集.

数集的界、确界

设 E 为一个非空实数集合，若存在常数 $M(>0)$，使得 $\forall x\in E$，恒有 $x\leqslant M$ 成立，则 M 称为 E 的一个上界，当然比 M 大的任何实数也是 E 的上界. 类似可以定义 E 的下界.

若数 β 满足① $\forall x\in E$，有 $x\leqslant\beta$；② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使得 $x_0>\beta-\varepsilon$ 则称 β 为集合 E 的上确界. 记做 $\beta=\sup E$.

若数 α 满足① $\forall x\in E$，有 $x\geqslant\alpha$；② $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，使得 $x_0<\alpha+\varepsilon$ 则称 α 为集合 E 的下确界. 记做 $\alpha=\inf E$.

有上界的集合必有上确界，有下界的集合必有下确界. 上确界、下确界未必在集合内.

罗素悖论

设集合 B 是一切不以自身为元素的集合组成的集合，则 B 是否属于 B？若 B 属于 B 则 B 是自身的元素，B 不属于 B；反之，若 B 不属于 B，则 B 不是 B 的元素，于是 B 属于 B. 集合 B 不属于 B 当且仅当 B 属于 B 时成立.

罗素悖论引起了第三次数学危机.

区间

满足一定不等式的实数集称为区间. 设 a,b 是实数，$a<b$，有开区间 (a,b)、闭区间 $[a,b]$、半开半闭区间 $[a,b)$，$(a,b]$ 等. 这些区间都是无限集、有界集；$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,+\infty)$ 均是无限集、无界集.

有限集都是有界集. 任何区间 (a,b) 都是不可数集.

邻域

数轴上以 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$. 设 $\delta>0$，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 就是 a 的一个邻域，称之为 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$；a 称为邻域中心，δ 称为邻域半径.

记 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=\mathring{U}(a,\delta)$，称为 a 的 δ 去心邻域；称 $(a-\delta,a)=\{x\mid a-\delta<x<a\}$ 为 a 的左 δ 邻域，$(a,a+\delta)=\{x\mid a<x<a+\delta\}$ 为 a 的右 δ 邻域.

设 $P_0(a,b)$ 为平面上一点，δ 为一正数. 与点 $P_0(a,b)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 $P_0(a,b)$ 的 δ 邻域，记作 $U(P_0,\delta)$，即：

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}.$$

$P_0(a,b)$ 的去心 δ 邻域记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P\mid 0<|PP_0|<\delta\}$. 用 $U(P_0)$ 表示不强调邻域半径时的某个邻域. 类似可定义空间中某点的邻域的相关概念.

数轴是有向直线，趋近一个定点 a 有左右两个方向，$U(a,\delta)$ 表示的是一条线段；平面上可以沿任意方向趋近定点 $P_0(a,b)$，故 $U(P_0,\delta)$ 表示的是一个以 $P_0(a,b)$ 为圆心，以 δ 为半径的圆的内部所有点.

2. 映射、函数

设 A,B 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对于 A 中的每个元素 x，按照法则 f，在 B 中有唯一确定的元素与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记为 $f:A\to B$. A,B 不必是数集，相应的映射在不同的数学分支中有不同的名称.

D 为实数集的子集，$\mathbf{R}$ 是实数集，映射 $f:D\to\mathbf{R}$，即 $x\to y=f(x)$，称 f 为定义在 D 上的（一元）实函数，D 称为定义域，集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D,y\in\mathbf{R}\}$ 称为函数的值域.

几个重要的函数

绝对值函数：

$$y=|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

绝对值函数一般要转化为复合函数或分段函数再来讨论其各种性态.

符号函数：

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$$

对于任何实数 x，有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$.

取整函数：

$y=[x]$，表示小于或等于 x 的最大整数. $[x]\leqslant x\leqslant [x]+1$；$[x+n]=[x]+n$；$n[x]\leqslant nx$，$[x]+[y]\leqslant[x+y]$，$n$ 是正整数.

分段函数：

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), x>a\\ c, x=a\\ f_2(x), x<a\end{cases} \quad 或\ f(x)=\begin{cases}g(x), x\neq a\\ c, x=a\end{cases}$$

分段函数是在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同表达式表示的函数，是一个函数，不是几个函数.

