



# 当代世界中的数学

## 数学之路

朱惠霖 田廷彦 〇 编

SHUXUE ZHILU





# 当代世界中的数学

## 数学之路

朱惠霖 田廷彦 ○ 编



## 内 容 提 要

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用,同时收集了数学中典型的问题并予以解答,本书共分两编,分别为回顾与展望、当代数学人物.

本书可供高等院校师生及数学爱好者阅读.

### 图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学. 数学之路/朱惠霖,田廷彦编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2019. 1

ISBN 978-7-5603-7388-1

I. ①当… II. ①朱… ②田… III. ①数学—普及读物  
IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 108844 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.25 字数 317 千字

版 次 2019 年 1 月第 1 版 2019 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-7388-1

定 价 38.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

## 序 言

如今,许多人都知道,国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志,一本是《自然》(*Nature*),一本是《科学》(*Science*)。

恐怕有许多人还不知道,在我们中国,有两本与之同名的杂志<sup>①</sup>,而且也是跨学科的学术性杂志,只是通常又被定位为“高级科普”。

国际上的《自然》和《科学》,一家在英国,一家在美国<sup>②</sup>。它们之间,按维基百科上的说法,是竞争关系<sup>③</sup>。

我国的《自然》和《科学》,都在上海,它们之间,却有着某种历史上的“亲缘”关系。确切地说,从1985年(那年《科学》复刊)到1994年(那年《自然》休刊)这段时期,这两家杂志的主要编辑人员,原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门,甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志,创刊于1978年5月。那个年代,被称为“科学的春天”。3月,全国科学大会召开。科学工作者、教育工作者,乃至莘莘学子,意气风发。在这样的氛围下,《自然》的创刊,是一件大事。全国各主要媒体,都报道了。

这本《自然》杂志,设在上海科学技术出版社,由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编,又调集精兵强将,组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子。正是这个编辑班子,使得《自然》杂志甫一问世,便不同凡响;没有几年,便蜚声科学界和教育界<sup>④</sup>。

1983年,当这个班子即将一分为二的时候,上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说,在上海出版界,还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错。1983年,中共上海市委宣传部发文,将《自然》杂志调往上海交通大学。为什么? 此处不必说。我只想说,这次强制性的调动,却有一项

---

① 其中的《自然》杂志,在创刊注册时,不知什么原因,将“杂志”两字放进了刊名之中,因此正式名称是《自然杂志》。但在本文中,仍称其为《自然》或《自然》杂志。此外,应该说明,在我国台湾,也有两本与之同名的杂志,均由民间(甚至个人)资金维持。台湾的《自然》,创刊于1977年,系普及性刊物,内容以动植物为主,兼及天文、地理、考古、人类、古生物等,1996年终因财力不济而停办。台湾的《科学》,正式名称《科学月刊》,创刊于1970年,以介绍新知识为主,“深度以高中及大一学生看得懂为原则”,创刊至今,从未脱期,令人赞叹。

② 英国的《自然》,创刊于1869年,现属自然出版集团(Nature Publishing Group),总部在伦敦。美国的《科学》,创刊于1880年,属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science),总部在华盛顿。

③ 可参见 [http://en.wikipedia.org/wiki/Science\\_\(journal\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal))。

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008年第51期上的“一本科普杂志的30年‘怪现象’”一文。

十分温情的举措,即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利.结果是,大约一半人选择去交通大学,大约一半人选择不去,留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半.留下的那一半,情况如何,一时不得而知.但是到1985年,便知道了:他们组成了《科学》编辑部,《科学》杂志复刊了!

《科学》,创刊于1915年1月,是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊,对于中国现代科学的萌发和成长,有着独特的贡献.中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事:华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于1950年5月停刊,1957年复刊,1960年又停刊.1985年的这次复刊,其启动和运作,外人均不知其详,但我相信,留下的原《自然》杂志资深编辑,特别是吴智仁先生和潘友星先生,无疑是起了很大的甚至是主要的作用的.复刊后的《科学》,由时为中国科学院副院长的周光召任主编,上海科学技术出版社出版.

