

经 典 原 版 书 库

# 离散数学及其在 计算机科学中的应用

[美] 克利福德·斯坦 罗伯特 L. 戴斯得尔 肯尼斯·博加特 著  
Clifford Stein Robert L. Drysdale Kenneth Bogart

(英文版)



经 典 原 版 书 库

# 离散数学及其在 计算机科学中的应用

(英文版)

*Discrete Mathematics for  
Computer Scientists*



[美] 克利福德·斯坦 罗伯特 L. 戴斯得尔 肯尼斯·博加特 著  
Clifford Stein Robert L. Devadas Kenneth H. Bogart



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 (CIP) 数据

离散数学及其在计算机科学中的应用 (英文版) / (美) 克利福德·斯坦 (Clifford Stein) 等著. —北京: 机械工业出版社, 2017.9

(经典原版书库)

书名原文: Discrete Mathematics for Computer Scientists

ISBN 978-7-111-58097-3

I. 离… II. 克… III. 离散数学-应用-计算机科学-英文 IV. ①O158 ②TP3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 233136 号

本书版权登记号: 图字 01-2016-2188

Authorized reprint from the English language edition, entitled *Discrete Mathematics for Computer Scientists*, 1E, Clifford Stein, Robert L. Drysdale, Kenneth Bogart, published by Pearson Education, Inc., Copyright © 2011.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

English language edition published by China Machine Press/Huazhang Co., Copyright © 2017.

本书英文影印版由 Pearson Education Inc. 授权机械工业出版社独家出版。未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

此影印版仅限于中华人民共和国境内 (不包括香港、澳门特别行政区及台湾地区) 销售发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签, 无标签者不得销售。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 曲 熠

责任校对: 李秋荣

印 刷: 北京文昌阁彩色印刷有限责任公司

版 次: 2017 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

开 本: 186mm×240mm 1/16

印 张: 31.75

书 号: ISBN 978-7-111-58097-3

定 价: 99.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzjsj@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光/邹晓东

## 出版者的话

文艺复兴以来，源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范，使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势；也正是这样的优势，使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中，美国的产业界与教育界越来越紧密地结合，计算机学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线，由此而产生的经典科学著作，不仅擘划了研究的范畴，还揭示了学术的源变，既遵循学术规范，又自有学者个性，其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年，在全球信息化大潮的推动下，我国的计算机产业发展迅猛，对专业人才的需求日益迫切。这对计算机教育界和出版界都既是机遇，也是挑战；而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短的现状下，美国等发达国家在其计算机科学发展的几十年间积淀和发展的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此，引进一批国外优秀计算机教材将对我国计算机教育事业的发展起到积极的推动作用，也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始，我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力，我们与Pearson, McGraw-Hill, Elsevier, MIT, John Wiley & Sons, Cengage等世界著名出版公司建立了良好的合作关系，从他们现有的数百种教材中甄选出Andrew S. Tanenbaum, Bjarne Stroustrup, Brian W. Kernighan, Dennis Ritchie, Jim Gray, Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, Abraham Silberschatz, William Stallings, Donald E. Knuth, John L. Hennessy, Larry L. Peterson等大师名家的一批经典作品，以“计算机科学丛书”为总称出版，供读者学习、研究及珍藏。大理石纹理的封面，也正体现了这套丛书的品位和格调。

“计算机科学丛书”的出版工作得到了国内外学者的鼎力相助，国内的专家不仅提供了中肯的选题指导，还不辞劳苦地担任了翻译和审校的工作；而原书的作者也相当关注其作品在中国的传播，有的还专门为其书的中译本作序。迄今，“计算机科学丛书”已经出版了近百个品种，这些书籍在读者中树立了良好的口碑，并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也被越来越多实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑，这些因素使我

们的图书有了质量的保证。随着计算机科学与技术专业学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化,教育界对国外计算机教材的需求和应用都将步入一个新的阶段,我们的目标是尽善尽美,而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正,我们的联系方式如下:

华章网站: [www.hzbook.com](http://www.hzbook.com)

电子邮件: [hzjsj@hzbook.com](mailto:hzjsj@hzbook.com)

