



张奠宙 著

数学教育纵横

SHUXUE
JIAOYU ZONGHENG



广西教育出版社



SHUXUE JIAOYU ZONGHENG

数学教育纵横

(张奠宙自选集)

● 张奠宙 著

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教育纵横 / 张莫宙著. —南宁: 广西教育出版社, 2018.3 (2018.8 重印)

ISBN 978-7-5435-8408-2

I. ①数… II. ①张… III. ①数学教学-研究-中国
IV. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 301830 号

策 划 黄力平

责任编辑 邓 霞 林春燕

责任校对 何 云

装帧设计 刘相文

责任技编 胡庆团

出 版 人: 石立民

出版发行: 广西教育出版社

地 址: 广西南宁市鲤湾路 8 号 邮政编码: 530022

电 话: 0771-5865797

本社网址: <http://www.gxeph.com>

电子信箱: gxeph@vip.163.com

印 刷: 广西民族印刷包装集团有限公司

开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 34.25 插页 4 页

字 数: 510 千字

版 次: 2018 年 3 月第 1 版

印 次: 2018 年 8 月第 2 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5435-8408-2

定 价: 82.00 元

如发现印装质量问题, 影响阅读, 请与出版社联系调换。

自序

2017年元月的一天，上海的天空有点雾霾。望着窗外冬日暖暖的太阳，终于下决心坐下来写这本《数学教育纵横》的自序。取名“纵横”，是为了和“经纬”（《数学教育经纬》，江苏教育出版社，2003年）相呼应。事实上，这是两个不同时期的文字记录。

回顾我的数学教育人生，大致有三个阶段。

1956年，我从华东师范大学数学系的数学分析研究班毕业，到1986年兼职数学教育研究室的研究员，是为数学教育研究打基础的阶段。在这三十年里，既有为了向科学进军而埋头读书的日子，也有搞“教育革命”到车间田头办学上课的经历。既有去复旦大学随夏道行先生研究算子谱论的安静时光，也有“文革”十年的蹉跎岁月。总体上说还是打基础，扩视野，吸取正反面的经验教训。就以1958年“大跃进”时期的空想狂热来说，最后沉淀下来的是远远地望见了世界数学发展的路标，由此知道了有拓扑学、抽象代数、微分几何、泛函分析、微分算子、计算数学、运筹学等数学学科的存在。在国家经济困难的20世纪60年代初，潜心读书，力求走上数学研究的道路。正所谓站得高才能看得远，走得远才能看得清。

1986年，我因研究算子理论升任教授，同时受托兼任华东

师范大学数学系数学教育研究室的研究员。这成了我加入数学教育界的发端。从1986年进入数学教育界，到2001年68岁退休的15年，是我数学教育人生的第二个阶段，也是我学习国内外数学教育的探索阶段。幸运的是，我有机会到布达佩斯参加了1988年的第六届国际数学教育大会，并于1994年在华东师范大学主持了规模空前的ICMI-中国数学教育会议。由此一步步走向世界，以至担任过国际数学教育委员会（ICMI）的执行委员（1995—1998）。与此同时，我因研究现代数学史，结识了杨振宁先生和陈省身先生，并在王宽诚基金会的支持下到美国纽约市立大学、纽约州立大学（石溪）、加州伯克利的美国国家数学研究所进行了两年的访问。耳濡目染两位科学大师的言行，以及对国外数学教育状况的亲历，使我有了一定的全球视野。回国后借助长达14年的数学教育高级研讨班进行消化吸收，渐渐加深了对中国数学教育的理解，也更加尊崇中国数学教育。2003年，我70周岁，江苏教育出版社推出的《数学教育经纬：张奠宙自选集》记录了我这一阶段的心路历程。