于是,原来是一个编辑班子,结果分成两半(各自又招了些人马),一半随《自然》杂志披荆斩棘,一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后,命运多舛.1987年,中共上海市委宣传部又发文:将《自然》杂志从交通大学调出,“挂靠”到上海市科学技术协会,属自收自支编制.至1993年底,这本杂志终因入不敷出,编辑流失殆尽(整个编辑部,只剩我一人),不得不休刊了.1994年,上海大学接手.原有人员,先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种“亲缘”关系,至此结束.

这段多少有点辛酸的历史,在我编这本集子的过程中,时时在脑海里浮现,让我感慨,让我回味,也让我思索……

好了,不管怎么说,眼前这件事还是让人欣慰的:在近20年之后,《自然》与《科学》的数学部分,竟然在这本集子里“久别重逢”了!

说起这次“重逢”,首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生.是他,多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册;是他,了解《自然》和《科学》的这段“亲缘”关系,建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来,实现了这次“重逢”;又是他,在上海教育出版社申报这一选题,并获得通过.

其次,要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生.是他,当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时,毅然伸手相助,接下了这项出版任务<sup>①</sup>.

当然,还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生.是他,精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人,加上我,用时下很流行的说法,都是不折不扣的“数学控”.我们

---

<sup>①</sup> 说来有趣,我与刘培杰先生从未谋面,却似乎有“缘”已久.这次选编这本集子,发觉他早年曾向《自然》杂志投稿,且被我录用,即收入本集子的《费马数》一文.屈指算来,那该是20年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情,为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者(相信其中也有不少的“数学控”)献上这本集子,献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章。

这里所说的“数学文章”,不是指数学上的创造性论文,而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章,以及关于人物和史实的介绍性文章。其实,这些文章,都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章。

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦(Jeremy Bernstein, 1929— )的说法,在与公众交流方面,数学家排在最后一名<sup>①</sup>。大概是由于这个原因,国际上的《自然》和《科学》,数学文章所占的份额,相当有限。

然而,在我们的《自然》和《科学》上,情况并非如此。在《自然》杂志上,从1984年起就常设“数林撷英”专栏,专门刊登数学中有趣的论题;在《科学》杂志上,则有类似的“科学奥林匹克”专栏。许多德高望重的数学大师,愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述;许多正在从事前沿研究的数学家,乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者。在数学这个需要人类第一流智能的领域,流传着说不完道不尽的趣事佳话,繁衍着想不到料不及的奇花异卉。这些,都在这两本杂志上得到了充分的反映。

在编这本集子的时候,我们发觉,《自然》(在下文所说的时期内)和《科学》上的数学好文章是如此之多,多得简直令人苦恼:囿于篇幅,我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难,最终又不得不忍痛割爱。即使这样,篇幅仍然宏大,最终不得不考虑分册出版。

现在这本集子中的近200篇文章,几乎全部选自从1978年创刊至1993年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志,和从1985年复刊至2010年年底这段时期的《科学》杂志。它们被分成12个版块,每个版块中的文章,基本上以发表时间为序,但少数文章被提到前面,与内容相关的文章接在一起。

还要说明的是,在“数学的若干重大问题”版块中,破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作,以全面反映当时国际数学界的大事;在“数学中的有趣话题”版块中,破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”,田廷彦先生对这篇文章钟爱有加;在“当代数学人物”版块中,所介绍的数学人物则以20世纪以来为限。

这本集子中的文章,在当初发表时,有些作者和译者用了笔名。这次选入,仍然不动。只是交代:在这些笔名中,有一位叫“淑生”的,即本人也。

照说,选用这些文章,应事先联系作译者,征求意见,得到授权。但有些作译

---

<sup>①</sup> 参见 Mathematics Today: Twelve Informal Essays, Springer-Verlag(1978)p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者,他们的联系方式,早已散失;不少作译者,由于久未联系,目前的通信地址也不得而知;还有少数作译者,已经作古,我们不知与谁联系.在这种情况下,我们只能表示深深的歉意.更有许多作译者,可说是我们的老朋友了,相信不会有什么意见,不过在此还是要郑重地说一声:请多多包涵.