联系电话: (010) 88379604

联系地址: 北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码: 100037



华章科技图书出版中心

# 前 言

## 课程动机与目标

很多学院与大学都开设了离散数学这门课程。上这些课程的学生来自多个学科，其中最多的是来自计算机科学的学生。由国家科学基金会支持<sup>⊖</sup>，作为达特茅斯(Dartmouth)学院跨学科数学项目的一部分，我们提出创建一门离散数学课程来直接解决计算机科学学生的需求。计算机科学的学生需要知道哪些离散数学知识？为什么需要知道这些知识？关于这两个问题，我们的看法如下。

第一，我们认为一些知识对于计算机科学很重要，但是传统的离散数学课程常常不会透彻地讲授这些知识。这些知识包括：递归树和解决递推关系的主定理，计算平均运行时间和分析随机算法的概率理论，以及强归纳法和结构归纳法。

第二，我们认为对于计算机科学的学生而言，那些重要的离散数学知识在计算机科学里对应着一些颇有启发性的问题，并且只具备一两门计算机科学入门课程水平的学生也能够理解。这样有可能回答一届又一届学生在应用数学课程中的疑问：“为什么我们必须学习这个？”因此，我们选择写一本针对计算机科学学生的教科书，为他们提供必要的数学基础，并且通过他们在起步阶段就能够理解的计算机科学问题来启发学习兴趣。

在计算机科学系，离散数学通常是学生的专业首选课之一，甚至是第一门计算机科学课程的先修课。在这种情况下，教师面临着两难困境：是讲授纯数学概念，几乎不涉及计算机应用，还是讲授计算机科学的例子，从而营造一种针对计算机科学学生的教学环境。第一种讲课方式让学生们抱怨在学习第一门计算机科学课程之前，被迫学习太多“不相干的”数学。第二种讲课方式让教授们（通常是数学家）尝试给可能从来没有写过程序的学生解释相当高级的计算机科学知识，比如散列、二叉树和循环程序等。即使在最好的情况，这种方法也明显降低了数学的深度。我们的分析产生了一种不同的讲课方式，创设一门出现在学生稍后学习过程中的课程。尽管我们不强制要求学生已经上过微积分，但是我们假定学生了解并且能够熟练使用加和符号、对数和指数函数，因此对于

<sup>⊖</sup> 基金资助号 DUE-9552462。

微积分学前课程的内容有很深的了解是很有帮助的<sup>⊖</sup>。这意味着要让学生在在一门计算机科学的导论课程中先了解递归程序，然后再学习这门课。最好可以和数据结构课程一起或者在其之后学习，不过我们会通过例子解释书中所使用的数据结构，因此数据结构不是这门课的先导课程。

我们觉得这样安排离散数学这门课程有几个优势，下面列举几个特别的例子：

- 学生已经有了较为深入的问题求解、算法和代码的经验。
- 学生已经学习过或者在准备学习一些重要的计算机科学概念，比如散列、递归、排序、搜索以及基本的数据结构。
- 学生已经知道足够的计算机科学知识，包括一些启发性的例子，或者其他容易理解的简单例子。例如：
  - 散列可以用于启发关于概率的学习。
  - 分析递归程序（比如并归和快速排序）可以用于启发关于递归关系及其解决方法的学习。
  - 在寻找队列中最小元素的过程中，分析我们期望多久找到一个新的最小值，可以用来启发关于期望的线性性质和调和数的学习。
  - 二叉树可以用来讲解结构递归法，也可以启发作为图的特例的树的学习。

在我们自己的讲课经验中，这门课是算法课的前导，并且学生经常在结束离散数学课程不久后就学习算法。这样，他们会发现自己可以直接使用刚刚学过的离散数学知识。

## 我们的教育哲学

这本教科书是以教学活动为驱动的，并且包含丰富的练习题。通过对这些活动的解释和扩展，教学素材得以不断充实。对于学生最有效的方法是尝试认真完成学生活动，而先不阅读那些教学活动后面的解释。我们最初设计这些教学活动是想让学生在课堂中以小组的形式来完成，因此，如果需要在课外开展教学活动，建议学生组建小组一起完成。我们采用这种方式来设计这门课程以及这本教材，希望借此帮助学生们养成自己的数学思维习惯。我们仔细研究了本科学生应当怎样学习数学，得到了以下几个结论：