狄利克雷函数：

$$D(x)=\begin{cases}1, x\ 是有理数\\ 0, x\ 是无理数\end{cases}$$

狄利克雷函数具有很多特别的性质：①函数无法画出图象，没有任何曲线段；②是周期函数，任何正有理数均是其周期，由于没有最小的正有理数，故狄利克雷函数没有最小正周期；③是偶函数；④狄利克雷函数处处无极限、处处不连续、处处不可导，狄利克雷函数是有界函数，但在任何区间上不可积分.

狄利克雷函数常用来澄清函数的一些基本概念. 函数 $y=xD(x)$ 只在原点处连续，在其他点处均间断；$y=x^2D(x)$ 只在原点可导，在其他点处间断.

幂指函数$u(x)^{v(x)}$一般转化为复合函数 $e^{v(x)\ln u(x)}$ 再进行各种运算，尤其是在计算极限时.

函数的几种性态

有界性

函数 $f(x)$在集合 D 上有界是指 $f(D)$是有界集，即存在 $A,B(A>B)$，对于任意 $x\in D$，有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$. $f(x)$在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在 D 上既有上界又有下界.

$f(x)$在 D 上有界$\Leftrightarrow \exists M>0, \forall x\in D, |f(x)|\leqslant M$.

$f(x)$在 D 上无界$\Leftrightarrow \forall M>0, \exists x\in D, |f(x)|>M \Leftrightarrow \forall n>0, \exists x_n\in D, |f(x_n)|>M$.

对于复合函数的有界性，需要注意，如果外部函数是整体有界函数，则复合函数也是整

体有界函数. 如 $y=\sin u, u=x^2$，则 $y=\sin x^2$ 有界.

单调性

函数 $f(x)$在 D 上有定义，若对 D 中任意两个数 $x_1, x_2(x_1<x_2)$，总有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)(f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$为 D 上的递增(递减)函数. 若总成立 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$，则称$f(x)$为 D 上的严格递增(递减)函数. 递增和递减函数统称为单调函数，严格递增和严格递减函数统称为严格单调函数. 严格单调函数必有严格单调的反函数，反函数的单调性与原函数的单调性一致.

奇偶性

函数 $f(x)$在 D 上有定义，D 关于原点对称，若 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)+f(x)=0$，则称 $f(x)$为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$则称 $f(x)$为偶函数. 这也是判断函数奇偶性的主要方法.

任何一个函数 $f(x)$都可以表示为一个奇函数与一个偶函数的和：

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

在复合函数中，内部函数是偶函数，外部函数无论是否具有奇偶性，复合函数都是偶函数，如 e^{x^4}；若内部函数是奇函数，外部函数是偶函数，复合函数是偶函数，如 $\cos(\tan x)$；内部函数和外部函数均是奇函数，则复合函数是奇函数，如$\tan^3 x$.

内部函数与外部函数具有相同的奇偶性则复合函数也有相同的奇偶性，若内部函数与外部函数具有不同的奇偶性，则复合函数必为偶函数.

周期性

函数 $f(x)$在 D 上有定义，如果存在正数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$，$\forall x\in D$，则称 $f(x)$为以 T 为周期的周期函数.

若 T 为 $f(x)$的周期，则 nT 也是 $f(x)$的周期；若 $f(x)$以 T 为周期，则 $f(ax+b)$以$\frac{T}{|a|}$为周期，例如 $\cos(5x-4)$以$\frac{2\pi}{5}$为周期；函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$分别以 T_1, T_2 为周期，若 $\varphi(x)+\psi(x)$也为周期函数，则以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期，如 $\cos(5x-4)+\sin(4x+7)$以$\frac{2\pi}{5}$和$\frac{\pi}{2}$的最小公倍数 2π 为周期. 复合函数中如果内部函数是周期函数，则复合函数也是周期函数，如 $e^{\tan x}$.

反函数

设 $f(x)$在 D 上有定义，值域为 D_f，若$\forall y\in D_f$，有唯一确定的 $x\in D$，使得 $f(x)=y$ 则定义了一个新的函数 $x=g(y)$，称为 $y=f(x)$的反函数，一般记为 $x=f^{-1}(y)$，它的定义域是 D_f，值域是 D. 相对于反函数原来的函数称为原函数.

原函数的单值性无法保证反函数的单值性，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是单值函数，但无

法在$(-\infty,+\infty)$内求其反函数，但在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$内可以求其反函数. $f:D\to D_f$ 有反函数的充分必要条件是 f 是一一对应的. 若 $f(x)$在 D 上严格单调，则 f 的反函数存在.