进入21世纪，我翻开了学术人生的又一页。新世纪到来的时候，国家经济开始起飞，教育经费大幅增加，国家拨专款开展课程改革。政府主导的课程改革，倡导“自主、探究、合作”的教育理念，建立基础教育各科的课程标准，大幅度修订教材，直至改变课堂教学模式。我有幸和严士健教授一起担任了高中数学课程标准制定组的组长。这次课改的大方向无疑是正确的，但是有些做法有待细细斟酌。由于我知道中国学生在IAEP国际测试中的数学成绩遥遥领先，并已经产生了重大的国际影响，也知道中国数学教育界有“双基”（基础知识和基本技能）教学的传统，具有鲜明的中国特色，因而在工作中保留了自己的看法。例如，在《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》里没有提及“双基”，但在高中数学课程标准里却明确强调“双基”。我除参与高中数学课程标准的研制之外，还在2003年和2004年组织高级研讨班研讨数学“双基教学”，并主编《中国数学双基教学》（上海教育出版社，2006年），

目的是尝试把“双基教学”系统化和理论化，将它作为中国数学教育的特色推向世界。

2001年，我68岁退休。退休之后，没有了团队，没有了学生，没有了项目，我成了“孤家寡人”。但有一个好处，就是有大把的时间，在领导、朋友和同行的支持下可以静心写作。2002年，国际数学家大会在北京召开，我适时推出《20世纪数学经纬》、《数学无国界：国际数学联盟的历史》（译作），编辑《陈省身文集》，随后出版《陈省身传》，在现代数学史研究上做了一番努力。与此同时，在数学教育方面，力求发表有创新性的研究成果。具体说来，有以下尝试：

●编写具有中国特色的《数学教育学》。2004年，与宋乃庆教授一起主编《数学教育概论》，以全新的国际视野阐述数学教育学特定的规律，以大量的中国数学教育教学案例（包括“数学双基教学”）彰显中国特色，以理论篇和实践篇的分述帮助读者更好地走上教学岗位。

●主持编写《中国数学教育研究丛书》（广西教育出版社，2006—2012年）。邀请著名学者撰写具有中国特色的数学教育专著共17卷，系列化地展现中国数学教育研究成果。该丛书被列为国家“十一五”重点图书出版规划项目。

●在树立民族自信的信念驱动下，研究数学教育的中国特色，出版《中国数学双基教学》（上海教育出版社，2006年）、《数学教育的中国道路》（上海教育出版社，2013年）。

●开拓“数学欣赏”的研究领域，以中国古诗意境阐发数学内涵。出版《情真意切话数学》《数学文化教程》。

●开拓大学数学教育研究领域。出版《大学数学教学概说》（高等教育出版社，2015年），这是关于大学数学教育的第一本著作。

●系列研究小学数学教材。在2014~2015年的两年中，发表了近30篇评论现行小学数学教材的文章，找出教材中存在的缺失，

给出改进的建议，引起小学数学教育界的重视，目前上海教育出版社已据此出版了《小学数学教材中的大道理》。

在出版这些著作之后，还有一些见于各处的单篇文字，也有一点特色。将它们汇集起来，就是本书的任务了。广西教育出版社的老朋友黄力平知道了，就爽快答应在他那里出版。与力平老友相交已有几十年，早在我刚刚踏进数学教育圈，还默默无闻的时候，他就帮忙刊印我的一些著作，多年来我心存感激。他对我说，那就在2018年推出，算是《数学教育经纬》之后15年工作的一次总结，也凑巧是您85岁，向您表示庆贺之意。老友盛情，感人肺腑。

翻检从2003年以来关于数学教育研究的文字，可以分为以下几编，并大体按发表时间先后顺序排列。

第一编，涉及“数学教育的中国特色”。这是我近十年来的主要工作领域。其中开头两篇是正面论述数学教育的中国道路以及未来发展，接着是讨论中华优秀传统文化对数学教育的影响，从历史角度考察数学教育如何拒绝杜威的实用主义教育。这一编里的一个关键词是“数学双基教学”，以及后来发展的“四基”模型。那篇总结我数学教育研究心路历程的文章，算是对这一时期的回顾与检讨。数学教育的中国道路涉及面很广，例如数学教育原则、数学文化欣赏和数学的教育形态等，这些在国际上少有论述。有两篇谈到从工具性理解到创新性理解，以及理解与记忆的关系，这是有关学习心理学的文章，立足于我国自己的实践，具有一定的实证价值。还有一篇记录了中国数学教育走向世界的一些事实，希望有助于增强民族教育的自信。