在这些文章中,也融入了我们编辑的不少心血.极端的情况是:有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲,再参考作者已发表的论文,越俎代庖地写成的.尽管我们做编辑这一行的,“为他人作嫁衣裳”,似乎是份内的事,但在这本集子出版的时候,我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑,一一介绍如下,并对其中我的师长和同仁、同行,诚致谢忱.

《自然》上的数学文章,在我1982年2月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前,基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑;在这之后到1987年先生退休,是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果.此后,又有张昌政先生承担了大量编辑工作;而计算机方面的有关文章,在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章,在复刊后,先是由黄华先生负责编辑,直至1996年他出国求学;此后便是由田廷彦先生悉心雕琢,直到现在;其间静晓英女士也完成了一些工作.当然,《科学》杂志负责复审和终审的编审,如潘友星先生、段韬女士,也是付出了心血的.

回顾往事,感悟颇多.但作为这两本杂志的编辑,应该有这样的共同感受:一是荣幸,二是艰辛.荣幸方面就不说了,而说到艰辛,无论是随《自然》杂志流离,还是在《科学》杂志颠沛,都可用八个字来概括:“筚路蓝缕,以启山林”.

是的,筚路蓝缕,以启山林!

如今,蓦然回首,我看到了:

一座巍巍的山,一片苍苍的林!

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任

朱惠霖

2017年5月于沪西半半斋

**第一编 回顾与展望 // 1**

- 对中国数学的展望 // 3  
 最近数学的若干发展和中国的数学 // 5  
 21 世纪的数学展望 // 10  
 数学科学百年回顾 // 18  
 拓扑学 100 年(1935 年以前) // 29  
 拓扑学 100 年(1935 年以后) // 36  
 菲尔兹奖与 20 世纪数学(一) // 44  
 菲尔兹奖与 20 世纪数学(二) // 53  
 菲尔兹奖与 20 世纪数学(三) // 61  
 菲尔兹奖与 20 世纪数学(四) // 70

**第二编 当代数学人物 // 79**

- 我的朋友——几何学家陈省身 // 81  
 名师与高徒——陈省身与丘成桐 // 84  
 一代学者陈建功 // 91  
 为了科学教育事业不懈奋斗——祝贺苏步青教授九十华诞 // 109  
 辛勤耕耘,硕果累累——祝贺柯召先生八十大寿 // 118  
 李国平先生传略 // 123  
 辛勤耕耘五十载——记数学家程民德教授 // 129  
 冯·诺依曼——多才多艺的现代数学家 // 137  
 哥德尔生平简述 // 147  
 乔治·波利亚 // 159  
 应用数学大师柯朗 // 171  
 现代概率论的奠基人——柯尔莫戈洛夫 // 177



当代富有色彩的数学家——斯梅尔	//	183
斯梅尔教授的青少年故事	//	195
西格尔:从1921到1981	//	200
一位驰骋世界数坛的怪杰——哈尔莫斯	//	205
斯卡夫与不动点算法	//	213
“看你怎么做!”——美籍华裔数学家李天岩教授的一番谈	//	220
怯不畏虎的创造论哲理——应用数学家轶事数则	//	226
马丁·加德纳——一位把数学变成画卷的艺术大师	//	230
编辑手记	//	238

---

# 第一编

回顾与展望

---



## 对中国数学的展望\*

**数**学是一门古老的学问. 在现代社会中, 因为科学技术的进展和社会组织的日趋复杂, 数学便成为整个教育系统的一个重要组成部分. 计算机的普遍应用, 也引起了许多新的数学问题. 从几千年的数学史来看, 当前是数学的黄金时代. 数学工作者的人数是空前的, 可以说, 健在的数学家的人数超过了历史上出现过的数学家人数的总和. 国家社会供养着许多人专门从事数学工作, 这是史无前例的. 这个现象促进了数学的巨大进步, 并到了日新月异的程度. 现在第一流大学或研究院所讲的数学, 往往是二三十年前所不存在的.

不同于音乐或美术, 数学的弱点是一般人无法了解的. 在这方面数学家所做的通俗化的工作是值得称赞的, 但一般人总与这门学问隔着一段距离, 这是不利于发展的. 数学是一个有机体, 要靠长久不断的进展才能生存, 进步一停止便会死亡.

