Hilbert空间中线性算子数值域及其应用

吴德玉　阿拉坦仓　黄俊杰　海国君　编著

科学出版社

Hilbert 空间中线性算子数值域及其应用

吴德玉　阿拉坦仓　黄俊杰　海国君　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以 Hilbert 空间中线性算子数值域以及相关问题为主线，对线性算子数值域基本性质以及应用进行阐述. 本书的内容框架如下：第 1 章主要介绍 Hilbert 空间中线性算子数值域. 第 2 章主要介绍 Hilbert 空间中有界线性算子数值半径. 第 3 章主要介绍 Hilbert 空间中一些特殊算子的数值域. 第 4 章主要介绍由 Hilbert 空间中线性算子数值域推广得到的一些特殊数值域，将 Hilbert 空间中线性算子数值域的研究提升到一个新的高度. 第 5 章介绍 Hilbert 空间中线性算子的扩张理论，为 Hilbert 空间中线性算子数值域的应用提供平台.

本书可供具有一定算子理论基础的读者阅读，也可供数学专业高年级本科生或者数学专业研究生、教师使用.

图书在版编目（CIP）数据

Hilbert 空间中线性算子数值域及其应用/吴德玉等编著. —北京：科学出版社, 2018. 11

ISBN 978-7-03-059577-5

I. ①H… II. ①吴… III. ①希尔伯特空间–线性算子理论–数值–域(数学)–研究 IV. ①O177.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 260743 号

责任编辑：王 静／责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 11 月第一次印刷 印张：11 1/4
字数：227 000

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

不管数学的任一分支是多么抽象, 总有一天会应用在这实际世界上.

—— 罗巴切夫斯基

二次型的系统研究起源于对二次曲线和二次曲面的分类问题的讨论, Hilbert, Hellinger, Toeplitz 和 Hausdorff 等数学家都曾系统地研究过二次型. 经典的实二次型是形如

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} Ax \tag{0.0.1}$$

的 n 元函数, 其中 x^{T} 是向量 x 的转置, A 是实对称矩阵. 二次型在数学及其他学科中有非常广泛的应用. 比如, 数论领域的 Fermat 定理、群论领域的 Witt 定理、微分几何中的 Riemann 度规和 Lie 代数中的 Cartan 型等均与二次型有关. 除了二次型以外, 需要提及的另一个重要的数学概念是 Rayleigh 商. Rayleigh 商是形如

$$R(A, x) = \frac{x^* Ax}{x^* x}, \quad x \neq 0 \tag{0.0.2}$$

的多元函数, 它在泛函分析中的 min-max 定理、Poincaré 分离定理以及 Sturm-Liouville 问题中具有重要应用. 然而, 把式 (0.0.1), (0.0.2) 推广到无穷维复 Hilbert 空间后得到集合

$$W(A) = \left\{ \frac{(Ax, x)}{(x, x)} : x \neq 0 \right\}. \tag{0.0.3}$$

由式 (0.0.3) 定义的集合 $W(A)$ 就称为 Hilbert 空间中有界线性算子 A 的数值域. 所以, Hilbert 空间中有界线性算子的数值域是二次型和 Rayleigh 商从有限维到无穷维的逻辑上的推广, 具有深厚的理论基础. 就像线性算子的谱集一样, Hilbert 空间中线性算子的数值域也是复平面的子集, 它也蕴涵有关线性算子的相关信息, 甚至能够提供谱集不能提供的一些信息. 比如, 一个线性算子的数值域是实数集蕴涵该线性算子是对称算子, 而谱集是实数, 不一定是对称算子. 从学术研究角度来讲, 线性算子数值域的研究涉及纯理论和应用科学的诸多分支, 诸如算子理论、泛函分析、C^*-代数、Banach 代数、数值分析、扰动理论、控制论以及量子物理等. 此外, 关于线性算子数值域的研究方法也十分丰富, 代数、分析、几何、组合理论、计算机编程都是非常有用的研究工具. 因此, 线性算子数值域以及相关问题的研究受到了诸多学者的广泛关注. 下面将列举一些数值域的应用领域及较活跃的研究方向.