第二编，是对数学教育新视角的论述。其中有许多是特约稿，如改革开放30年的教学教育回顾、重大的数学教育论争和21世纪前十年的教学教育预测与回顾等。更多的是有关数学学科德育、基本数学教学方法、基本数学活动经验、数学教学中的合作学习等的阐述。还有一些则是触及当时现实的“商榷”与“论争”的文字。无论如何，这些文字都是那个时代的一种历史记录。

第三编，是关于数学文化和数学欣赏的文字。十余年来，我在这方面着力颇多，把相关文字集中起来，便于浏览。

第四编，则是一组访谈录。那是在2005~2009年的几年间，和有关同事的谈话记录。这些谈话，比较生动地记叙了一些数学教育故事，也是一份历史记录。

编完本书之后，觉得遗憾很多。对读者来说，一个重大的麻烦是重复。一个观点在许多文章中反复出现。尤其是“三根导线”的例子和对顶角相等证明的分析，就被反复使用了 N 次，肯定令人生厌。但是它们都嵌入了原文，无法删去。因此，深感对不起读者，请大家原谅。

60年的数学教学生涯，弹指一挥间。平生没有什么大的作为，无非是教书、写作两件事情。简单地总结是：

数学，数学史，数学教育，文章千古事；

教书，教书匠，教书育人，得失寸心知。

近些年来，我几进几出医院。80多岁的老人，一旦疾病缠身，什么事情都有可能发生。我将文稿的电子稿发往广西教育出版社，力平回信说他会亲力亲为做好编辑工作。

展望未来，中国的数学教育一定会有进一步的发展。2020年国际数学教育大会将在上海召开，这也许是展示中国特色的一个重要契机。如果本书的出版能多少有点帮助，幸甚至哉。



2018年1月于上海

目 录

自 序 / 1

第一编 数学教育的中国特色 / 1

一、数学教育的中国道路 / 2

二、未来十年中国数学教育展望 / 26

三、中华文化对今日数学教育之影响 / 32

四、中国数学教学中的“双基”和开放题问题解决 / 41

五、“四基”数学模块教学的构建

——兼谈数学思想方法的教学 / 62

六、中国数学教育拒绝实用主义

——从徐光启、傅种孙到姜伯驹 / 74

七、建设中国特色数学教育学的心路历程 / 84

八、数学教学原则研究 / 133

九、数学教学中记忆与理解关系的调查研究 / 144

十、工具性理解、关系性理解和创新性理解 / 153

十一、教育数学是具有教育形态的数学 / 167

十二、数学文化课程需要系统化的总体设计 / 178

十三、数学和古典诗词的意境 / 195

十四、学科教育：教育发展的战略重点 / 201

十五、用西方话语体系诠释中国数学教育 / 212

十六、一个期盼：建设中国数学教育学派 / 217

第二编

十七、中国数学教育发展的一个标志 / 220

数学教育述评 / 225

一、期盼中国教育科学研究具有“大国”风范 / 226

二、代数教学中的模式直观 / 233

三、对《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》理念部分的意见 / 243

四、让我们来重新认识“三角”

