Gaodeng Shuxue

高等数学

主审 王晓东

主编 陈玉华 曹 斌 林立夫

苏州大学出版社
Soochow University Press

高等数学

主　审　王晓东
主　编　陈玉华　曹　斌　林立夫

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 陈玉华，曹斌，林立夫主编. —苏州：苏州大学出版社，2015.6
ISBN 978-7-5672-1347-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①陈… ②曹… ③林… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 127546 号

高等数学
陈玉华 曹 斌 林立夫 主编
责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街 1 号 邮编:215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址:宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号 邮编:214217)

开本 787×1092 1/16 印张 14 字数 350 千
2015 年 6 月第 1 版 2015 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1347-0 定价:29.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前 言

随着职业教育的发展，许多职业学校、技工院校都开设了高等数学课程. 同时职业学校、技工院校课程改革不断，专业课程越来越多地推行一体化教学、项目化教学，这些也推动着文化基础课程的改革. 如何使高等数学更好地为专业课服务，为学生的终身发展奠定基础，也成为改革的主要目标. 就此目标，遵循"实用、够用、可接受"的原则，考虑到职业学校、技工院校学生的实际情况，我们组织了一些教学经验丰富的一线教师编写了本教材.

本教材从学生实际出发，力求深入浅出，简单易懂，便于学生接受. 内容以极限、导数及其应用、积分及定积分的简单应用、空间解析几何为主，满足职业学校、技工院校学生的实际需求.

本教材由王晓东主审，陈玉华、曹斌、林立夫任主编，王国成、徐慧、王小平、单娟任副主编，参加编写的还有魏中元、林润海、徐铂、蒋明等.

当然，由于我们的水平有限，书中难免存在一些不足和错误，敬请广大师生批评指正.

编者

2015 年 6 月

目 录

第一章 函 数

§1.1 集合 绝对值 区间 …… 1
§1.2 函数 反函数 …… 5
§1.3 初等函数 …… 8
§1.4 函数的简单形态 …… 12
§1.5 几种常用的函数作图法 …… 15

第二章 极限与连续

§2.1 数列的极限 函数的极限 …… 18
§2.2 无穷小量与无穷大量 无穷小量的运算 …… 24
§2.3 极限运算法则 …… 27
§2.4 两个重要极限 …… 30
§2.5 无穷小的比较 …… 33
§2.6 函数的连续性 …… 36

第三章 导数与微分

§3.1 导数的概念 …… 41
§3.2 导数的运算 …… 47
§3.3 函数的微分及其在近似计算中的应用 …… 50
§3.4 隐函数及参数方程所确定的函数的微分法 …… 55
§3.5 高阶导数 …… 59

第四章 导数的应用

§4.1 函数单调性的判定法 …… 63
§4.2 极值 …… 66
§4.3 不定式的极限 …… 70
§4.4 函数的凹凸性及拐点 函数作图 …… 75

第五章 不定积分

§5.1 原函数与不定积分 …… 80
§5.2 凑微分法 …… 85
§5.3 变量置换法 …… 89
§5.4 分部积分法 …… 93
§5.5 积分表的使用 …… 97

第六章 定积分及其应用

§6.1 定积分的概念 …… 100
§6.2 定积分的性质 …… 103
§6.3 定积分的基本公式(牛顿-莱布尼兹公式) …… 105
§6.4 变量置换法与分部积分法 …… 108
§6.5 定积分的几何应用 …… 112
§6.6 定积分的物理应用 …… 115
*§6.7 反常积分 …… 118

第七章 空间解析几何 向量代数

§7.1 空间直角坐标系 …… 122
§7.2 曲面、曲线的方程 …… 125
§7.3 二、三阶行列式简介 …… 129
§7.4 向量及其加减法 数与向量的乘积 向量的坐标表示法 …… 134
§7.5 数量积 向量积 …… 141
§7.6 平面的方程 …… 148
§7.7 直线的方程 …… 154
§7.8 常用的二次方程的图形 …… 161

第八章 无穷级数

§8.1 常数项级数的概念及其性质 …… 164
§8.2 正项级数的收敛性 …… 169
§8.3 任意项级数 …… 174
§8.4 幂级数 …… 178
§8.5 函数展开为幂级数 …… 183
§8.6 傅里叶级数 …… 188

附录 积分表 …… 196
参考答案 …… 205

第一章 函 数

§1.1 集合 绝对值 区间

准备知识：1. 数轴的概念.
2. 不等式的大小比较.