泛函分析及数值域的谱包含性质. 令 λ 是有界线性算子 A 的一个特征值, x_0 是对应的特征向量, 则 $x_0 \neq 0$ 且

$$\lambda = \frac{(Ax_0, x_0)}{(x_0, x_0)}.$$

于是, 线性算子 A 的特征值包含于它的数值域. 类似地, 容易证明剩余谱也包含于有界线性算子 A 的数值域且连续谱包含于有界线性算子 A 的数值域闭包, 即

$$\sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \subset W(A), \quad \sigma_c(A) \subset \overline{W(A)}, \quad \sigma(A) \subset \overline{W(A)},$$

这个性质称为数值域的谱包含性质. 由数值域的谱包含性质可知, 有界线性算子数值域的研究有助于刻画谱集分布范围. 然而, 数值域的谱包含性质对无界算子或者其他数值域, 如算子多项式数值域、不定度规空间中的 $\Im$-数值域等是不一定成立的. 于是, 很多学者开始研究 Krein 空间或 Hilbert 空间中无界线性算子以及非线性算子数值域的谱包含性质, 给出了谱包含性质成立的一些条件. 另外, 根据线性算子谱集的凸包和数值域闭包是否相等、数值半径和算子范数是否相等以及数值半径和谱半径是否一样等性质, 把线性算子分为 Convexoid 算子、Normaloid 算子以及数值压缩算子等类型, 进而研究它们的性质以及内在联系也是一个非常活跃的研究课题.

线性算子数值域的次可加性. 对于 Hilbert 空间中有界 (或无界) 线性算子 A, B 而言, 通过 A, B 的点谱 $\sigma_p(A), \sigma_p(B)$ 很难刻画 $\sigma_p(A+B)$ 的信息. 只是对一些特殊的算子, 比如 A, B 是有界自伴算子 (即 $A = A^*, B = B^*$) 时, 有

$$\max\{\sigma_p(A+B)\} \leqslant \max\{\sigma_p(A)\} + \max\{\sigma_p(B)\}.$$

然而, 对于有界或无界线性算子 A, B 的数值域而言, 容易证明

$$W(A+B) \subset W(A) + W(B),$$

该性质称为数值域的次可加性. 此时, 运用谱包含性质 $\sigma_p(A+B) \subset W(A+B)$ 即得

$$\sigma_p(A+B) \subset W(A) + W(B).$$

也就是说, 如果知道关于 $W(A) + W(B)$ 的信息, 则可以刻画 $\sigma_p(A+B)$ 的分布范围.

线性算子数值域与系统稳定性分析. 在工程与稳定性领域, 一个方阵 A 称为稳定的 (也称为 Hurwitz 矩阵), 如果 A 的每个特征值的实部为负数, 也就是说, 对任意 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 有 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. 当 A 稳定时, 动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = Ax(t)$$

是渐近稳定的, 即, 当 $t \to \infty$ 时, $x(t) \to 0$. 显然, 系统稳定性分析与数值域密不可分. 事实上, 根据数值域谱包含性质可知, 当 $\mathrm{Re}(W(A)) < 0$ 时, 系统具有渐近稳定性.

线性算子数值域与最优化理论. 最小值问题

$$\min_{x\in\mathbb{C}^n, x^*x=1} \|A - cxx^*\|_2^2, \quad c \in \mathbb{C} \tag{0.0.4}$$

是最优化理论领域较为经典的问题, 其中 Frobinus 范数 $\|\cdot\|_2$ 定义为

$$\|A\|_2^2 = [A, A] = \mathrm{tr}AA^*.$$

该问题的解决和数值域 $W(A)$ 密不可分. 事实上,

$$\|A - cxx^*\|_2^2 = [A - cxx^*, A - cxx^*] = \|A\|_2^2 - 2\mathrm{Re}\bar{c}[A, xx^*] + |c|^2,$$

于是

$$\min \|A - cxx^*\|_2^2 \Leftrightarrow \max \mathrm{Re}\bar{c}[A, xx^*],$$

对于给定的单位向量 x, 当 $c = [A, xx^*] = x^*Ax$ 时, $\mathrm{Re}\bar{c}[A, xx^*]$ 达到最大值. 于是最值问题 (0.0.4) 等价于计算 $W(A)$ 的最大值, 即数值半径问题.