——兼谈数学教育要在数学上下功夫 / 251

五、《数学教育学报》的筹办、发展与展望 / 255

六、“基本数学经验”的界定与分类 / 266

七、关于“现实数学”与“数学现实” / 275

八、数学教育改革开放 30 年 / 284

九、在坚实的基础上谋求创新发展

——数学教育 60 年回顾 / 295

十、21 世纪前 10 年数学教育：预测和回顾 / 301

十一、弹指二十年，《导引》谱新篇

——《数学教育研究导引（二）》导读 / 312

十二、上海中小学数学教材应该有一个新的进展 / 319

十三、架起沟通语文和数学两科教学的桥梁 / 324

十四、因式分解怎么教 / 329

十五、珠算进入 2011 年版数学课程标准的参与经过 / 333

第三编

数学文化与数学欣赏 / 338

一、中国的皇权政治与数学文化 / 339

二、数学证明·数学意识·数学文化

——为萧文强先生光荣退休而作 / 348

三、关于数学史和数学文化 / 353

四、构建学生容易理解的数学教育形态

——数学和人文意境融合的 20 个案例 / 363

五、数学文化呈现的若干教学案例 / 378

六、一份“函数单元”的文化清单 / 389

七、万变不离其宗

——数学欣赏：欣赏数学中的不变量与不变性质 / 394

八、欣赏数学的真善美 / 399

九、数学欣赏：一片等待开发的沃土 / 412

十、数学欣赏论文点评选载 / 421

十一、数学归纳法与愚公移山故事 / 431

十二、八十老翁对话中美数学教育 / 434

第四编 数学教育访谈录 / 438

一、张奠宙、陈省身谈话录：陈省身谈数学教育 / 439

二、张奠宙、李旭辉谈话录：聚焦美国数学教育改革

——从一则美国的数学教育新闻谈起 / 443

三、张奠宙、李旭辉谈话录：关于数学知识的学术形态和教育形态 / 447

四、张奠宙、李旭辉谈话录：《成功需要基础》给我们的启示 / 450

五、张奠宙、冯承德、徐云华谈话录：中国数学教育的软肋——高中空转

——冯祖鸣老师等访谈录 / 455

六、张奠宙、冯承德、徐云华谈话录：没有批评表扬的学校管理

——在美国中学任数学教师的一些个人感受 / 459

七、张奠宙、张荫南谈话录：关于数学问题解决的谈话 / 463

八、张奠宙、毛宏德谈话录：为什么澳大利亚的学校没有升学压力 / 469

九、张奠宙、康士凯、邹一心谈话录：从20年来的课程改革看今天 / 474

十、张奠宙、顾鸿达、康士凯、朱成杰谈话录：从1939年的数学高考试卷谈起 / 483

十一、张奠宙、张景中、王鹏远谈话录：超级画板有了免费版和“方便面” / 489

十二、张奠宙、黄毅英谈话录：关于东西方数学教育观念的碰撞 / 497

十三、方均斌、李秉彝、张奠宙谈话录：数学教育三人谈 / 502

十四、邹佳晨、张奠宙、汪晓勤、李旭辉访谈录：究竟什么是方程

——析“含有字母的等式叫方程”之误 / 518

附录 张奠宙著作目录 / 525

第一编

数学教育的中国特色

第一编共十七篇文章，集中论证了数学教育的中国特色，以及对未来的展望。其中包括中华文化对今日数学教育的影响，拒绝杜威的实用主义教育观，作者在国际数学教育大会上所做的报告，以及“数学双基教学”“数学‘四基’”“数学理解”“数学教学原则”“记忆与理解”“教育数学”等重大课题的理论探讨，并总结了作者在研究这一过程中的心路历程。接下来几篇有关数学文化的建设和中国数学教育走向世界的一些历史性文字，是一种新的思考。关于数学学科教育的论述，不再依附“三论”（教学论、学习论、课程论）学说，力图走自己的路。