重 点：集合的概念与表示、集合的运算、绝对值的解法、区间的表示.

难 点：属于和包含的区别，领域的概念.

学习目标：1. 掌握集合的概念与表示.
2. 学会集合的运算.
3. 掌握绝对值的性质与计算.
4. 掌握区间的表示方法.

一、集合

我们把具有某种属性的一些对象所组成的全体称为**集合**. 例如，某校所有同学组成一个集合；所有四边形组成一个集合；数 1,2,3,4 组成一个集合；不等式 $a<x<b$ 的解组成一个集合；第一、三象限所有的点组成一个集合. 集合的各个对象叫作这个集合的元素. 习惯上集合用大写字母如 A,B,C 等表示，元素用小写字母如 a,b,c 等表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**，含有无限个元素的集合称为**无限集**. 若 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作“a **属于** A”. 否则，记作 $a\notin A$，读作“a **不属于** A”.

集合的表示方法有两种：列举法和描述法. 所谓**列举法**就是把集合中所有元素都列举出来写在大括号内，用逗号分开的集合表示方法. 例如，集合 A 包含了 0,1,2,3,4 五个数，就可记为

$$A=\{0,1,2,3,4\}.$$

所谓**描述法**，就是把集合中的元素的公共属性描述出来的集合表示方法. 它记为

$$A=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }p\}.$$

大括号内 x 表示元素的一般形式(代表元素),p 表示这个集合的元素所具有的共同属性.

例如:

(1) 满足 $a<x<b$ 的所有 x 的集合,可表示为 $A=\{x|a<x<b\}$;

(2) 表示所有的圆心在原点的圆的集合,可表示为 $M=\{C|C\text{ 是圆心在原点的圆}\}$;

(3) 所有在直线 $y=2x+1$ 上的点的集合,可表示为 $P=\{(x,y)\,|\,y=2x+1,x\in\mathbf{R}\}$.

显然点$(1,2)\notin P$,而点$(1,3)\in P$.

不含任何元素的集合叫作**空集**,记作$\varnothing$.

例如,方程 $x^2+y^2=-1$ 的实数解是一个空集.

二、子集、交集、并集和补集

若集合 A 中的每一个元素都属于集合 B,则称 A 为 B 的**子集**. 记为 $A\subseteq B$,读作"A 包含于 B";或记为 $B\supseteq A$,读作"B 包含 A".

例如,$\mathbf{R}$ 表示全体实数的集合,$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数的集合. 显然 $\mathbf{Q}$ 中每一个元素都属于 $\mathbf{R}$,所以集合 $\mathbf{Q}$ 是集合 $\mathbf{R}$ 的子集.

如果 A 是 B 的子集,并且集合 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫作集合 B 的**真子集**,记作 $A\subset B$.

例如,所有有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是所有实数集合 $\mathbf{R}$ 的真子集,即 $\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

由定义可知:

(1) 任何一个集合 A 是它自己的子集,即 $A\subseteq A$;

(2) 空集可认为是任何集合的子集.

设两个集合 A,B. 若 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B **相等**. 记作

$$A=B.$$

既属于集合 A 又属于集合 B 的所有元素的集合叫作集合 A 与集合 B 的**交集**. 记作

$$A\cap B.$$

所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫作集合 A 与集合 B 的**并集**. 记作

$$A\cup B.$$

例如,(1) $A=\{x|1<x<4\}$,$B=\{x|0<x<2\}$,那么 $A\cap B=\{x|1<x<2\}$,而 $A\cup B=\{x|0<x<4\}$;

(2) $\{1,2,3,4,5,6\}\cap\{0,2,4,8,10\}=\{2,4\}$,$\{1,2,3,4,5,6\}\cup\{0,2,4,8,10\}=\{0,1,2,3,4,5,6,8,10\}$.

如果所讨论的集合都是某一个集合 I 的子集,那么集合 I 称为**全集**.

若集合 A 是全集 I 的子集,则在 I 中不属于 A 的元素所组成的集合,叫作集合 A 在集合 I 中的**补集**,简称集合 A 的补集,记作$\overline{A}$. 它可表示为

$$\overline{A}=\{x|x\in I,\text{且 }x\notin A\}.$$

显然,$A\cup\overline{A}=I$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$,$\overline{\overline{A}}=A$. 其中$\overline{\overline{A}}$表示集合$\overline{A}$的补集. 例如,若全集 I 为所有实数集合,$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数的集合,则

$$\overline{\mathbf{Q}}=\{x \mid x\in\mathbf{R},\text{且 } x\notin\mathbf{Q}\}.$$

即 $\overline{\mathbf{Q}}$ 为所有无理数的集合.