线性算子数值域与量子运算及量子控制. 量子运算是近些年兴起的比较热门的研究课题, 数值域及其他的推广在量子运算及量子控制中也有重要应用. 比如, 量子信道是指变换

$$\Phi(X) = TXT^*,$$

其中 T 满足 $T^*T = I_n$ 且称为纠错算子. 量子信道里一个核心问题是量子纠错码的存在性问题, 即

$$\exists \Psi : M_n \to M_n \quad \text{使得} \quad \Psi \circ \Phi(A) = A,$$

其中 Ψ 是满足特定性质的线性映射. 而量子纠错码的存在性问题可以等价描述为

$$\exists U \in M_{n\times k}, \quad U^*U = I_k, \quad U^*AU = zI_k,$$

其中 $\{z : U^*AU = zI_k, U^*U = I_k\}$ 称为秩-k 数值域, 而秩-k 数值域是数值域的推广. 另外, 量子控制及量子物理问题可以转化成 C-数值域的计算问题等.

综上所述, Hilbert 空间中线性算子数值域的研究不仅具有深厚的理论研究价值, 还具有广泛的实际应用价值. 然而, 据我们所知国内还没有一本专门介绍 Hilbert 空间中线性算子数值域的学术专著或教材. 基于以上原因, 我们把自己的研究成果与国内外同行的研究成果相结合撰写了本书, 以便让更多的读者了解和关注 Hilbert

空间中线性算子数值域理论. 本书以 Hilbert 空间中线性算子数值域以及相关问题为主线, 对线性算子数值域基本性质以及应用进行阐述.

本书的内容框架如下: 第 1 章主要介绍 Hilbert 空间中线性算子数值域, 包括数值域的凸性、谱包含性质、次可加性质、数值域边界点以及几何性质等, 为进一步了解 Hilbert 空间中线性算子数值半径奠定基础. 第 2 章主要介绍 Hilbert 空间中有界线性算子数值半径, 包括基本性质、数值半径的范数性质、数值半径的不等式、反向不等式以及两个算子乘积的数值半径等内容. 第 3 章主要介绍 Hilbert 空间中一些特殊算子的数值域和数值半径的性质, 包括紧算子、亚正规算子、相似算子、乘积算子以及无穷维 Hamilton 算子等的数值域. 第 4 章主要介绍由 Hilbert 空间中线性算子数值域推广而得的一些特殊数值域, 包括二次数值域、本质数值域、算子多项式数值域、$\mathfrak{C}$-数值域等内容, 将 Hilbert 空间中线性算子数值域研究提升到一个新的高度. 第 5 章介绍算子的扩张理论, 包括正常扩张、酉扩张和强扩张等内容, 将 Hilbert 空间中线性算子数值域理论应用于算子扩张问题, 为线性算子数值域应用提供了很好的平台.

本书的宗旨是向读者较系统地介绍 Hilbert 空间中线性算子数值域的理论和方法, 对 Hilbert 空间中线性算子数值域的一些最基本的结构和性质进行阐述.

本书写作期间得到了以阿拉坦仓教授为带头人的无穷维 Hamilton 算子研究团队的大力支持和帮助. 侯国林教授、额布日力吐教授和吴晓红博士在繁忙的教学科研之余, 仔细审读了全书, 提出了很有价值的意见和建议, 对此作者表示衷心感谢! 还感谢内蒙古大学数学科学学院和呼和浩特民族学院领导和同事, 他们所提供的轻松愉快的工作环境, 保证了本书的撰写进度. 本书的研究内容得到了国家自然科学基金 (项目编号: 11561048, 11761029, 11461049, 11761052) 和内蒙古自治区自然科学基金 (项目编号: 2015MS0116) 的支持.