一、数学教育的中国道路

我国古代的数学和数学教育，有过辉煌的历史，但在宋元以后渐渐落伍。清末民国初期废科举、兴学校，数学教育开始向民众普及。不过，那时中小学的数学课程，并非植根于中国传统数学教育，而是另起炉灶，全盘从西方引进的。一百多年来，中国数学教育博采众长，采取兼容并包的方针，终于走出了一条具有中国特色的数学教育道路。进入21世纪以来，中国数学教育已经成为世界同行关注的一个焦点。上海在PISA国际测试中的优异成绩进一步使世界的目光聚焦于中国。中国数学教育正在大步走向世界。本文拟探讨数学教育中国道路的形成，研究其基本理念，总结我国数学课堂教学的主要特征。与此同时，分析、克服存在的弱点，进一步深化数学教育的改革。

（一）中国数学教育道路的基本内涵

辛亥革命以后，我们注重学习西方文化的精髓。数学教育也是如此。我们先学日本，辗转引进赫尔巴特的教育学说。继之崇尚欧美，包括美国杜威的进步主义教育。1949年，新中国成立之后，又全面学习苏联（一个数学超级大国）的经验。实行改革开放政策之后，我们更是全方位地引进欧美数学教育理念。可以说，像中国这样，既具有悠久的数学教育文化积淀，又能全方位地从包括苏联和美国在内的国外数学教育吸取营养的国家不多。

经过半个多世纪的努力，大约在20世纪60年代初，我国基本完成了数学教育的本土化历程。一个标志性的事件是1963年《全日制数学教学大纲（草案）》的公布。这份大纲，通过总结正反两方面的经验教训，确立了中小学的数学课程体系，构筑了“数学双基教学”的理念，提出了“数学三大能力”，总结出适合中国国情的课堂教学环节。可以说，中国数学教育的特色由此初步形成。

此后的“文革”十年使得数学教育受到严重的创伤。但是即便如此，在中国固有数学教育传统的支撑下，广大数学教师用自己的努力维

持教学秩序,体现出中国数学教育传统的韧性。中国经济起飞,有中国数学教育的一份不可磨灭的贡献。其中的历史经验,也是数学教育中国道路的一个组成部分。

世界认识中国数学教育,是从中国的中学生参加国际数学奥林匹克竞赛开始的。从1989年开始,中国多次获得这一项竞赛的总分第一,为世界瞩目。至于中国数学教育的整体状况,则以1989年的国际教育成就评价(International Assessment of Education Progress,简称IA-EP)为肇始。在那次周密组织的抽样测试中,中国大陆13岁学生的数学成绩以80%的正确率位居第一,领先于第二位(73%)的韩国和中国台湾的学生。2009年,中国上海初中学生参加国际学生评估(PI-SA)测试,数学成绩居于第一位。

这一现象,很自然地引起国外教育界对中国数学教育的关注。1996年,曾在香港任教的澳大利亚著名学者维金斯和别格斯合著的 *The Chinese Learner: Cultural, Psychological and Contextual Influences*, 提出了一个问题:“为什么华人学习者能够取得优良的学习成绩,但是他们的教学过程看起来却非常陈旧?”^[1] 这就是所谓的“中国学习者悖论”。西方学者无法理解,为什么教育经费投入严重不足的中国,却能够取得优良的国际测试成绩?为什么中国数学教育方式看起来属于死记硬背一类,中小學生却能够在数学理解上超过国外的中小學生?西方发达国家建立了许多数学教育理论,固然能够揭示一些数学认知的普适规律,但却无法解释中国数学教育所取得的成就,因而称之为“悖论”。

实际上,中国数学教育之所以能够有成功的一面,并不是不能解释的“悖论”。只是由于没有系统地研究中国数学教育的特殊道路,因而无法加以解释而已。

这里,我们不妨回忆一位老教育家的真知灼见。华东师范大学刘佛年教授这样说过:

我从旧中国的教育看到新中国的教育,经历过几十年来的风风雨雨

[1] WATKINS D. A., BIGGS J. B. *The Chinese learner: cultural, psychological and contextual influences* [M]. Hong Kong: CERC&ACER, 1996.