课堂练习 1

1. 求 $\{1,7,3,8,5,6\}$ 与 $\{6,2,4,8,10\}$ 的交集、并集.
2. 已知 $A=\{x \mid -1<x<6\}$，$B=\{x \mid 0<x<12\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

三、绝对值

实数 a 的绝对值(记作 $|a|$)规定为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0;\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

a 的绝对值在数轴上表示点 a 到原点的距离.

绝对值的性质：

(1) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$；

(2) 若 $|x|<\delta$，则 $-\delta<x<\delta$，反之亦然；

(3) 若 $|x|>N$，则 $x>N$ 或 $x<-N$，反之亦然.

运算规则：

(1) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$(a,b 为实数)；

(2) $|a-b|\geqslant |a|-|b|$(a,b 为实数)；

(3) $|ab|=|a||b|$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

四、区间

集合 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b). 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，但不包括端点 a 及端点 b；集合 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$. 它在数轴上表示点 a 与点 b 之间的线段，包括其两个端点.

还有其他类型的区间：

$\{x \mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $(a,b]$，称为半开区间(或半闭区间)；

$\{x \mid a\leqslant x<b\}$ 记作 $[a,b)$，称为半开区间(或半闭区间)；

$\{x \mid x>a\}$ 记作 $(a,+\infty)$，$\{x \mid x<a\}$ 记作 $(-\infty,a)$，称为半无穷区间；

$\{x \mid x$ 为任何实数$\}$ 或 $\{x \mid x<\mathbf{R}\}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$，称为无穷区间.

集合 $\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}$ 称为点 a 的 ε **邻域**. 它也可以用开区间来表示. 事实上，

$$|x-a|<\varepsilon,$$

去绝对值，得

$$-\varepsilon<x-a<\varepsilon,$$

即

$$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon.$$

就是说，点 a 的 ε 邻域就是开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

例如，把-1的$\frac{1}{2}$邻域表示成开区间，即

$$|x-(-1)|<\frac{1}{2},$$

去绝对值，得

$$-\frac{1}{2}<x+1<\frac{1}{2},$$

即

$$-\frac{3}{2}<x<-\frac{1}{2},$$

即为开区间$\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

课堂练习 2

1. 解不等式$|2-x|<\frac{1}{2}$，解集用区间表示.
2. 求点 3 的 2 邻域.

习 题

1. 已知$A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{-1,1,2,3,5\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$.
2. 已知$A=\{x|x\geqslant 1\}$，$B=\{x|x\leqslant 4\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$.
3. 设全集为所有整数的集合，A为所有自然数的集合，求A的补集.
4. 写出集合$A=\{0,1,2,3\}$的所有子集.
5. 解不等式$|x-2|<\frac{1}{2}$，用区间表示.
6. 解不等式$|x|\geqslant|x+1|$，用区间表示.

§1.2 函数 反函数

准备知识：1. 集合的概念.
2. 变量和常量.

重　　点：1. 函数和反函数的概念.
2. 函数的定义域、值域.

难　　点：1. 函数的概念.
2. 反函数的概念和解法.

学习目标：1. 学习用集合语言表述函数的定义，掌握求一些简单函数定义域的基本方法.
2. 学会用恰当的方法（解析法、列表法、图象法）表示函数.
3. 掌握反函数的解法.

一、函数

1. 定义

设有两个非空实数集合 D,B，若对于数集 D 中的每一个数 x，按照确定的规则 f，都对应着数集 B 中唯一的一个数 y，则称 f 是定义在集合 D 上的**函数**. D 称为函数的**定义域**，与$x\in D$对应的实数 y 记作 $y=f(x)$. 与 x_0 对应的 y 值有时记为 $f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，集合 $B_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**. 显然 $B_f\subseteq B$.

习惯上，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 要注意 f 是函数，而 $f(x)$是函数值. 但研究函数总是通过研究函数值来进行的. 为了方便，以后也把 $f(x)$称作 x 的函数，或 y 是 x 的函数.

如果对于自变量 x 的某一个值 x_0，因变量 y 能得出一个确定的值，那么就说函数 $y=f(x)$在 x_0 处有定义.

对于不同的函数，应该用不同的记号，如 $f(x),g(x),F(x),G(x)$等.