由于时间仓促, 加上编者水平所限, 定有不当之处, 敬请专家和读者批评指正.

吴德玉　阿拉坦仓　黄俊杰　海国君

2017 年 8 月于呼和浩特

主要符号表

I	单位算子
X	Hilbert 空间
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathrm{i}\mathbb{R}$	纯虚数数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathrm{Conv}(G)$	集合 G 的凸包
$\mathrm{Re}(\lambda)$	复数 λ 的实部
$\mathrm{Im}(\lambda)$	复数 λ 的虚部
T^*	线性算子 T 的共轭算子
$\mathcal{R}(T)$	线性算子 T 的值域
$\mathbb{N}(T)$	线性算子 T 的零空间
$\mathscr{B}(X,Y)$	从 X 到 Y 上的有界线性算子全体所组成的集合
$\mathscr{B}(X)$	空间 X 上有界线性算子的全体所组成的集合
(x,y)	两元素 x, y 的内积
$\|x\|$	元素 x 的范数
$\rho(T)$	线性算子 T 的预解集
$\sigma_{\mathrm{ap}}(T)$	线性算子 T 的近似点谱
$\sigma(T)$	线性算子 T 的谱集
$r(T)$	线性算子 T 的谱半径
$\sigma_p(T)$	线性算子 T 的点谱
$\sigma_c(T)$	线性算子 T 的连续谱
$\sigma_r(T)$	线性算子 T 的剩余谱
$\sigma_{\mathrm{com}}(T)$	线性算子 T 的压缩谱
$\sigma_\delta(T)$	线性算子 T 的亏谱
$W(T)$	线性算子 T 的数值域
$w(T)$	线性算子 T 的数值半径
$\mathcal{W}^2(T)$	线性算子 T 的二次数值域
$w^2(T)$	线性算子 T 的二次数值半径
$W_e(T)$	线性算子 T 的本质数值域
$W(P(\lambda))$	多项式数值域

目　录

第 1 章　Hilbert 空间中线性算子数值域

二次型理论和 Rayleigh 商在数学及其他学科中占有重要的地位, 包括数论中的费马大定理、线性代数中的若尔当标准形、群理论 (正交群) 中的 Witt 定理、微分几何中的 Riemann 度规、Lie 理论中的 Cartan 型等均与二次型有关. 又比如, 泛函分析里的 min-max 原理的建立和 Sturm-Liouville 问题的研究均与 Rayleigh 商紧密相连. 然而, 二次型和 Rayleigh 商在其有限维或无穷维空间中的推广就包括 Hilbert 空间中线性算子数值域理论[1]. 因此, 数值域作为二次型和 Rayleigh 商的推广, 具有深厚的理论基础. 这一章主要介绍复无穷维 Hilbert 空间中有界 (或无界) 线性算子数值域以及它的一些基本性质.

1.1　线性算子数值域

1.1.1　线性算子数值域定义

定义 1.1.1　设 T 是 Hilbert 空间 X 中的有界线性算子, 其数值域 $W(T)$ 定义为

$$W(T)=\{(Tx,x):(x,x)=1\}.$$

数值域的另一个等价定义是

$$W(T)=\left\{\frac{(Tx,x)}{(x,x)}:x\neq 0\right\}.$$

从定义不难发现数值域是复数域 $\mathbb{C}$ 的子集, 下面是关于数值域的一些例子.

例 1.1.1　设 X 是 Hilbert 空间, I 是 X 中的单位算子, 定义 Hilbert 空间 $X\times X$ (不混淆的前提下, 其内积仍然记为 $(\cdot)$) 中的分块算子矩阵

$$T=\begin{bmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

则 $W(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$. 事实上, 令 $x=[\,f\quad g\,]^{\mathrm{T}}\in X\times X$, $\|f\|^2+\|g\|^2=1$, 则

$$(Tx,x)=(g,f).$$

注意到

$$|(g,f)| \leqslant \|g\|\|f\| \leqslant \frac{1}{2}(\|g\|+\|f\|)^2 = \frac{1}{2}.$$