雨。教育无非是两种。一种是讲授式,教师以高水平、启发式的讲解,让学生容易接受。代表人物是赫尔巴特、夸美纽斯和凯洛夫。另一种是活动式,创设情境,让学生在活动中探索,主动地获得知识。代表人物是杜威。两者各有长短。那么我们中国应该采取什么态度呢?那就是兼容并包,不能走极端。一般地说,做学问可以有自己的特色,以便形成独特的学派。但是,指导实际工作、干事,不能走极端,真理往往在两个极端的中间。〔1〕

这就是说,兼容并包,把国际上各种优秀教育理念综合地进行理论分析和实践检验,中国数学教育已经走出了一条具有东方智慧的道路。

那么,现代中国数学教育如何定位?数学教育的“中国道路”应该怎样表述?如何实事求是地认识自己的长处和短处?我们不妨做如下概括:

中国数学教育,以人的全面发展理论为指导,继承中国几千年来的优秀教育传统,采取兼容并包、博采众长、扎根本土、勇于实践的态度,进行了百年实践。

中国数学教育特色的核心是:“在良好的数学基础上谋求学生的数学发展。”这里的“数学基础”主要是数学“双基”(数学基础知识和基本技能)和三大数学能力(数学运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力)。数学发展是指注重数学活动经验的积累,提高学生用数学思想方法分析问题和解决问题的能力,促进学生在德、智、体等各方面的全面发展。

中国数学教育避免走极端,即主张教师主导作用与学生主体性的辩证统一;打好基础与创新发展的有效平衡;接受性学习和探究性学习的适度对接;数学思维中理解与熟练的交互影响;数学学科知识与教学知识的有机结合。

与此相应的教学方式突出“数学内容本质的理解”。其主要特征包

〔1〕 摘自凤凰网2011年10月15日发布的凤凰视频“华东师大名师云集,入选中国首批重点高校”,<http://v.ifeng.com/news/society/201110/396bdc11-ee8e-4da4-bbf3-c37bb8a387d5.shtml>。

括数学新知的导入教学、数学尝试教学、教师主导下的师班互动教学、数学变式教学以及数学思想方法教学等。

我们将在下面进一步论述数学教育中国道路的理念和特征。

（二）中国数学教育道路的文化背景

中国的数学教育重视基础知识和基本技能的教学，并坚持在此基础上谋求学生的全面发展。形成这样的理念绝非偶然，这是几千年来中华文明发展的必然结果。

第一，是农耕文化的影响。中国历史上，从天子亲耕，皇后亲蚕，到循吏劝农，无非就是要调动农民的生产积极性，使农民勤于生产。中国农民在田地里辛勤劳动的美德，为中国读书人提供了勤奋的榜样。勤劳的美德移到教育上来，就是强调“苦读”。精耕细作的勤奋，反映在数学教育上，就是倡导熟能生巧，要求背诵“九九表”，熟悉算法，注重解题。

第二，是儒家文化中的演绎思考的影响。儒家学说在整体上作为演绎体系呈现。这就是说，儒家经典相当于公理；大学问家的注释，相当于由公理出发进行的推理；读书人写八股文章，只是将公理和推理拼接起来的一个作业。因此，在学术逻辑架构上，数学和儒家并不发生抵触。事实上，清朝统治者从来没有害怕过西方数学，更没有反对过西方数学。

第三，是考试文化对数学教学具有正面和负面的作用。正面作用是：激励机制，明确方向；重视基础，善于书面表达，完美准确地给出答案。负面作用在于功利主义倾向。“书中自有黄金屋”“学而优则仕”等。在评价方法上，“一次性的、限时限刻的笔试”只能考查“基础”，特别是能够比较客观、公平地打分的那些“基础”。这样的考试成绩也只能反映应试者的知识识记水平，难以反映其发现创新、公关交流和合作领导等能力。

第四，是考据文化对数学教育的影响。清代中叶以戴震、阮元等为代表的考据学派注重证据的考证研究方法，与数学的逻辑严谨性十分接近。考据学派中的相当一部分人都是数学家，这并非偶然。