有时，会出现对于变量 x，有几个 y 值与之对应的情形，根据函数定义，y 不是 x 的函数. 但是为了方便，我们约定把这种情况称为 y 是 x 的多值函数. 对于多值函数，通常是限制其 y 的变化范围使之成为单值，再进行研究. 例如，反三角函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值函数，但当 y 限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就是单值了（这时习惯上记为 $y=\arcsin x$）. 通过对$y=\arcsin x$的研究就可了解 $y=\mathrm{Arcsin}x$.

例 1 设函数 $f(x)=x^3+x^2+1$，求 $f(0)$，$f(t^2)$，$[f(t)]^2$，$f\left(\frac{1}{t}\right)$，$\frac{1}{f(t)}$.

解 $f(0)=0^3+0^2+1=1$，

$f(t^2)=(t^2)^3+(t^2)^2+1=t^6+t^4+1$，

$[f(t)]^2=(t^3+t^2+1)^2$，

$f\left(\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{1}{t}\right)^3+\left(\frac{1}{t}\right)^2+1=\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+1$，

$\frac{1}{f(t)}=\frac{1}{t^3+t^2+1}$.

例 2 设 $f(x+4)=\frac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解 令 $x+4=t$，则 $x=t-4$.

$$f(x+4)=\frac{(t-4)+1}{(t-4)+2}=\frac{t-3}{t-2},$$

即

$$f(t)=\frac{t-3}{t-2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x-3}{x-2}.$$

例 3 设 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，证明 $f(x)=f(-x)$.

证 因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}\cdot\sin\frac{1}{-x}=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},$$

所以

$$f(x)=f(-x).$$

例 4 求函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)$ 的定义域.

解 这个函数是两项之和，所以当且仅当每项都有定义时，函数才有意义. 第一项的定义域是 $D_1=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$，第二项的定义域是 $D_2=\{x\mid x>1\}$. 所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $D=D_1\cap D_2=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}$，或写成区间 $(1,3]$.

课堂练习 1

1. 设 $f(x+1)=\frac{2x+1}{3x+2}$，求 $f(x)$.

2. 求函数 $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\lg(x+1)$ 的定义域.

2. 函数的表示法

函数有三种表示法：图形表示法、表格表示法、公式表示法. 其中图形表示法在工程中常用，如生产的进度表、仪器的记录等，它的优点是直观，一目了然，缺点是不便于分析研究；表格表示法在设计工作中常用，它的优点是使用方便，如对数表、三角函数表，缺点也

是不便于分析研究；公式表示法在理论研究、推导论证中使用，它的优点是表达清晰、紧凑，缺点是抽象、不易理解.

3. 建立函数关系

寻找函数关系是高等数学所要研究的课题之一，本节介绍利用简单的几何或物理关系建立函数关系. 在以后的一些章节中还将介绍利用微积分建立函数关系.

例 5 有一个边长为 a 的正方形铁皮，将它的四角剪去适当的大小相等的小正方形，制成一只无盖的盒子，求盒子的体积与小正方形边长之间的函数关系.

解 设剪去的小正方形的边长为 x，盒子的体积为 V. 容易得到

$$V=x(a-2x)^2\left(x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)\right).$$

二、反函数

设函数 f 定义在数集 A 上，其值域为数集 B. 若对于数集 B 中的每一个数 y，数集 A 中都有唯一的一个数 x，使 $f(x)=y$，记由 y 对应于 x 的规则为 φ，则称 φ 为 f 的反函数，也常称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，二者的图形是相同的. 习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 因此，也可以说 $y=\varphi(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，但这时二者的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

求反函数的步骤一般是这样的：从 $y=f(x)$ 中解出 x，得 $x=\varphi(y)$，再将 x,y 分别换为 y,x，即 $y=\varphi(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 6 求 $y=2x-5$ 的反函数.

解 解出 x，得

$$x=\frac{1}{2}(y+5),$$

将 x,y 分别换为 y,x，得

$$y=\frac{1}{2}(x+5),$$

所以，$y=3x-5$ 的反函数为 $y=\frac{1}{2}(x+5)$.

还有许多反函数的例子. 例如，$y=\log_a x$ 是 $y=a^x$ 的反函数，$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x$ 的反函数，等等.

课堂练习 2

1. 利用长度为 a m 的木条做成“日”字形窗框，求窗子的面积 S 与窗框高的关系.
2. 求 $y=2^x$ 的反函数.

习题

1. 设函数 $f(x)=x^3+x^2+2$，求 $f(-1)$，$f(t^2)$，$[f(t)]^2$.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x>0,\\ x-6, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(2)$.

3. 求函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-2)$ 的定义域.