于是 $W(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

另一方面, 对任意 $\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$, 取 $x = [\ f\cos\alpha \quad f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sin\alpha\ ]^{\mathrm{T}} \in X \times X$, 其中 $\sin(2\alpha) = 2r \leqslant 1, 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, $f \in X$ 且 $\|f\| = 1$, 则 $\|x\| = 1$ 且

$$(Tx, x) = (f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sin\alpha, f\cos\alpha) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

于是 $W(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

例 1.1.2　设 $X = \ell^2$, 即满足 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$ 的复值数列 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 的全体. 内积定义为

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y}_i, \quad x = (x_1, x_2, \cdots), \quad y = (y_1, y_2, \cdots) \in X.$$

空间 X 中的位移算子 T 定义为

$$Tx =: (x_2, x_3, \cdots),$$

则 $W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. 事实上, 对任意 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in X, \|x\| = 1$, 有

$$(Tx, x) = x_2\overline{x}_1 + x_3\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_{n-1} + \cdots.$$

注意到 $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots = 1$, 不妨设 $|x_1| \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}
|(Tx, x)| &\leqslant |x_2||x_1| + |x_3||x_2| + \cdots + |x_n||x_{n-1}| + \cdots \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|x_1|^2 + 2|x_2|^2 + \cdots + 2|x_n|^2 + \cdots) \\
&\leqslant \frac{1}{2}(2 - |x_1|^2).
\end{aligned}$$

从而, $W(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

另一方面, 对任意 $\lambda = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0 \leqslant r < 1$, 取

$$x = (\sqrt{1-r^2}, r\sqrt{1-r^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}, \cdots),$$

则

$$\|x\|^2 = 1 - r^2 + r^2(1-r^2) + r^4(1-r^2) + \cdots = 1,$$

而且

$$
\begin{aligned}
(Tx,x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} r(1-r^2) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} r^3(1-r^2) + \cdots \\
&= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.
\end{aligned}
$$

于是, $W(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

1.1.2 线性算子数值域基本性质

根据数值域定义, 容易得到下列性质.

性质 1.1.1 设 T 是 Hilbert 空间 X 中的有界线性算子, 则数值域 $W(T)$ 是有界集.

证明 当 T 是有界线性算子时, 考虑到

$$
|(Tx,x)| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|^2,
$$

即得数值域 $W(T)$ 是有界集. ∎

注 1.1.1 当线性算子 T 是 Hilbert 空间中的无界线性算子时, 其定义域不一定是全空间, 数值域 $W(T)$ 定义为

$$
W(T) = \{(Tx,x) : x \in \mathcal{D}(T), (x,x) = 1\}.
$$

对无界线性算子而言, 它的数值域不一定是有界集, 甚至有可能是全平面. 比如, 令

$$
\mathrm{AC}[0,1] = \{x(t) \in L^2[0,1] : x(t) \text{ 在 } [0,1] \text{ 上绝对连续且 } x'(t) \in L^2[0,1]\}.
$$

定义线性算子

$$
Tx(t) = \mathrm{i}x'(t),
$$

其中

$$
\mathcal{D}(T) = \{x(t) : x(t) \in \mathrm{AC}[0,1]\}.
$$

对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 取 $x(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}$, 则 $x(t) \in \mathcal{D}(T), \|x(t)\| = 1$ 且

$$
\begin{aligned}
(Tx,x) &= \int_0^1 \mathrm{i}x'(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \mathrm{i}(-\mathrm{i}\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda,
\end{aligned}
$$

即 $W(T) = \mathbb{C}$.

下列性质说明线性算子数值域具有一定的平移性且在酉变换下保持不变.

