



汽车先进技术译丛  
汽车技术经典手册

 Springer

# 车辆动力学理论 与应用 下册

(原书第2版)

## Vehicle Dynamics Theory and Application

[加] 雷扎 N. 亚泽尔 (Reza N. Jazar) 著  
刘西侠 方志强 宋海军 译



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



非  
外  
借

汽车先进技术译丛 汽车技术经典手册

# 车辆动力学理论与应用 (下册)

(原书第2版)

[加] 雷扎 N. 亚泽尔 著  
(Reza N. Jazar)

刘西侠 方志强 宋海军 译

机械工业出版社

本书理论与实践并重,强调对相关概念物理含义的理解和应用,重点对其应用进行了阐述。书中所选择的主题都是本领域的研究热点,目的在于为读者提供丰富的讨论内容和方法指导。

本书包括:第三部分“车辆动力学”,应用牛顿方法和拉格朗日方法研究车辆操纵动力学。第四部分“车辆振动”,详细讨论车辆的振动及其优化设计问题。

Translation from English language edition:

Vehicle Dynamics

by Reza N. Jazar

Copyright © 2014 Springer New York

Springer New York is a part of Springer Science + Business Media

All Rights Reserved

版权所有,侵权必究。

This title is published in China by China Machine Press with license from Springer. This edition is authorized for sale in China only, excluding Hong Kong SAR, Macao SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the Copyright Act. Violation of this Law is subject to Civil and Criminal Penalties.

本书中文简体版由 Springer 授权机械工业出版社在中华人民共和国境内(不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区)出版与发行。未经许可之出口,视为违反著作权法,将受法律之制裁。

北京市版权局著作权合同登记 图字:01-2015-1284 号。

## 图书在版编目(CIP)数据

车辆动力学理论与应用:原书第2版.下册/(加)雷扎·N.亚泽尔(Reza N. Jazar)著;刘西侠,方志强,宋海军译.——北京:机械工业出版社,2018.4  
(汽车先进技术译丛.汽车技术经典手册)

书名原文:Vehicle Dynamics

ISBN 978-7-111-59342-3

I. ①车… II. ①雷…②刘…③方…④宋… III. ①汽车动力学 IV. ①U461.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第042101号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:何士娟 李军 责任编辑:徐霆

责任校对:肖琳 张晓蓉 封面设计:鞠杨

责任印制:孙炜

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2018年3月第1版第1次印刷

169mm×239mm·21.75印张·2插页·523千字

0 001—1900册

标准书号:ISBN 978-7-111-59342-3

定价:168.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88361066

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-68326294

机工官博:weibo.com/cmp1952

010-88379203

金书网:www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

教育服务网:www.cmpedu.com

# 译者序

车辆动力学是研究车辆操纵稳定性、行驶安全性和驱动效率的基础理论。澳大利亚皇家墨尔本理工大学 Reza N. Jazar 教授所著《车辆动力学理论与应用（第2版）》一书，是一部内容系统丰富、阐述清晰深入、理论与实践并重的高水平著作。

雷扎 N. 亚泽尔（Reza Nakhaie Jazar）教授的研究领域涉及以智能隔振器为重点的非线性动态系统动力学、振动、控制、稳定性、分叉和混沌行为研究，以自动驾驶车辆和智能/安全车辆为重点的车辆动力学、操纵性、乘适性和稳定性研究，以非线性设计应用为重点的微机电系统动力学、设计、优化、控制和稳定性研究，以及以时间和能量优化控制为重点的机器人机械手运动学、动力学和控制研究等。

该书除了在车辆动力学基础理论方面论述充分之外，其显著特色是采用了大量来自实际工程的案例、习题和思考题帮助读者学习和理解，使读者充分领略车辆动力学问题的机理，同时培养自己解决实际问题的能力。本书在澳大利亚一些大学车辆工程专业本科生、研究生以及企业的工程师或研发人员中非常受欢迎，是车辆动力学知识学习的主要培训教材。

本书第10章~第13章由刘西侠翻译，第9章和第14章由方志强翻译，第8章和第15章由宋海军翻译。在翻译过程中，课题组邱绵浩、姚新民、金毅、陈红迁和江鹏程几位老师参与了多数章节图文的翻译、审校，车辆工程专业博士研究生聂俊峰、谭永营和硕士研究生姚东强、吴文文、贾伟健等在书中的习题翻译、审校、试做方面做了大量繁杂的工作。

译者在翻译过程中力求忠实于原著和理解其本来的含义，但限于水平，难免有错误和不准确之处，恳请广大同行和读者指正。

## 原书第2版前言

如果没有我的学生和同事们的建议和贡献，尤其是哥伦比亚大学和皇家墨尔本理工大学里的学生和同事们的建议和贡献，我很难完成本书第2版的工作。我对与我分享其50年汽车工业经验的朋友 Stefan Anthony 先生深表感谢，特别感谢 Andy Fu 和 Hormoz Marzbani，他们认真地审阅本书，并指出了排印和逻辑上的错误。

这一版中引入的新专题来自学生们的反馈，这些反馈帮助我阐明并完善了本书的部分内容。

本书的目的是试图采取把我自己当成学生的形式来解释车辆动力学。本书涵盖车辆动力学所有方面，为学生提供了详细的解释和信息，能够为学生和工程师们提供帮助和重要参考。

本书的第1版由 Springer 于2008年出版，第1版出版不久就在行业内广受欢迎。除了我自己的学生和同事外，还要感谢众多其他读者，他们的问题、意见和建议为我完成第2版提供了很大的帮助。

# 前 言

本书面向工程专业的学生,介绍车辆动力学的基础知识,这些知识可以用于开发公路车辆乘坐舒适性、操纵性及优化分析的计算机程序。

车辆动力学在工程专业的课程中已经存在了一百多年,关于这方面的书籍比较多,但多是面向专家层次的,并不适合应用于课堂教学。刚入门的学生、工程师或研发人员不知道从何处和怎样开始车辆动力学的学习。因此,有必要为初学者编写一本教材。本书提供了满足该领域未来发展需求的知识基础。

## 本书的层次

本书源自近十年的非线性动力系统研究和车辆动力学课程教学,主要面向本科生最后一学年和工程专业研究生第一学年的学习。因此该书是一本中间层次的教材,既提供了基础知识,又包含前沿课题。全书可以分在相互关联的两门课程中讲授,也可以跳过某些章节在一门课程中讲授。学生需要掌握一定的运动学和动力学基础,以及数值方法的基本知识。

本书的内容力求保持在一定的理论-实践层次,对很多概念都做了深入的解释,并对其应用进行了重点阐述,对大量的相关理论进行了证明。本书强调概念的物理含义和应用,所选择的主题是本领域的热点,其目的在于为学生提供丰富的专题范围和方法途径。

本书共有四章与车辆动力学不是直接相关:应用运动学、应用机构学、应用动力学和应用振动学,这几章为理解车辆动力学及车辆子系统动力学提供相关背景知识。

## 本书的结构

为便于教学和自学,本书结构组织如下。第1章“基础知识”包含轮胎、轮辋及公路车辆分类简述等一般预备知识。

第一部分“车辆驱动”介绍正向车辆动力学、轮胎动力学和传动系统动力学。正向动力学涉及质量转移、加速、制动,发动机性能和变速器传动比设计等内容。

第二部分“车辆运动学”详细讨论转向系和悬架系等车辆机械子系统。

第三部分“车辆动力学”应用牛顿方法和拉格朗日方法研究车辆操纵动力学。

第四部分“车辆振动”详细讨论车辆的振动问题。目的是介绍和示范对车辆建立多自由度振动系统模型的基本方法。牛顿-欧拉动力学方法和拉格朗日方法的概念,同时用于推导运动方程。介绍了车辆悬架系设计的RMS优化技术,并应用于车辆悬架系。优化技术的成果是获得汽车或悬架装置的最佳刚度和阻尼。

## 方法介绍

本书采用“事实-原因-应用”结构,“事实”是每一节中引入的主要议题,通过“证明”的方式找出“原因”。事实的应用在“案例”中验证,案例是本书中非常重要的部分,这些案例说明了如何应用这些“事实”。案例还涵盖了用于拓展本节议题的其他“事实”。

## 预备知识要求

因为本书是面向工程专业的高年级本科生和一年级研究生,故假设读者熟悉矩阵算法和基本动力学。本书的预备知识包括运动学、动力学、向量分析和矩阵理论基础,上述基础知识通常在本科生前三年的学习中教授。

# 本书说明

## 单位制

如无特殊说明，本书采用国际单位制（SI）。用度（°）或弧度（rad）作为表示角度大小变量的单位。

## 符号

- 小写加粗字母表示向量，向量可以在  $n$  维欧几里得空间中表示。例如：

|                       |                       |                         |                       |                       |                     |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| $\mathbf{r}$          | $\mathbf{s}$          | $\mathbf{d}$            | $\mathbf{a}$          | $\mathbf{b}$          | $\mathbf{c}$        |
| $\mathbf{p}$          | $\mathbf{q}$          | $\mathbf{v}$            | $\mathbf{w}$          | $\mathbf{y}$          | $\mathbf{z}$        |
| $\boldsymbol{\omega}$ | $\boldsymbol{\alpha}$ | $\boldsymbol{\epsilon}$ | $\boldsymbol{\theta}$ | $\boldsymbol{\delta}$ | $\boldsymbol{\phi}$ |

- 大写加粗字母表示动力学向量或动力学矩阵，如力和力矩。例如：

|              |              |
|--------------|--------------|
| $\mathbf{F}$ | $\mathbf{M}$ |
|--------------|--------------|

- 带上折线的小写字母表示单位向量，单位向量不加粗。例如：

|           |           |           |                  |                   |                |
|-----------|-----------|-----------|------------------|-------------------|----------------|
| $\hat{i}$ | $\hat{j}$ | $\hat{k}$ | $\hat{e}$        | $\hat{u}$         | $\hat{n}$      |
| $\hat{l}$ | $\hat{j}$ | $\hat{K}$ | $\hat{e}_\theta$ | $\hat{e}_\varphi$ | $\hat{e}_\psi$ |

- 带上波浪线的小写字母表示与某向量关联的  $3 \times 3$  斜对称矩阵。例如：

|                                                                                                         |                                                                |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|

- 上面带有箭头的两个大写字母表示某位置向量的起点和终点。例如：

$\overrightarrow{ON}$  = 从  $O$  指向  $N$  的位置向量

- 向量的长度由不加粗的小写字母表示。例如：

|                    |                    |                    |                    |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $r =  \mathbf{r} $ | $a =  \mathbf{a} $ | $b =  \mathbf{b} $ | $s =  \mathbf{s} $ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

- 首字母  $B$  用来表示体坐标系。例如：

|            |            |                         |
|------------|------------|-------------------------|
| $B (oxyz)$ | $B (Oxyz)$ | $B_1 (o_1 x_1 y_1 z_1)$ |
|------------|------------|-------------------------|

- 首字母  $G$  用来表示全域坐标系、惯性坐标系或固定坐标系。例如：

|     |           |            |
|-----|-----------|------------|
| $G$ | $G (XYZ)$ | $G (OXYZ)$ |
|-----|-----------|------------|

- 转换矩阵的右下标表示起始坐标系。例如：

$R_B$  = 由坐标系  $B (oxyz)$  开始的转换矩阵

- 转换矩阵的左上标表示目标坐标系。例如：

${}^G R_B$  = 由坐标系  $B (oxyz)$  向坐标系  $G (OXYZ)$  的转换矩阵。

- 如果大写字母  $R$  带有起始坐标系和目标坐标系，则表示旋转或转换矩阵。例如：

$${}^G R_B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 当没有上标或下标时,用方括弧形式表示矩阵。例如:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 向量的左上标表示该向量在左上标坐标系中表示,该上标说明了该向量所属的坐标系,因此,向量采用该坐标系的单位向量表示。例如:

${}^G \mathbf{r}$  = 在坐标系  $G(OXYZ)$  中表示的位置向量

- 向量的右下标表示向量参考的头部端点

${}^G \mathbf{r}_P$  = 在坐标系  $G(OXYZ)$  中表达的点  $P$  的位置向量

- 角速度向量的右下标表示该角度向量所参考的坐标系

$\omega_B$  = 本体坐标系  $B(oxyz)$  的角速度

- 角速度向量的左下标表示测量该角度向量时参考的坐标系。例如:

${}_G \omega_B$  = 本体坐标系  $B(oxyz)$  相对于全域坐标系  $G(OXYZ)$  的角速度

- 角速度向量的左上标是指表达该角速度所在的坐标系,例如:

${}^{B_2} \omega_{B_1}$  = 在本体坐标系  $B_2$  中表达的体坐标系  $B_1$  相对于全局坐标系  $G$  的角速度  
角速度的下标和上标相同时,通常会去掉左上标。例如:

${}_G \omega_B$  相当于  ${}^G \omega_B$

对位置向量、速度向量和加速度向量,如果左上标和左下标相同,通常会去掉左下标。  
例如:

${}^B v_P$  相当于  ${}^B v_P$

- 求导计算时的左上标表示被求导计算变量所处的坐标系。例如:

$$\frac{{}^G d}{dt} x \quad \frac{{}^G d_B}{dt} \mathbf{r}_P \quad \frac{{}^B d_G}{dt} {}^B \mathbf{r}_P$$

如果变量是向量函数,而定义该向量的坐标系与时间导数所处的坐标系相同,可以用如下简写法,

$$\frac{{}^G d_G}{dt} \mathbf{r}_P = {}^G \dot{\mathbf{r}}_P \quad \frac{{}^B d}{dt} {}^B \mathbf{r}_P = {}^B \dot{\mathbf{r}}_P$$

同时可简化方程的写法。例如:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{{}^G d_G}{dt} \mathbf{r}(t) = {}^G \dot{\mathbf{r}}$$

- 大写加粗字母  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵,该矩阵随维数不同,可以是  $3 \times 3$  或  $4 \times 4$  等单位矩阵。 $\mathbf{I}_3$  或  $\mathbf{I}_4$  等用于表示矩阵  $\mathbf{I}$  的维数。例如:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 星号★表示较为前沿的专题,或者指本科教学中可以不选用的案例,这些内容可以在首度阅读时略掉。

# 目 录

译者序

原书第2版前言

前 言

本书说明

## III 车辆动力学

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 9 应用动力学 .....             | 3   |
| 9.1 动力学要素 .....           | 3   |
| 9.1.1 力和力矩 .....          | 3   |
| 9.1.2 动量 .....            | 4   |
| 9.1.3 矢量 .....            | 4   |
| 9.1.4 运动方程 .....          | 5   |
| 9.1.5 功和能量 .....          | 5   |
| 9.2 刚体平动动力学 .....         | 9   |
| 9.3 刚体转动动力学 .....         | 12  |
| 9.4 质量惯性矩矩阵 .....         | 20  |
| 9.5 牛顿运动方程的拉格朗日形式 .....   | 28  |
| 9.6 拉格朗日力学 .....          | 33  |
| 9.7 小结 .....              | 41  |
| 9.8 主要符号 .....            | 42  |
| 习题 .....                  | 43  |
| 10 车辆平面动力学 .....          | 48  |
| 10.1 车辆坐标系 .....          | 48  |
| 10.2 刚性车辆的牛顿-欧拉动力学 .....  | 52  |
| 10.3 作用在刚性车辆上的力系 .....    | 58  |
| 10.3.1 轮胎力系和车身力系 .....    | 58  |
| 10.3.2 轮胎侧向力 .....        | 61  |
| 10.3.3 两轮模型和车身受力的分量 ..... | 62  |
| 10.4 两轮刚性车辆动力学 .....      | 70  |
| 10.5 稳态转向 .....           | 78  |
| 10.6★ 两轮车辆的线性化模型 .....    | 97  |
| 10.7★ 瞬态响应 .....          | 101 |
| 10.8 小结 .....             | 120 |
| 10.9 主要符号 .....           | 121 |
| 习题 .....                  | 122 |
| 11★ 车辆侧倾动力学 .....         | 129 |

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| 11.1★ 车辆坐标和自由度 .....       | 129 |
| 11.2★ 运动方程 .....           | 130 |
| 11.3★ 车辆力系 .....           | 133 |
| 11.3.1★ 轮胎力系和车身力系 .....    | 133 |
| 11.3.2★ 轮胎侧向力 .....        | 135 |
| 11.3.3★ 两轮模型上车身受力的分量 ..... | 137 |
| 11.4★ 两轮刚性车辆动力学 .....      | 143 |
| 11.5★ 稳态运动 .....           | 145 |
| 11.6★ 时间响应 .....           | 149 |
| 11.7 小结 .....              | 159 |
| 11.8 主要符号 .....            | 160 |
| 习题 .....                   | 161 |

## IV 车辆振动

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 12 应用振动学 .....                  | 169 |
| 12.1 机械振动基础 .....               | 169 |
| 12.2 牛顿方法和振动 .....              | 175 |
| 12.3 振动系统的频率响应 .....            | 180 |
| 12.3.1 力作用激励 .....              | 181 |
| 12.3.2 基座激励 .....               | 188 |
| 12.3.3 偏心激励 .....               | 196 |
| 12.3.4★ 偏心基座激励 .....            | 201 |
| 12.3.5★ 单自由度受迫振动系统频率响应的分类 ..... | 205 |
| 12.4 振动系统的时间响应 .....            | 208 |
| 12.5 振动的应用和测量 .....             | 217 |
| 12.6★ 振动优化理论 .....              | 221 |
| 12.7 小结 .....                   | 229 |
| 12.8 主要符号 .....                 | 230 |
| 习题 .....                        | 231 |
| 13 车辆振动 .....                   | 235 |
| 13.1 拉格朗日方法和耗散函数 .....          | 235 |

|                                |            |                                |            |
|--------------------------------|------------|--------------------------------|------------|
| 13.2★ 求积 .....                 | 242        | 14.6 主要符号 .....                | 299        |
| 13.3 固有频率和振型 .....             | 247        | 习题 .....                       | 300        |
| 13.4 两轮车辆模型和车身俯仰振型 .....       | 253        | <b>15★ 四分之一车辆模型 .....</b>      | <b>303</b> |
| 13.5 二分之一车辆模型和车身<br>侧倾振型 ..... | 257        | 15.1 数学模型 .....                | 303        |
| 13.6 整车振动模型 .....              | 261        | 15.2 频率响应 .....                | 304        |
| 13.7 小结 .....                  | 267        | 15.3★ 固有频率和恒常频率 .....          | 309        |
| 13.8 主要符号 .....                | 267        | 15.4★ <i>RMS</i> 优化 .....      | 317        |
| 习题 .....                       | 268        | 15.5★ 基于固有频率和车轮行程<br>的优化 ..... | 324        |
| <b>14 悬架优化 .....</b>           | <b>271</b> | 15.6 小结 .....                  | 329        |
| 14.1 数学模型 .....                | 271        | 15.7 主要符号 .....                | 329        |
| 14.2 频率响应 .....                | 276        | 习题 .....                       | 330        |
| 14.3 <i>RMS</i> 优化 .....       | 279        | <b>参考文献 .....</b>              | <b>332</b> |
| 14.4★ 时间响应优化 .....             | 295        |                                |            |
| 14.5 小结 .....                  | 298        |                                |            |



## 9 应用动力学

刚体车辆的动力学可以看作是相对于静止全域坐标系的刚体运动，本章将对描述刚体平移和旋转运动的牛顿运动方程和欧拉运动方程等动力学定律进行回顾。

### 9.1 动力学要素

首先说明本节讨论要用到的动力学要素的定义。

#### 9.1.1 力和力矩

在牛顿动力学中，作用在连接着的刚体系统上的力可以分为内力和外力。内力是指相互接触的刚体之间的作用力，外力是指从系统外部施加的力。外力可以是接触力，比如作用在驱动车轮接地印迹上的牵引力，也可以是车身力，比如车身受到的重力。

外力和外力矩称作**负载**，作用在刚体上的一组力和力矩，如图 9.1 所示的车辆所受的力和力矩，称作**力系**。合力或总力  $F$  表示作用在刚体上所有外力的向量和，合力矩或总力矩  $M$  表示所有外部力构成力矩的向量和。

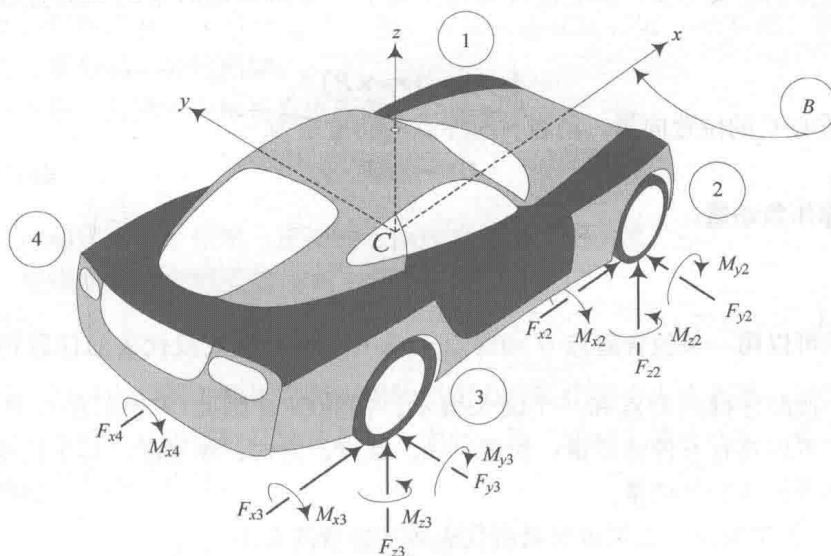


图 9.1 车辆力系是指作用在接地印迹上的力和力矩

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (9.1)$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{M}_i \quad (9.2)$$

设有一个作用在位于  $\mathbf{r}_P$  处点  $P$  的力  $\mathbf{F}$ ，对通过原点的单位向量为  $\hat{u}$  的直线  $l$  的力的矩为

$$\mathbf{M}_l = \hat{u} \cdot (\mathbf{r}_P \times \mathbf{F}) \quad (9.3)$$

力  $F$  对位于  $r_Q$  处点  $Q$  的矩为

$$M_Q = (r_P - r_Q) \times F \quad (9.4)$$

所以,  $F$  对原点的矩为

$$M = r_P \times F \quad (9.5)$$

力的矩也称作**扭矩**或**力矩**。

力系的作用等效于合力与力系合力矩的共同作用, 如果两个力系的合力与合力矩相等, 则这两个力系等效。如果一个力系的合力等于 0, 则该力系的合力矩与坐标系原点无关, 这样的合力矩称作**力偶**。

当力系简化为相对于参考点  $P$  的合力  $F_P$  与合力矩  $M_P$  时, 则可以将该参考点变换为另一个参考点  $Q$ , 并求出新的合力与合力矩。

$$F_Q = F_P \quad (9.6)$$

$$M_Q = M_P + (r_P - r_Q) \times F_P = M_P + r_P \times F_P \quad (9.7)$$

### 9.1.2 动量

某一运动刚体的动量是大小等于该刚体总质量乘以其质心移动速度的向量。

$$p = m v \quad (9.8)$$

动量  $p$  也称作**平动动量**或**直线动量**。

设某一刚体的动量为  $p$ , 该动量对通过原点的, 方向单位向量为  $\hat{u}$  的直线  $l$  的**动量矩**  $L$  为

$$L_l = \hat{u} \cdot (r_C \times P) \quad (9.9)$$

式中,  $r_C$  是质心  $C$  的位置向量。动量  $p$  对原点的动量矩为

$$L = r_C \times P \quad (9.10)$$

动量矩  $L$  又称作**角动量**。

### 9.1.3 矢量

矢量表示可以用一条包含起点  $O$  和终点  $P$  的有方向的直线段代表的任意物理量。矢量也可以用两个按顺序排列的点和一个箭头表示, 例如  $\overrightarrow{OP}$ , 因此  $\overrightarrow{PP}$  表示在点  $P$  位置的零矢量。矢量最多可以具有五种特征量: **长度**、**轴**、**端点**、**方向**、**物理量**, 其中长度和方向对任意矢量都是必须具备的特征量。

1) 长度。矢量的长度表示该矢量所代表的物理量的大小。

2) 轴。矢量所在的直线, 是矢量的轴, 又称作**作用线**。

3) 端点。矢量的起点或终点称作**作用点**, 表示矢量在该点作用。

4) 方向。矢量的方向表示矢量在轴线上指向的方向。

5) 物理量。任何矢量均代表一个物理量, 如果一个物理量可以用矢量表示, 则该物理量称作**矢量物理量**。物理量的大小与矢量的长度成比例, 尽管矢量可以没有量纲, 但是没有物理量的矢量没有意义。

根据物理量和应用情况, 共有 7 种矢量: 点矢量、线矢量、面矢量、自由矢量、点 - 直线矢量、点 - 面矢量和点 - 自由矢量。以下分别作出解释:

1) 点矢量。如果某矢量的所有特征量: 长度、轴、端点、方向和物理量均确定时, 则该矢量称作有界矢量、点矢量, 点矢量固定在某点不动。

2) 线矢量。如果矢量的作用点在轴上, 又没有被固定, 则该矢量称作滑动矢量、线矢量。线矢量可以在其轴上自由滑动。

3) 面矢量。如果矢量的作用点可以在某个面上始终保持平行移动, 则该矢量称作面矢量。如果该面为平面, 则该矢量称作平面矢量。

4) 自由矢量。如果矢量的轴没有固定, 则该矢量称作自由矢量或方向矢量。自由矢量可以在保持方向不变的情况下平行地移动到指定空间中的任意一点。

5) 点-直线矢量。如果矢量的起点固定, 其终点可以在某一直线上滑动, 则该矢量称作点-直线矢量。点-直线矢量的长度和方位变量受某些条件约束, 但是, 如果点-直线矢量的起点和终点都在其滑动所在的直线上, 则其方位也是常量。

6) 点-面矢量。如果矢量的起点固定, 其终点可以在某个面上滑动, 则该矢量称作点-面矢量。点-面矢量的长度和方位变量受某些条件约束, 如果该面为平面, 则该矢量称作点-平面矢量, 点-面矢量的起点也可能会在其滑动所在的面上。

7) 点-自由矢量。如果矢量的起点固定, 其终点可以在某指定空间中任意移动, 则该矢量称作点-自由矢量, 点-自由矢量的长度和方位都是变量。

两个矢量只有代表相同物理量且在同一坐标系中表示时才有可比性, 如果两个矢量有可比性、类型相同且特征量相等, 则称这两个矢量相等。如果两个矢量有可比性、类型相同且可以互相代替, 则称这两个矢量是等效矢量。矢量只能在同轴时才能相加, 如果矢量不同轴, 则需要将矢量分解再进行相加。

力是滑动矢量, 力偶和力矩是自由矢量。

### 9.1.4 运动方程

牛顿第二运动定律和牛顿第三定律重点阐述力系的应用, 第二运动定律, 又称作牛顿运动方程指出, 直线动量的全域变化速率与全域作用力成正比。

$${}^G\mathbf{F} = \frac{{}^G d}{dt} {}^G\mathbf{p} = \frac{{}^G d}{dt} (m {}^G\mathbf{v}) \quad (9.11)$$

牛顿第三运动定律指出, 两个物体之间作用的作用力与反作用力大小相等, 方向相反。

第二运动定律可以扩展到包括旋转运动, 因此, 第二运动定律还指出, 角动量的全域变化速率与全域作用力矩成正比。

$${}^G\mathbf{M} = \frac{{}^G d}{dt} {}^G\mathbf{L} \quad (9.12)$$

证明: 对动量力矩式 (9.10) 求微分得到

$$\begin{aligned} \frac{{}^G d}{dt} {}^G\mathbf{L} &= \frac{{}^G d}{dt} (\mathbf{r}_C \times \mathbf{p}) = \left( \frac{{}^G d\mathbf{r}_C}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_C \times \frac{{}^G d\mathbf{p}}{dt} \right) \\ &= {}^G\mathbf{r}_C \times \frac{{}^G d\mathbf{p}}{dt} = {}^G\mathbf{r}_C \times {}^G\mathbf{F} = {}^G\mathbf{M} \end{aligned} \quad (9.13)$$

### 9.1.5 功和能量

质量为  $m$ , 速度为  ${}^G\mathbf{v}_P$ , 位置在  ${}^G\mathbf{r}_P$  的运动物体  $P$  的动能  $K$  为

$$K = \frac{1}{2} m {}^G v_P^2 = \frac{1}{2} m ({}^G \dot{\mathbf{d}}_B + {}^B v_P + {}^B_G \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P)^2 \quad (9.14)$$

式中,  $G$  表示速度矢量  $v_P$  所在的全域坐标系。从点 1 运动到点 2 过程中作用力  ${}^G \mathbf{F}$  对  $m$  所做的功用矢量  ${}^G \mathbf{r}$  表示, 即

$${}_1 W_2 = \int_1^2 {}^G \mathbf{F} \cdot d {}^G \mathbf{r} \quad (9.15)$$

同时,

$$\begin{aligned} \int_1^2 {}^G \mathbf{F} \cdot d {}^G \mathbf{r} &= m \int_1^2 \frac{d}{dt} {}^G v \cdot {}^G v dt = \frac{1}{2} m \int_1^2 \frac{d}{dt} v^2 dt \\ &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = K_2 - K_1 \end{aligned} \quad (9.16)$$

上式表明,  ${}_1 W_2$  等于物体在终点和起点上的动能之差。

$${}_1 W_2 = K_2 - K_1 \quad (9.17)$$

式 (9.17) 称作做功和能量定理。如果存在一个标量势场函数  $V = V(x, y, z)$ , 则有

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k}\right) \quad (9.18)$$

那么, 做功和能量定理简化为能量守恒定理。

$$K_1 + V_1 = K_2 + V_2 \quad (9.19)$$

势场函数  $V = V(x, y, z)$  的值即为系统的势能。

### 例 374 质心位置

刚体质心在坐标系中的位置用  ${}^B \mathbf{r}_C$  表示, 通常在连体坐标系  $B$  中度量。

$${}^B \mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \int_B {}^B \mathbf{r} dm \quad (9.20)$$

$$\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \int_B x dm \\ \frac{1}{m} \int_B y dm \\ \frac{1}{m} \int_B z dm \end{bmatrix} \quad (9.21)$$

图 9.2 中的 L 形对称刚体零件, 均匀密度  $\rho = 1$ , 对其进行质心积分, 即可得到零件质

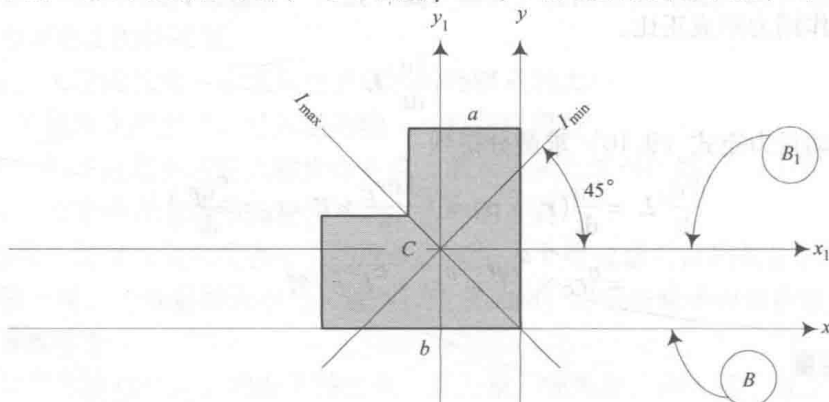


图 9.2 L 形对称零件的主坐标系

心  $C$  的位置,  $C$  在  $x$  方向的位置为

$$x_C = \frac{1}{m} \int_B x dm = \frac{1}{A} \int_B x dA = -\frac{b^2 + ab - a^2}{4ab + 2a^2} \quad (9.22)$$

由于零件是对称的, 所以有

$$y_C = -x_C = \frac{b^2 + ab - a^2}{4ab + 2a^2} \quad (9.23)$$

$a = b$  时,  $C$  的位置为

$$y_C = -x_C = \frac{1}{2}b \quad (9.24)$$

**例 375 ★** 任何力系都等效于一个偶单力组

根据 Poinsot 理论: 任何力系都等效于一个单独的力和一个平行于该力的力矩。设  $\mathbf{F}$  和  $\mathbf{M}$  为某力系的合力与合力矩, 将该力矩根据力的作用轴分解为平行分量  $\mathbf{M}_{//}$  和垂直分量  $\mathbf{M}_{\perp}$ 。力  $\mathbf{F}$  和垂直力矩  $\mathbf{M}_{\perp}$  可以用一个平行于  $\mathbf{F}$  的单独的力  $\mathbf{F}'$  代替, 所以, 该力系简化为互相平行的力  $\mathbf{F}'$  和力矩  $\mathbf{M}_{//}$ , 一个力以及一个绕该力轴线的力矩称作偶单力组。

Poinsot 理论与 Chasles 理论相似, Chasles 理论中: 任何刚体的运动都等效于一个螺旋运动, 即一个平移运动以及一个绕该平移轴线的转动。

在螺旋运动与偶单力组之间没有像牛顿运动方程那样的简单的关系, 如果存在螺旋运动的二次导数与施加作用的偶单力组成正比这样的关系, 则可以得到牛顿运动方程与欧拉运动方程的组合运动方程。

**例 376 ★** 运动连体坐标系中运动点的运动

例 216 中求出的图 5.9 所示的运动点  $P$  的速度和加速度为

$${}^G \mathbf{v}_P = {}^G \dot{\mathbf{d}}_B + {}^G R_B ({}^B \mathbf{v}_P + {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P) \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} {}^G \mathbf{a}_P = & {}^G \ddot{\mathbf{d}}_B + {}^G R_B ({}^B \mathbf{a}_P + 2 {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{v}_P + {}^B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^B \mathbf{r}_P) \\ & + {}^G R_B [{}^B \boldsymbol{\omega}_B ({}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P)] \end{aligned} \quad (9.26)$$

因此, 质点  $P$  的运动方程为

$$\begin{aligned} {}^G \mathbf{F} = m {}^G \mathbf{a}_P \\ = m [{}^G \ddot{\mathbf{d}}_B + {}^G R_B ({}^B \mathbf{a}_P + 2 {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{v}_P + {}^B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B \times {}^B \mathbf{r}_P) \\ + m {}^G R_B [{}^B \boldsymbol{\omega}_B ({}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P)] \end{aligned} \quad (9.27)$$

**例 377** 旋转坐标系中的牛顿运动方程

设一个球形刚体 (例如地球) 上有一个固定的点, 该球形刚体以稳定的角速度  $\boldsymbol{\omega}$  转动。运动着的刚体上点  $P$  的运动方程, 可以在动坐标系中动点的运动方程式 (9.27) 中令  ${}^G \ddot{\mathbf{d}}_B = {}^B \dot{\boldsymbol{\omega}}_B = 0$  求出。

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{F} = m {}^B \mathbf{a}_P + m {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P) + 2m {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \dot{\mathbf{r}}_P \\ \neq m {}^B \mathbf{a}_P \end{aligned} \quad (9.28)$$

上式表明, 在旋转坐标系中, 牛顿运动方程  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  应做一定的调整。

**例 378** 地球自转偏向力 (科里奥利力)

地球表面运动着的车辆上一点的运动方程为

$${}^B \mathbf{F} = m {}^B \mathbf{a}_P + m {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{r}_P) + 2m {}^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B \mathbf{v}_P \quad (9.29)$$

整理后得到

$${}^B\mathbf{F} - m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{r}_P) - 2m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{v}_P = m^B \mathbf{a}_P \quad (9.30)$$

式(9.30)是关于在旋转坐标系中观察者的运动方程,这正是位于地球上的观察者的情况。方程的左边称作有效力  $\mathbf{F}_{\text{eff}}$

$$\mathbf{F}_{\text{eff}} = {}^B\mathbf{F} - m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times ({}^B_G \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{r}_P) - 2m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{v}_P \quad (9.31)$$

因为看起来像是这个力的影响下才使质点在刚体坐标系  $B$  中运动。

式中第二项是离心力的负数,指向外侧。在地球赤道位置该力达到最大值,大约是重力加速度的 0.3%。

$$\begin{aligned} r\omega^2 &= 6373.388 \times 10^3 \times \left( \frac{2\pi}{24 \times 3600365.25} \right)^2 \\ &= 3.3917 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad (9.32)$$

如果考虑由地球半径变化引起的重力加速度的变化量,因为地球极地半径为  $R = 6356912\text{m}$ ,地球赤道半径为  $R = 6378388\text{m}$ ,则重力加速度变化量变为 0.53%。所以,一般而言,一名运动员,例如撑竿跳运动员,在北极训练后再到赤道地区参加比赛时,通常会取得更好的成绩。

有效力的第三项称作科里奥利力或科里奥利效应,  $F_C$ , 与  $\boldsymbol{\omega}$  和  ${}^B\mathbf{v}_P$  垂直。对于在北半球纬度为  $\theta$  处向赤道运动的质量  $m$ , 应该对该质量提供一个与科里奥利效应相等的向东方向的侧向力,以保持其相对于地面的运动方向。

$$F_C = 2m_G^B \boldsymbol{\omega}_B \times {}^B\mathbf{v}_m = 1.4584 \times 10^{-4B} p_m \cos\theta \text{ kgm/s}^2 \quad (9.33)$$

科里奥利效应是导致火车轨道、道路和河流的西侧比东侧磨损较为严重的原因。科里奥利力不足也会导致风、发射器、洪水和空中落体等改变方向。

### 例 379 单向运动中的功、力和动能

质量为  $m = 1200\text{kg}$  的车辆初始动能为  $K = 6000\text{J}$ , 该车辆在一个恒定力  $\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{l}} = 4000\hat{\mathbf{l}}$  的作用下,经过时间  $t_f$  从  $X(0) = 0$  运动到  $X(t_f) = 1000\text{m}$  处。运动过程中该力所做的功为

$$W = \int_{r(0)}^{r(t_f)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{1000} 4000 dX = 4 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{m} = 4\text{MJ} \quad (9.34)$$

车辆在时间终止时的动能为

$$K(t_f) = W + K(0) = 4006000\text{J} \quad (9.35)$$

时间终止时车辆的速度为

$$v_2 = \sqrt{\frac{2K(t_f)}{m}} \approx 81.7\text{m/s} \approx 22.694\text{km/h} \quad (9.36)$$

### 例 380 直接动力学和逆向动力学

如果作用力随时间变化,且变化函数已知,则

$$\mathbf{F}(t) = m\ddot{\mathbf{r}} \quad (9.37)$$

可以通过积分求出运动方程的通解,即

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt \quad (9.38)$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \mathbf{F}(t) dt dt \quad (9.39)$$