为什么要搞数学呢? 答案很简单: 其他的科学要用数学. 我先讲一个故事: 甲乙二人在中学同班, 毕业后各奔前程. 有一天相见了, 甲便问乙: 你这几年做什么事? 乙说: 我研究统计, 尤其是人口问题. 甲便翻看了乙的论文, 见到许多公式, 尤其屡见  $\pi$  这个符号. 甲说: 这个符号我在学校时念过的, 是圆周长与直径的比率, 想不到它会和人口问题发生了关系.

\* 陈省身,《自然杂志》第4卷(1981年)第1期. 本文是1980年春,陈省身在北京大学、南开大学和暨南大学讲话的增订稿.

在中国,通常把实现现代化比喻成第二次长征.数学在这个长征中是小小的一环.法国大数学家庞加莱(Henri Poincaré)说:“在科学的斗争中,敌人是永远在退却的.”因此这次长征比第一次幸运多了,但困难是近代科学浩如烟海,又是不断在进展,胜利将是遥远的,同样需要艰苦的工作.

在向现代化进军中,数学是占一些便宜的:第一,设备需要极少;第二,研究方向不是很集中.因此小国家和小的学校都可以有活跃的数学环境和受人尊敬的数学家.波兰、芬兰都是有名的例子.

通常把数学分为纯粹的和应用的,其实这条分界线是很不确定的.好的纯粹数学往往有意想不到的应用.爱因斯坦广义相对论所需的微分几何,黎曼(B. Riemann)在六十多年前已经发展了.量子力学所需的算子论,希尔伯特(D. Hilbert)早已奠定了它的数学基础.近年来理论物理的研究中,统一场论是一个热门.去年萨拉姆(Salam)和温伯格(Weinberg)因为统一了电磁场与弱作用场而获得诺贝尔奖.它的数学基础是杨振宁和密尔斯的规范场论.后者在微分几何中叫作联络,它的几何与拓扑性质,是近三十多年来微分几何研究的主要对象之一.

微分几何是微积分在几何上的应用.我不能不提它的曲线论在分子生物学上的作用.我们知道,DNA的构造是双螺旋线.它的全挠率的研究引用到怀特(James White)的公式.这是当今实验分子生物学的一个基本公式.

这些贡献在纯粹数学上有开创性,在应用上成为基本的工具,是第一流的应用数学.

中国的近代数学,发展较日本为晚.但中国数学家的工作,有广泛的范围,有杰出的成就.缺点是人数太少.比较起来,美国数学会的会员人数多达近万人!

要使中国数学突进,个人意见,应注意以下两点:

第一,要培养一支年轻的队伍.成员要有抱负,有信心,肯牺牲,不求个人名誉和利益.要超过前人,青出于蓝,后胜于前,中国数学如在世界取得领导地位,则工作者的名字必然是现在大家前所未闻的.

第二,要国家的支持.数学固然不需要大量的设备,但亦需要适当的物质条件,包括图书的充实,研究空间的完善,以及国内和国际交流的扩大.一人所知所能有限,必须和衷共济,一同达成使命.

我们的希望是在21世纪看见,中国成为数学大国.

## 最近数学的若干发展和中国的数学<sup>①</sup>

数学是一门演绎的学问,从一组公设,经过逻辑的推理,获得结论.因此结果是十分强大的.它会有用,是可以想象的.但应用的广泛与深刻,则到了神妙的地步,非常理可以预料的.下面就最近数学的发展,讲叙若干故事为谈助.

### 一、有限单群

数学的发展中有一个突出的观念叫作“群”.要研究群的结构,自然应研究群的支群,即在同一运算下成群的支集.命 $G$ 为群, $H \subset G$ 为一支群.如对任意 $g \in G, g^{-1}Hg \subset H$ ,则 $H$ 称为正则(normal)的.正则支群的存在,可使群 $G$ 的研究变为支群 $H$ 及商群 $\frac{G}{H}$ 的研究,而因此简单化.