4. 现用半径为 R、中心角为 α 的扇形做成一个无底的圆锥体，请将圆锥体的体积 V 表示为 α 的函数.

5. 求 $y=4x-7$ 的反函数.

§1.3 初等函数

准备知识：1. 函数的概念.
2. 几种常用的函数.

重　　点：基本初等函数和复合函数.

难　　点：复合函数的分析.

学习目标：1. 掌握基本初等函数的类型与性质.
2. 掌握复合函数的组成.

一、基本初等函数及其图形

幂函数 $y=x^a$（a 为任何实数）；指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$且 $a\neq1$）；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 及反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等五类函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数 $y=x^a$（a 为任何实数）

当 $a>0$ 时（讨论 $x\geqslant0$ 的情形），所有图形都通过点$(0,0)$及点$(1,1)$，在 $0<a<1$ 的情况下图形向右，在 $a>1$ 的情况下，图形向上；当 $a<0$ 时（讨论 $x>0$ 的情形），所有图形都通过点$(1,1)$，且当图形上的点远离原点时，图形分别与 x 轴和 y 轴无限靠近（图 1-1）.

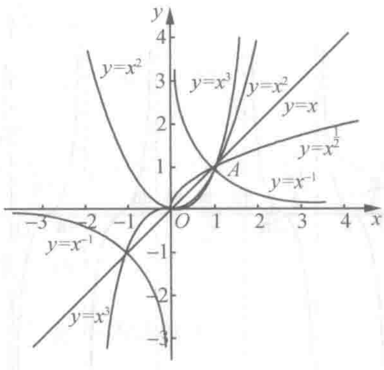

图 1-1

2. 指数函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$

对于任何 x，均有 $a^x>0$，对任何 $a(a>0$ 且 $a\neq1)$，图形通过点 $(0,1)$，当 $a>1$ 时，图形向左逐渐与 x 轴靠近，当 $0<a<1$ 时，图形向右逐渐与 x 轴靠近(图 1-2).

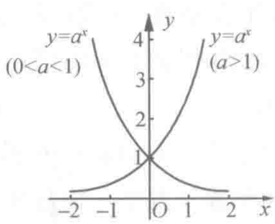

图 1-2

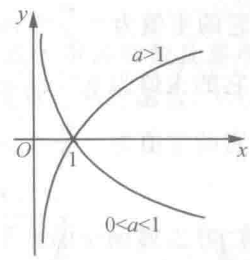

图 1-3

3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$

对数函数的定义域为 $x>0$，它的图形与其反函数 $y=a^x$ 关于直线 $y=x$ 对称，因而它通过点 $(1,0)$(图 1-3).

4. 三角函数

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 均以 2π 为周期(图 1-4)，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 均以 π 为周期(图 1-5)(周期定义见后).

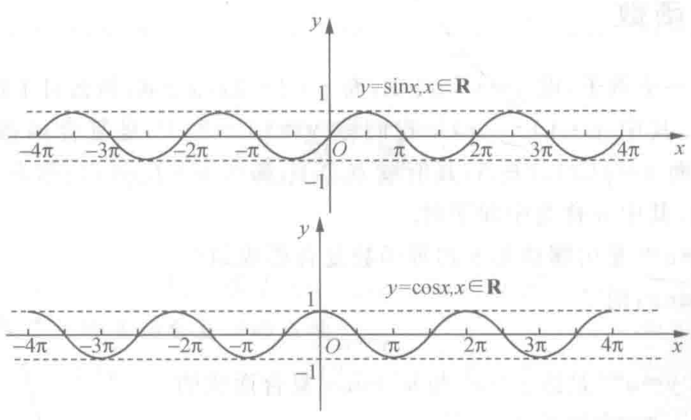

图 1-4

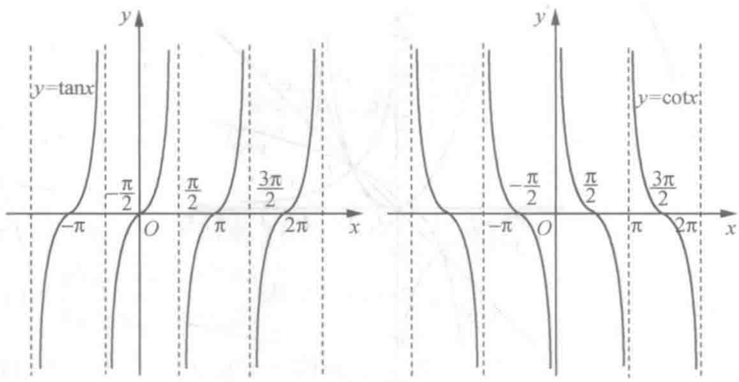

图 1-5

5. 反三角函数

反三角函数的图形容易由三角函数的图形求得.