原函数 $y=f(x)$与反函数 $x=f^{-1}(y)$的图象在同一坐标系上是完全重合的. 只有当把 $x=f^{-1}(y)$改写为$y=f^{-1}(x)$的时候，二者的图象才关于 $y=x$ 对称.

复合函数

设 $y=f(u)$的定义域是 D，函数 $u=\varphi(x)$的值域是 R_φ，如果 $D\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称 $y=f(\varphi(x))$是 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数. $y=f(u)$称为外部函数，$u=\varphi(x)$称为内部函数. x 是自变量，u 是中间变量，y 是因变量.

两个函数能复合的前提条件是外部函数的定义域与内部函数的值域有交集，复合后的函数的定义域是其交集部分.

初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、常数函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合得到的函数并用一个解析表达式表示的函数称为初等函数.

分段函数一般不是初等函数，如 $y=\operatorname{sgn}x$，$y=[x]$，绝对值函数既是分段函数，又是初等函数. 幂指函数可以化为指数函数，故是初等函数.

二、问题及分析

例 1　用符号 $\sum$ 表示一连串数求和.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i,\ \sum_{i=1}^{n}ax_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n}[k^p-(k-1)^p]=(1^p-0^p)+(2^p-1^p)+(3^p-2^p)+\cdots+[n^p-(n-1)^p]=n^p,$$

恒等式 $k^2-(k-1)^2=2k-1$，对于 $k=1,2,\cdots,n$，将相应的恒等式加起来，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}[k^2-(k-1)^2]=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1,n^2=2\sum_{k=1}^{n}k-n,\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

恒等式 $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ 可得

$$\sum_{k=1}^{n}[k^3-(k-1)^3]=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1,n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)+n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

类似可以算出：

$$\sum_{k=1}^{n}k^p=\frac{n^{p+1}}{p+1}+c_1n^p+c_2n^{p-1}+\cdots+c_pn.$$

例 2　设 $x\geqslant 0$，由二项式定理 $(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots+x^n$ 证明不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$.

证明：用数学归纳法证明伯努里(Bernoulli)不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$，$\forall x\geqslant -1$ 成立.

当 $n=1$ 时，不等式显然成立；假设已经证明了 $(1+x)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)x$，$\forall x\geqslant -1$，则 $(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant[1+(n-1)x](1+x)=1+(n-1)x+x+(n-1)x^2\geqslant 1+nx$ $\forall x\geqslant -1$. 这就证明了对于一切自然数 n，伯努里不等式均成立.

例 3　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f(g(x))=1-3x$ 且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$ 并写出它的定义域.

解：因为 $f(x)=e^{x^2}$，$f(g(x))=e^{g^2(x)}=1-3x$，两边取对数有

$$g^2(x)=\ln(1-3x),$$

$$g(x)=\pm\sqrt{\ln(1-3x)}\text{ 又 }g(x)\geqslant 0,$$

故

$$g(x)=\sqrt{\ln(1-3x)},$$

$g(x)$ 的定义域为

$$\begin{cases}1-3x>0\\ \ln(1-3x)\geqslant 0\end{cases},$$

分别解两个不等式有 $x<\dfrac{1}{3}$，$x<0$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

函数的两个基本要素是定义域和对应法则，考察一个函数的定义域是非常重要的一个内容. 在求函数的定义域中，一般需要注意分式分母不能为零；偶次根号下应该非负；对数真数必为正值，对数的底数为正数且不能等于 1；反三角函数 $\arcsin\varphi(x)$，$\arccos\varphi(x)$ 要求 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

复合函数最重要的是要厘清函数的复合顺序，尤其是有多重复合时. 除了复合顺序需要厘清之外，复合函数还有两类问题需要注意. 一类称为正问题，即已知 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 的表达式，求 $\varphi(\psi(x))$，这种问题一般直接带入即可，只是当 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为分段函数的时候有些烦琐. 还有一类问题称为反问题，即已知复合函数 $\varphi(\psi(x))$ 的表达式及内部函数 $\psi(x)$ 的表达式，求外部函数 $\varphi(x)$ 的表达式. 这类问题需要注意的是函数的核心要素是定义域和对应法则，而用什么字母表示自变量对函数没有影响.