性质 1.1.2　设 T, S 是 Hilbert 空间 X 中的有界线性算子, 则

(i) $W(\alpha T+\beta I)=\alpha W(T)+\beta$;

(ii) $W(T+S)\subset W(T)+W(S)$;

(iii) $W(U^*TU)=W(T)$, 其中 U 是酉算子 (即 $U^*U=UU^*=I$);

(iv) $\lambda\in W(T)$ 当且仅当 $\overline{\lambda}\in W(T^*)$;

(v) $W(\mathrm{Re}(T))=\mathrm{Re}(W(T))$ 且 $W(\mathrm{Im}(T))=\mathrm{Im}(W(T))$, 其中 $\mathrm{Re}(T)=\dfrac{T+T^*}{2}$, $\mathrm{Im}(T)=\dfrac{T-T^*}{2\mathrm{i}}$.

证明　根据数值域定义, 性质 (i)—(iii) 的证明是平凡的. 再考虑到 T 是全空间上的有界线性算子, T^* 也是全空间上的有界线性算子. 从而, 对任意 $x\in X, \|x\|=1$, 有

$$\begin{aligned}(Tx,x)&=(x,T^*x)\\&=\overline{(T^*x,x)},\end{aligned}$$

即 $\lambda\in W(T)$ 当且仅当 $\overline{\lambda}\in W(T^*)$. 性质 (v) 的证明完全类似. ∎

注 1.1.2　性质 (ii) 称为线性算子数值域的次可加性.

利用性质 1.1.2 可以计算 2×2 矩阵的数值域.

例 1.1.3　设 T 是 2×2 矩阵, 则 $W(T)$ 是以两个特征值为焦点的椭圆 (有可能退化为线段或点).

证明　考虑到数值域酉相似不变性, 不妨设 $T=\begin{bmatrix} a & c\\ 0 & b\end{bmatrix}$. 当 $c=0$ 时, 有

$$W(T)=\{a|x|^2+b|y|^2:|x|^2+|y|^2=1\},$$

这是连接复平面上点 a 和 b 的线段 (退化的椭圆).

当 $a=b, c\neq 0$ 时,

$$T=\begin{bmatrix} 0 & c\\ 0 & 0\end{bmatrix}+aI,$$

由例 1.1.1 可知, $W(T)$ 是以原点为圆心, 半径为 $\dfrac{|c|}{2}$ 的圆的平移 (平移的方向和大小由复数 a 的实部和虚部确定).

当 $a\neq b, c\neq 0$ 时, 有

$$T=\frac{a-b}{2}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{2c}{a-b}\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\frac{a+b}{2}I.$$

故只需讨论形如 $S=\begin{bmatrix} 1 & 2d \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的矩阵的数值域即可. 考虑到数值域酉相似不变性, 不妨设 $d>0$. 令 $A=\mathrm{Re}(S)+\mathrm{i}\gamma\mathrm{Im}(S)$, 则

$$A=\begin{bmatrix} 1 & d(1+\gamma) \\ d(1-\gamma) & -1 \end{bmatrix},$$

考虑到两个二阶矩阵 P,Q 酉相似的充要条件是

$$\det(P)=\det(Q),\quad \mathrm{tr}P=\mathrm{tr}Q,\quad \mathrm{tr}P^*P=\mathrm{tr}Q^*Q,$$

取 $\gamma=\dfrac{\sqrt{1+d^2}}{d}$, 则矩阵 A 与矩阵 $B=\begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{1+d^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 酉相似, 即

$$W(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\leqslant\sqrt{1+d^2}\}.$$

又因为 $\alpha+\mathrm{i}\beta\in W(S)$ 当且仅当 $\alpha+\mathrm{i}\gamma\beta\in W(A)$. 而

$$\partial W(A)=\{\sqrt{1+d^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}:\theta\in\mathbb{R}\},$$

于是

$$\begin{aligned}\partial W(S)&=\left\{\sqrt{1+d^2}\left(\cos\theta+\mathrm{i}\frac{1}{\gamma}\sin\theta\right):\theta\in\mathbb{R}\right\}\\&=\{\sqrt{1+d^2}\cos\theta+\mathrm{i}d\sin\theta:\theta\in\mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