$y=\arcsin x$,它的主值为$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$(图 1-6);

$y=\arccos x$,它的主值为$0\leqslant y\leqslant\pi$(图 1-7);

$y=\arctan x$,它的主值为$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$(图 1-8).

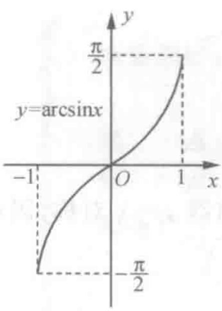

图 1-6

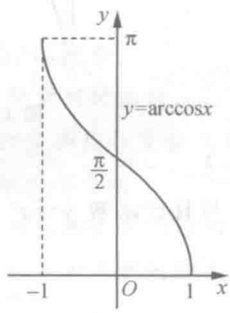

图 1-7

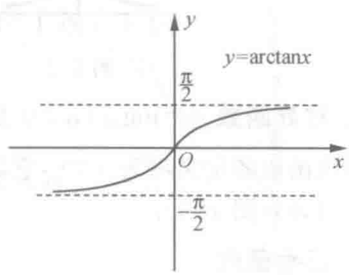

图 1-8

二、复合函数

我们先来看一个例子,设 $y=u^3,u\in\mathbf{R}$,而 $u=1-2x,x\in\mathbf{R}$,那么对于任何一个 $x\in\mathbf{R}$,都有 y 与之对应,其中 $y=(1-2x)^3$. 我们称 $y=(1-2x)^3$ 是复合函数. 一般地讲,设 $y=f(u),u\in B$,而 $u=\varphi(x),x\in A$,其值域 $B_\varphi\subseteq B$,那么 $y=f[\varphi(x)]$称为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$的复合函数. 其中 u 称为中间变量.

例 1 问 $y=a^{\sin x}$是由哪些基本初等函数复合而成的?

解 令 $u=\sin x$,则

$$y=a^u,$$

而 $u=\sin x$,所以 $y=a^{\sin x}$是由 $y=a^u$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的.

例 2 问 $y=\sqrt{\log_a\left(\frac{1}{x}\right)}$是由哪些基本初等函数复合而成的?

解 它可以看作由

$$y=\sqrt{u},u=\log_a v,v=\frac{1}{x}$$

三个基本初等函数复合而成的.

课堂练习 1

1. 函数 $y=x^a$ 的性质有哪些?

2. 函数 $y=\sqrt{\lg\left(\frac{x}{x+1}\right)}$ 是复合函数吗?

三、初等函数

初等函数是高等数学中经常遇到的,也是工程技术中常见的函数. 什么叫初等函数呢?

定义 若函数可用一个数学式子表示,且这个式子是由常数及基本初等函数经过有限次四则运算与有限次复合而构成的,则这类函数统称为**初等函数**. 不是初等函数的函数称为非初等函数.

例 3 问函数 $y=\cos(e^x)+3\lg\sqrt{1+x}$ 是初等函数吗?

解 这个函数是由一个式子表示的,且这个式子是两个函数之和. 若令 $y_1=\cos(e^x)$, $y_2=3\lg\sqrt{1+x}$,则 $y=y_1+y_2$. 而 $y_1=\cos(e^x)$ 是由 $y_1=\cos u,u=e^x$ 复合一次而成,$y_2=3\lg\sqrt{1+x}$ 是常数 3 与 $\lg\sqrt{1+x}$ 的乘积,其中 $\lg\sqrt{1+x}$ 是由 $\lg v,v=\sqrt{\omega},\omega=x+1$ 经两次复合而成,所有构成 y_1,y_2 的函数都没有超出基本初等函数及常数,其运算也没有超出有限次的复合和有限次的四则运算,所以给出的函数是初等函数.

课堂练习 2

问 $y=\sin(e^x)+2\ln(1+x)^2$ 是初等函数吗?

习 题

1. 设 $f(x)=x^2,\varphi(x)=\lg x$,求 $f[\varphi(x)],\varphi[f(x)]$ 和 $\varphi[\varphi(x)]$.

2. 下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=\sin(5x+2)$; (2) $y=\cos^2(2-3x)$;

(3) $y=\lg(\arccos x)$; (4) $y=\sqrt{\tan\left(\frac{12}{x}+5\right)}$.