例 4　设 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解：

$$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}$$

$$=(x+y)^2\frac{1-y/x}{1+y/x},$$

故

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y},$$

又令

$$x+y=u,\frac{y}{x}=v,$$

则有

$$y=xv,x+xv=u,x=\frac{u}{v+1};x=\frac{y}{v},\frac{y}{v}+y=u,y=\frac{vu}{1+v},$$

那么

$$f(u,v)=u^2\frac{1-v}{1+v},$$

即有

$$f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}.$$

例 5 设函数 $f(x)$,$g(x)$在(a,b)上严格单调增加,则函数 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$,$\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$在$(a,b)$上也严格单调增加.

证明:$\varphi(x)$,$\psi(x)$在(a,b)中每一点都处于变化之中. $\forall x_1,x_2\in(a,b)$且 $x_1<x_2$,因为 $f(x)$,$g(x)$在(a,b)上严格单调增加,所以 $f(x_1)<f(x_2)$,$g(x_1)<g(x_2)$. 于是有

$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>f(x_2)>f(x_1),$$
$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}>g(x_2)>g(x_1),$$
$$\varphi(x_2)>\min\{f(x_1),g(x_1)\}=\varphi(x_1).$$

同理可以证明 $\psi(x)$在(a,b)上严格单调增加.

例 6 设函数$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上严格单调增加,证明对任意实数 $a>0,b>0$ 均有 $f(a+b)>f(a)+f(b)$.

证明:因为$\frac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上严格单调增加,对任意实数 $a>0,b>0$ 均有 $a<a+b,b<a+b$,所以

$$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(a+b)}{a+b},f(a)<\frac{af(a+b)}{a+b},$$
$$\frac{f(b)}{b}<\frac{f(a+b)}{a+b},f(b)<\frac{bf(a+b)}{a+b},$$
$$f(a)+f(b)<\frac{af(a+b)}{a+b}+\frac{bf(a+b)}{a+b}=f(a+b).$$

例 7 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$.

证明:(1)如果 $f(x)$是偶函数,则 $F(x)$也是偶函数;(2)如果 $f(x)$非增,则函数 $F(x)$非减.

证明:

(1)由 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$,故

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t,$$

令 $u=-t$,又 $f(x)$为偶函数,则

$$F(-x)=-\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

即 $F(x)$为偶函数.

(2)$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t,$

由于 $f(x)$连续,故 $xf(x)$也连续,从而 $F(x)$可导,于是有

$$F'(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$$
$$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x),$$

再由积分中值定理,知:

$$F'(x)=xf(\xi)-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)],$$

而 ξ 在 0 与 x 之间,当 $x>0$ 时,$0<\xi<x$,由 $f(x)$非增得知:

$$f(\xi)\geqslant f(x),\text{即}F'(x)\geqslant 0,$$

当 $x<0$ 时,$x<\xi<0$,由 $f(x)$非增得知:

$$f(\xi)\leqslant f(x),\text{即}F'(x)\geqslant 0,$$

当 $x=0$ 时,$F'(x)=0$. 从上所述,$F'(x)\geqslant 0$,故 $F(x)$非减.

例 8　函数 $y=f(x)$在 a 的任何邻域内均无界,但当 $x\to a$ 时,$y=f(x)$并不趋近于无穷大.

分析:考虑函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$,则对于任意正数 M,总有充分接近于 $a=0$ 的点,使得 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>M$. 比如,取 $x=\frac{1}{n\pi}$,则 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|=n\pi$,当 $n>\frac{M}{\pi}$时,有 $\left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|>M$. 因此,函数 $y=f(x)$在 $a=0$ 的任何邻域内均无界. 如果取 $a_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$,当 $n\to\infty$时,$a_n\to 0$,此时 $\left|\frac{1}{a_n}\cos\frac{1}{a_n}\right|\to 0$,即 $f(x)$不趋近于无穷大. 函数无界与函数趋近于无穷是两个不同的概念. 如果函数 $f(x)$在 $x\to a$ 时趋于无穷大,那么 $f(x)$在 a 的任何邻域内均无界,反之不成立.

例 9　证明函数 $f(x)=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$是无界函数.

证明:$\forall M>0,M\leqslant[M]+1,[M]+1$ 为正整数,存在 $x=2([M]+1)\pi\in(-\infty,+\infty)$使得

$$f(2([M]+1)\pi)=(2([M]+1)\pi)\cos(2([M]+1)\pi)=2([M]+1)\pi>M,$$

故 $f(x)=x\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$是无界函数.

例 10　$F(x)$为奇函数,$f(x)=F(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right),a>0,a\neq 1$,判断 $f(x)$的奇偶性.