大致说来,没有正则支群的群叫作单群(simple group).这名词有点滑稽,显然单群并不简单.关于单群,有限群论中有一个深刻的定理,叫作费特—汤普森(Feit-Thompson)定理:单群的级(order,即元素的个数)是偶数.

有限群论的一个奇特现象,是除了一些传统群外,有某些零星的单群.现在所知最大零星单群的级是

$$808017 \cdots 000000$$

共有54位数.这是菲舍尔(B. Fischer)与格里斯(R. Griess)发现的.数学家叫它为“怪物”(monster).这当然是一个十分奇

① 陈省身,《科学》第49卷(1997年)第1期.

怪的群. 有专家说, 所有的有限单群都在这里了. 这个结果的证明, 听说需要 1 000 页, 也没有人完全写下来. 千页的证明, 含有错误的可能是很大的.

这样, 数学就起了疑问: 长证明算不算证明? 计算机检验到某一高度算不算证明? 这是目前的一个聚讼的问题.

## 二、椭圆曲线

所谓费马(P. de Fermat, 1601—1665) 的最后定理说, 方程式

$$x^n + y^n = z^n, n > 2, xyz \neq 0$$

没有整数解( $x, y, z$ ).

这个传说了 300 多年的结果, 后来由英国数学家怀尔斯(Andrew John Wiles, 1953— ) 及泰勒(Richard Taylor) 证明了. 这当然是近几年来数学界的一件大事. 全文见 1995 年的《数学年刊》<sup>[1,2]</sup>.

证明中使用的一个基本工具, 叫作“椭圆曲线”. 这是代数数论的一支. 有以下一则故事: 英国的大数学家哈代(G. H. Hardy, 1877—1947) 有一天去医院探望他的朋友印度天才数学家拉马努金(S. A. Ramanujan, 1887—1920). 哈代的汽车号是 1729. 他向拉马努金说, 这数目没有意思. 拉马努金回答说, 不然, 这是可用两种不同方法, 写为两个立方数的和的最小的数, 如

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

这个结果可用椭圆曲线来证明.

椭圆曲线是一门深刻而美妙的数论. 一个系数是整数的多项式方程

$$P(x, y) = 0$$

通常叫作丢番图(Diophantus, 约生活于公元 250 年前后) 方程. 它有无整数解(即  $x, y$  都是整数), 这是数论的基本问题.

需要了解的是, 这个问题与代数几何有关. 若上述方程式的  $x, y$  是实数, 它确定一代数曲线. 若  $x, y$  是复数, 则方程可视为把  $y$  定为  $z$  的多值函数; 复变函数论有黎曼曲面的观念, 用来表示这个关系(但此理论较复杂). 两种情形都有一个重要数量, 叫作亏格(genus). 亏格是 1 的曲线  $P(x, y) = 0$  叫作椭圆曲线. 椭圆曲线上有一种奇怪的加法, 成一可交换群, 这是代数数论的一个十分有趣的结果.

日本数学家谷山丰(Wada Taniyama, 1927—1958) 推测, 我的同事伯克利加州大学教授里贝(K. Ribet) 证明: 费马定理可由一个椭圆曲线的定理导出. 怀尔斯就证明了这条定理.

从这定理我们应认识, 高深数学是必要的. 费马定理的结论虽然简单, 但它蕴藏着许多数学的关系, 远超出结论中的数学观念. 这些关系, 日新月异, 十分

神妙. 学问之奥, 令人拜赏.

我相信, 费马定理不能用初等方法证明. 这种努力, 会是徒劳的. 数学是一个整体, 一定要吸收几千年的所有进步.

### 三、拓扑与量子场论

1995年初的一天晚上, 我和内人看睡前的电视新闻. 忽然听到我的名字, 大吃一惊. 原来加利福尼亚发行一种彩票, 头彩 300 万元, 可以累积. 我以前的一个学生, 名叫乌米尼(Robert Uomini), 中了头彩, 获美金 2 200 万元. 他并且说, 将以 100 万元捐赠加州大学, 设立“陈省身讲座”.