从而 $W(S)$ 是椭圆且短半轴长为 d, 长半轴长为 $\sqrt{1+d^2}$. ∎

注 1.1.3 当线性算子 T 是 Hilbert 空间中的无界线性算子时, 性质 1.1.2 的 (iv) 不一定成立. 比如, 定义线性算子

$$Tx(t)=\mathrm{i}x'(t),$$

其中

$$\mathcal{D}(T)=\{x(t)\in L^2[0,1]:x(t)\in\mathrm{AC}[0,1],x'(t)\in L^2[0,1]\},$$

则由注 1.1.1 可知 $W(T)=\mathbb{C}$. 另一方面, 经计算易得

$$T^*x(t)=\mathrm{i}x'(t),$$

其中

$$\mathcal{D}(T^*)=\{x(t)\in L^2[0,1]:x(t)\in\mathrm{AC}[0,1],x'(t)\in L^2[0,1],x(0)=x(1)=0\}.$$

于是, 对任意 $x(t)\in\mathcal{D}(T^*)$, 有

$$\begin{aligned}(T^*x,x)&=\int_0^1 \mathrm{i}x'(t)\overline{x(t)}\mathrm{d}t\\&=\mathrm{i}x(t)\overline{x(t)}\big|_0^1-\mathrm{i}\int_0^1 x(t)\overline{x'(t)}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 x(t)\overline{\mathrm{i}x'(t)}\mathrm{d}t\\&=(x,T^*x).\end{aligned}$$

这说明, $W(T^*)\subset\mathcal{R}$. 所以, 存在 $\lambda\in W(T)$ 使得 $\overline{\lambda}\notin W(T^*)$.

1.1.3 线性算子数值域与算子分类

线性算子数值域几何形状和线性算子性质之间的关系是数值域重要研究课题之一. 如果 $T\subset T^*$ (即 $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*), T^*|_{\mathcal{D}(T)}=T$), 则称 T 是对称算子; 如果 $T=T^*$, 则称 T 是自共轭算子 (也称自伴算子); 如果 T 是对称算子且满足 $T\geqslant 0$ (即 $(Tx,x)\geqslant 0$), 则称 T 是非负算子; 如果 T,S 是对称算子且 $T-S\geqslant 0$, 则 $T\geqslant S$.

性质 1.1.3 设 T 是 Hilbert 空间 X 中的有界线性算子, 则

(i) $W(T)=\{\lambda\}$ 当且仅当 $T=\lambda I$;

(ii) $W(T)\subset\mathcal{R}$ 当且仅当 T 是自伴算子;

(iii) $W(T)$ 包含于平面内一条直线当且仅当 $T=\alpha A+\beta I$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 且 A 是一个自伴算子, 特别地, 在这种情况下 T 是个正常算子 (即 $T^*T=TT^*$);

(iv) $a\leqslant W(T)\leqslant b$ 当且仅当 $aI\leqslant T\leqslant bI$;

(v) $W(T)$ 包含于闭半平面 $\{\lambda\in\mathbb{C}:a\mathrm{Re}(\lambda)+b\mathrm{Im}(\lambda)+c\geqslant 0\}$ 当且仅当 $a\mathrm{Re}(T)+b\mathrm{Im}(T)+cI\geqslant 0$.

证明 (i) 当 $W(T)=\{\lambda\}$ 时, 对任意 $x\in X$ 有 $((T-\lambda I)x,x)=0$. 从而, 对任意 $x,y\in X$, 应用极化恒等式得

$$\begin{aligned}4((T-\lambda I)x,y)=&((T-\lambda I)(x+y),x+y)-((T-\lambda I)(x-y),x-y)\\&+\mathrm{i}((T-\lambda I)(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}((T-\lambda I)(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)\\=&0.\end{aligned}$$

考虑到 y 的任意性, 即得对任意 $x\in X$ 有 $(T-\lambda I)x=0$, 即 $T=\lambda I$. 反之, 当 $T=\lambda I$ 时, $W(T)=\{\lambda\}$ 的证明是平凡的.

(ii) 当 $W(T)\subset\mathbb{R}$ 时, 对任意 $x\in X$, 有

$$(Tx,x)=(x,Tx)=(T^*x,x),$$