- 如果学生能够主动发现他们正在学习的是什么（经常被称为“主动学习”），往往比那些被动学习的学生能够更长久地记住这些概念，也更有可能在学习环境之外运用这些概念。

⊖ 我们的绝大多数学生已经学习过微积分。在某些独立的小节中，我们会使用初级导数，并且在关于概率的选修小节中，我们会使用自然对数、指数函数和初级幂级数。如果忽略少数使用导数的证明和问题，以及那些概率的选修小节，教师就可以回避微积分。

- 当学生在一个小组中和同学一起学习，而不是在由导师带领的一个更大的班级中时，他们更有可能提出问题，直到彻底理解某个主题。（然而，这一点不总是成立。很多学生需要在小组中感到舒适之后才敢提出的问题，因为他们担心自己的提问会耽误别人的学习速度。我们尝试提高课程中的舒适度，方法是允许学生自由选择学习小组，并且根据出席模式允许或者要求学生在不同的天数后更换不同的小组。）
- 最后，学生在给别人解释概念的时候能够更有效地组织自己脑中的想法，同时能够熟悉数学语言。

本书内容足够支撑一门四学期学时的课程。在达特茅斯学院，我们使用这本书来上一门快节奏的课程，一周上三天且仅仅上九周，并且覆盖了本书除了最后几个章节和一部分带星号的内容之外的所有内容。

## 证明的作用

我们写这本书的目的之一是给学生们提供一些关于证明的背景知识，在以后的计算机科学课程中，他们将需要理解并且写出证明。我们的观点是用听、看、讨论并且尽量多做证明来学习如何做证明。为了方便讨论，我们需要用一种共同的语言来区分证明的组成成分，并且建立起一个讨论的框架。因为这个原因，书中包含一个关于逻辑的章节，即为学生提供这种语言，并帮助他们反思自己已经看到过的证明。为了使这章的内容言之有物，我们将其放在学生了解一些组合和数论的证明之后。这种方法使得学生能够掌握一些用来阐述逻辑证明的具体例子。我们意识到这不是在离散数学书中常用的顺序。然而，我们发现用具体的例子来处理重要事实的证明，可以使学生理解一些实际的基础知识，否则这些证明看起来就像是罗列很长的推理形式规则。

我们已经把关于逻辑的章节放在数学归纳法章节之前，从而可以用逻辑语言来讨论和思考数学归纳法。

## 数学归纳法

计算机科学的归纳证明经常使用子问题而不是实际问题的精缩版“小问题”。因此，我们强调强归纳法和弱归纳法，我们也介绍树和图的结构归纳法。我们尝试用学生关于递归的经验来帮助他们理解归纳证明，并且设计基于归纳法的证明。特别是，当开始设计归纳证明时，从一个大问题开始并且把它递归分成小问题，比从小问题开始组成大问题更加有利。



## 伪代码的使用

我们同时使用文字和伪代码描述算法。对于任何使用 Java、C 或者 C++ 编过程序的人，伪代码很容易读懂，使用其他语言写过程序的人理解起来也不费力。我们不求给出语法上正确的任何一种语言的代码，而是力求代码的清晰。比如“互换变量  $x$  和  $y$  的值”，我们会写成“交换  $x$  和  $y$ ”，而不是写成三行的代码。类似的，我们写“如果点  $i$ 、 $j$  和  $k$  不共线”，而不用担心详细的计算过程如何处理它。这里有一些本书使用的特别约定。

- 代码区通过缩进来表示，而没有像许多语言一样使用“begin”“end”或者“{ }”。
- for 循环写成“for  $i = 1$  to  $n$ ”来标记变量  $i$  的取值范围为从 1 到  $n$ 。
- 如果 while 之后的布尔表达式取值为真，while 循环的主体会重复执行。
- repeat 循环使用格式“repeat...until”。在 repeat 和 until 之间的代码最少执行一次，并且会重复执行直到在 until 之后的布尔表达式取值为真。
- if 语句可以使用以下任意一个格式：

○if (表达式) 代码区

○if (表达式) 代码区 1 else 代码区 2

在第一种格式中，当且仅当表达式为真时代码区执行。在第二种格式中，如果表达式为真则代码区 1 执行，如果表达式为假则代码区 2 执行。

- 数组的下标使用“[]”。
- 赋值用“=”，而等式比较用“==”。
- $x$  递增和递减的缩写用“ $x++$ ”和“ $x--$ ”。
- 逻辑操作符“not”用“!”表示，所以“!true”是“false”，当  $x$  不小于  $y$  时， $!(x < y)$  取值为真。逻辑“and”用“&&”表示，逻辑“or”用“||”表示。

## 新版中的变化

有一本和本书题目相似且作者相同的书，已由另一家出版社出版，但那家出版社退出了大学教科书市场。Ken Bogart 是那本书的主要作者，他在书出版前不久辞世。我们非常怀念他参与准备这本新书的日子。

新版相对于之前版本最明显的更新如下：

- 上一版书讨论过等价关系，不过只是作为一个集合的划分。等价关系的自反性、对称性和传递性被纳入附录，并且讨论了偏序和全序关系。这本书介绍关系，并且将其作为一个用于关联函数、等价关系、偏序关系和全序关系的概念。书中也

解释了为什么自反性、对称性和传递性可以推导出等价关系，而自反性、反对称性和传递性则推导出偏序关系。

- 本书包含结构归纳法，同时，关于递归和归纳关系的章节已经扩展，并且使用了一些不同的例子。
- 一些关于递推关系的章节已经被移除或者放在附录中，这些章节证明在递推中去掉下取整和上取整，并将关系的作用域扩展到非同底数幂的数域，主定理仍然有效。我们认为这些内容不利于章节的顺畅，并且需要处理一些大多数学生在这个阶段不需要知道的细节。
- 在概率一章中增加贝叶斯定理。
- 增加问题以讲解新的知识主题。

还有一些细小的改变（例如，介绍“乘以  $x$  和相减”方法来得到一个几何级数的封闭形式）。

## 教辅资源<sup>①</sup>

下列教辅资源只针对符合资格的教师开放。请访问 [www.pearsonhighered.com/irc](http://www.pearsonhighered.com/irc) 或联系当地的 Addison-Wesley/Pearson Education 销售代表，或者发送邮件到 [computing@aw.com](mailto:computing@aw.com)，以获得关于怎样取得这些资料的信息。本书教辅资源包括：

- 带有答案的教师参考手册
- 教学建议
- 课后作业的答案
- 课堂练习题
- 关于如何开展课堂小组练习来活跃讨论的详细资料
- 幻灯片

## 致谢

很多人对这本书的最初版做出了贡献。我们要谢谢 Eddie Cheng (Oakland University)、Alice Dean (Skidmore College)、Ruth Hass (Smith College) 和 Italo Dejter (University of Puerto Rico)，感谢他们对早期手稿的充满价值的评论。随着本书的不断改

<sup>①</sup> 关于本书教辅资源，只有使用本书作为教材的教师才可以申请，需要的教师请填写本书最后一页“教学支持申请表”，并通过邮件同时发给培生与我方。——编辑注

进，我们和 Neal Young、Pasad Jayanti、Tom Shemanske、Rose Orellana、April Rasala、Amit Chakrabarti 以及 Carl Pomerance 用预备版在达特茅斯学院教授离散数学课程。他们中的每个人都对最后的成品有影响，而且有一些是很大的影响，感谢他们提出的建议。特别感谢 Carl Pomerance 在他的教学过程中卓有见地和前瞻性的评论。Qun Li 是我们开始准备手稿时的研究生助教，正是他使得我们出的所有问题都有了答案！现在提供给教师的答案中，核心部分仍然是他完成的工作。计算机科学系和数学系的其他研究生助教也提供了很大的帮助，在我们教授手稿时，他们了解学生听懂了哪些内容而不明白哪些内容，从而进一步帮助他们解决问题。按照这些助教加入的顺序，他们是 S. Agrawal、Elishiva Werner-Reiss、Robert Savell、Virgiliu Pavlu、Libo Song、Geeta Chaudhry、King Tan、Yurong Xu、Gabriella Dumitrascu、Florin Constantin、Alin Popescu 和 Wei Zhang。我们过去的学生也提供了很有价值的反馈。特别是 Eric Robinson 读过此书临近出版的版本，并且非常认真地指出了那些难以理解的章节。

我们也要感谢审稿人和出版社的编辑们。以下审稿人提供了很有益的建议：Michael Rothstein (Kent Stat University)，Ravi Janardan (University of Minnesota, Twin Cities)，Klaus Sutner (Carnegie Mellon University)，Doug Baldwin (SUNY Genesco)，Stuart Reges (University of Washington)，Richard Anderson (University of Washington)，Jonathan Goldstine (Penn State University)。Sandra Hakanson 是 Pearson 的销售代表，她首先向 Pearson 的 Addison-Wesley 部门推荐此书，并协助我们联系编辑负责人 Michael Hirsch。Hirsch 同意出版这本书，并且负责整个出版流程，很多改进本书的建议都来源于他。其他对本书的出版做出直接贡献的人有：Stephanie Sellinger (编辑助理)，Jeff Holcomb (总编辑)，Heather McNally (项目编辑)，Elena Sidorova (封面设计)。在 Laserwords 的 Bruce Hobart 负责手稿的修改、合并和错误纠正。

每一个作者都想感谢另外两位作者从各自的专业活动上抽出时间花在这本书上，因为的确需要时间来融合不同学科的观点。在国家科学基金会的支持下，我们能够承担这个项目。本科生教学部门的员工在这个项目中展现了他们出色的洞察力，在数学科学的项目构思和整个教学课程的实践中，他们清楚本科生的需求，也了解开展跨学科课程的困难。我们感谢这个项目在本科数学教育和跨学科课程发展中起到的积极作用。

Cliff Stein

Scot Drysdale

# Contents

<b>CHAPTER 1</b>	<b>Counting</b>	<b>31</b>
1.1	<b>Basic Counting</b>	<b>31</b>
	The Sum Principle	31
	Abstraction	33
	Summing Consecutive Integers	33
	The Product Principle	34
	Two-Element Subsets	36
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	37
	<i>Problems</i>	38
1.2	<b>Counting Lists, Permutations, and Subsets</b>	<b>40</b>
	Using the Sum and Product Principles	40
	Lists and Functions	42
	The Bijection Principle	44
	$k$ -Element Permutations of a Set	45
	Counting Subsets of a Set	46
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	48
	<i>Problems</i>	50
1.3	<b>Binomial Coefficients</b>	<b>52</b>
	Pascal's Triangle	52
	A Proof Using the Sum Principle	54
	The Binomial Theorem	56
	Labeling and Trinomial Coefficients	58
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	59
	<i>Problems</i>	60
1.4	<b>Relations</b>	<b>62</b>
	What Is a Relation?	62
	Functions as Relations	63

Properties of Relations	63
Equivalence Relations	66
Partial and Total Orders	69
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	71
<i>Problems</i>	72
<b>1.5 Using Equivalence Relations in Counting</b>	<b>73</b>
The Symmetry Principle	73
Equivalence Relations	75
The Quotient Principle	76
Equivalence Class Counting	76
Multisets	78
The Bookcase Arrangement Problem	80
The Number of $k$ -Element Multisets of an $n$ -Element Set	81
Using the Quotient Principle to Explain a Quotient	82
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	83
<i>Problems</i>	84
<b>CHAPTER 2 Cryptography and Number Theory</b>	<b>89</b>
<b>2.1 Cryptography and Modular Arithmetic</b>	<b>89</b>
Introduction to Cryptography	89
Private-Key Cryptography	90
Public-Key Cryptosystems	93
Arithmetic Modulo $n$	95
Cryptography Using Addition mod $n$	98
Cryptography Using Multiplication mod $n$	99
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	101
<i>Problems</i>	102

<b>2.2</b>	<b>Inverses and Greatest Common Divisors</b>	<b>105</b>
	Solutions to Equations and Inverses mod $n$	105
	Inverses mod $n$	106
	Converting Modular Equations to Normal Equations	109
	Greatest Common Divisors	110
	Euclid's Division Theorem	111
	Euclid's GCD Algorithm	114
	Extended GCD Algorithm	115
	Computing Inverses	118
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	119
	<i>Problems</i>	120
<b>2.3</b>	<b>The RSA Cryptosystem</b>	<b>123</b>
	Exponentiation mod $n$	123
	The Rules of Exponents	123
	Fermat's Little Theorem	126
	The RSA Cryptosystem	127
	The Chinese Remainder Theorem	131
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	132
	<i>Problems</i>	134
<b>2.4</b>	<b>Details of the RSA Cryptosystem</b>	<b>136</b>
	Practical Aspects of Exponentiation mod $n$	136
	How Long Does It Take to Use the RSA Algorithm?	139
	How Hard Is Factoring?	140
	Finding Large Primes	140
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	143
	<i>Problems</i>	144
<b>CHAPTER 3</b>	<b>Reflections on Logic and Proof</b>	<b>147</b>
<b>3.1</b>	<b>Equivalence and Implication</b>	<b>147</b>
	Equivalence of Statements	147

Truth Tables	150
DeMorgan's Laws	153
Implication	155
If and Only If	156
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	159
<i>Problems</i>	161
<b>3.2 Variables and Quantifiers</b>	<b>163</b>
Variables and Universes	163
Quantifiers	164
Standard Notation for Quantification	166
Statements about Variables	168
Rewriting Statements to Encompass Larger Universes	168
Proving Quantified Statements True or False	169
Negation of Quantified Statements	170
Implicit Quantification	173
Proof of Quantified Statements	174
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	175
<i>Problems</i>	177
<b>3.3 Inference</b>	<b>179</b>
Direct Inference (Modus Ponens) and Proofs	179
Rules of Inference for Direct Proofs	181
Contrapositive Rule of Inference	183
Proof by Contradiction	185
<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	188
<i>Problems</i>	189
<b>CHAPTER 4 Induction, Recursion, and Recurrences</b>	<b>191</b>
<b>4.1 Mathematical Induction</b>	<b>191</b>
Smallest Counterexamples	191

	The Principle of Mathematical Induction	195
	Strong Induction	199
	Induction in General	201
	A Recursive View of Induction	203
	Structural Induction	206
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	208
	<i>Problems</i>	210
<b>4.2</b>	<b>Recursion, Recurrences, and Induction</b>	<b>213</b>
	Recursion	213
	Examples of First-Order Linear Recurrences	215
	Iterating a Recurrence	217
	Geometric Series	218
	First-Order Linear Recurrences	221
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	225
	<i>Problems</i>	227
<b>4.3</b>	<b>Growth Rates of Solutions to Recurrences</b>	<b>228</b>
	Divide and Conquer Algorithms	228
	Recursion Trees	231
	Three Different Behaviors	239
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	240
	<i>Problems</i>	242
<b>4.4</b>	<b>The Master Theorem</b>	<b>244</b>
	Master Theorem	244
	Solving More General Kinds of Recurrences	247
	Extending the Master Theorem	248
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	250
	<i>Problems</i>	251
<b>4.5</b>	<b>More General Kinds of Recurrences</b>	<b>252</b>
	Recurrence Inequalities	252



	The Master Theorem for Inequalities	253
	A Wrinkle with Induction	255
	Further Wrinkles in Induction Proofs	257
	Dealing with Functions Other Than $n^c$	260
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	262
	<i>Problems</i>	263
<b>4.6</b>	<b>Recurrences and Selection</b>	<b>265</b>
	The Idea of Selection	265
	A Recursive Selection Algorithm	266
	Selection without Knowing the Median in Advance	267
	An Algorithm to Find an Element in the Middle Half	269
	An Analysis of the Revised Selection Algorithm	272
	Uneven Divisions	274
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	276
	<i>Problems</i>	277
<b>CHAPTER 5</b>	<b>Probability</b>	<b>279</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction to Probability</b>	<b>279</b>
	Why Study Probability?	279
	Some Examples of Probability Computations	282
	Complementary Probabilities	283
	Probability and Hashing	284
	The Uniform Probability Distribution	286
	<i>Important Concepts, Formulas, and Theorems</i>	289
	<i>Problems</i>	290
<b>5.2</b>	<b>Unions and Intersections</b>	<b>292</b>
	The Probability of a Union of Events	292
	Principle of Inclusion and Exclusion for Probability	295
	The Principle of Inclusion and Exclusion for Counting	301