学校决定, 以此讲座邀请知名学者为访问教授. 第一位应邀的为英国数学家阿蒂亚爵士(Sir Michael Atiyah, 1929— ). 他是剑桥大学三一学院的院长, 曾任伦敦皇家学会会长. 他作了八讲, 讲题是“拓扑与量子场论”.

这是当前一个热门的课题, 把最高深的数学和物理联系起来, 导出了深刻的结果.

物理学的一个基本观念是“场”. 电磁场尤为近代生活的一部分. 电磁场的势(potential) 适合麦克斯韦(J. C. Maxwell, 1831—1879) 方程, 但它不是一个函数. 这种场叫作规范场.

物理上有四种场: 电磁场、引力场、强场和弱场. 现在知道, 这些场都是规范场, 即数学上是一组矢量空间, 用线性群结合起来的. 电磁场的重要推广, 是杨—米尔斯(Yang—Mills) 的规范场论. 它把群从旋转群推广到  $SU(2)$ ——一个非交换的群.

这自然是科学上一个伟大的发展. 数学家可以自豪的是所需的几何观念和工具, 在数学上已经发展了.

杨—米尔斯方程反过来影响到拓扑. 这个方面的一个主要工作者是英国年轻的数学家唐纳森(Simon Donaldson, 1957— ). 利用杨—米尔斯方程可以证明, 四维欧氏空间  $R^4$  有无数微分结构, 与基本的不同. 这结果最近又由塞伯格—威顿(Seiberg-Witten) 的新方程大大地简化了.

二维流形的发展有一段光荣的历史. 现在看来, 三、四维流形恐将更为丰富和神妙. 它将在数学和物理上开出美丽的花朵是可以断言的.

### 四、球装问题

在一定空间中如何能装得最紧, 这显然是一个实际而重要的问题. 为使问题数学化, 我们假定所装物体为半径为 1 的球. 一个立刻产生的问题是: 围着一



球,可放几个同样大的球?

在二维的平面,绕一单位圆我们显然可放 6 个单位圆. 在三维的空间,我们如把单位球绕单位球,则可以证明,12 个球是放得进的. 剩下还有许多空间,但不能放进第 13 个球.

这个定理并不容易证明. 关于空间装球的密度,有一个开普勒(J. Kepler, 1571—1630) 假设,已经 400 多年了. 最近,项武义教授对这个问题又做了巨大的贡献<sup>[3]</sup>. 关于这问题的各个方面,请参阅项武义的相关文章.

立体几何是一个重要而困难的方面. 近年来  $C_{60}$  的研究显示了几何在化学上的应用. 它当然对固态物理也有重大作用. 球装不过是立体几何中的一个问题,前途却是大有发展的.

## 五、芬斯勒几何

最近经我的鼓励,芬斯勒(Finsler, 1894—1970) 几何有重大的发展,作简略报告如下.

在平面  $(x, y)$  上设积分

$$s = \int_a^b F(x, y, \frac{dy}{dx}) dx$$

其中  $y$  为  $x$  的未知函数. 求这个积分的极小值,就是第一个变分学的问题. 称  $s$  为弧长,把观念几何化,即得芬斯勒几何.

高斯(C. F. Gauss, 1777—1855) 看出,在特别情形

$$F^2 = E + 2Fy' + Gy'^2, y' = \frac{dy}{dx}$$

其中  $E, F, G$  为  $x, y$  的函数,几何性质特别简单. 1854 年黎曼的演讲讨论了整个情形,创立了黎曼—芬斯勒几何. 百余年来黎曼几何在物理学有重要的应用,而整体黎曼几何的发展更是近代数学的核心部分.

黎曼的几何基础包含芬斯勒几何. 我们最近几年的工作,把黎曼几何的发展,局部的和整体的,完全推广到芬斯勒几何. 这将是微分几何的一块新园地,预料前景无限. 1995 年夏,在美国的西雅图有一个芬斯勒几何的国际会议,其报告已于 1996 年由美国数学会出版.

芬斯勒几何,在著名的 1900 年的希尔伯特演讲中,是第 23 个问题.

## 六、结论:关于中国的数学

中国人的数学能力是不容怀疑的. 中国将成数学大国,我觉得也是不争的事实,可能时间会有迟早而已. 我希望注意下列几点: