中華大典

綫性方程組解法（方程術）總部

主編　姚　芳

三

三

綫性方程組解法（方程術）總部

方程術部……三
方程分部……三
題解……三
藝文……五
損益術分部……五
算法……五
直除與代入分部……一三
題解……一三
算法……一三
正負術分部……一六
題解……一六
算法……一六
正負術入方程術分部……一七
題解……一七
綜論……一七
算法……二〇
互乘相消法部……七三
題解……七三
算法……七三
藝文……一一五
方程新術部……一一七
算法……一一七
方程術之拓展部……一二三
題解……一二三
算法……一二七

列方程方法（天元術）與多元高次方程組解法（四元術）總部

天元術部……一五九
天元術概論分部……一五九
題解……一五九
紀事……一六一
綜論……一六五
算法……一六七
高冪居上分部……一七五
一元一次方程……一七五
算法……一七五
一元二次方程……一八五
算法……一八五
一元三次方程……二三〇
算法……二三〇
一元高次方程……二三五
算法……二三五
高冪居下分部……二四七
一元一次方程……二四七
算法……二四七
一元二次方程……二七二
算法……二七二
一元三次方程……四〇八
算法……四〇八
一元四次方程……四五八

算法……四五八
一元五次方程……五二六
算法……五二六
一元六次方程……五四五
算法……五四五
一元七次方程……五六〇
算法……五六〇
一元八次方程……五六三
算法……五六三
一元九次方程……五七六
算法……五七六
一元十次及以上方程……五七七
算法……五七七
四元術部……五八〇
四元術概論分部……五八〇
題解……五八〇
綜論……五八〇
二元術分部……六〇二
二元一次方程組……六〇二
算法……六〇二
二元二次方程組……六〇七
算法……六〇七
二元三次方程組……六三二
算法……六三二
二元高次方程組……六五四
算法……六五四
三元術分部……六六五
三元一次方程組……六六五
算法……六六五
三元二次方程組……六六六
算法……六六六
三元三次方程組……六八四
算法……六八四
三元高次方程組……六八九
算法……六八九
四元術分部……七一五
四元二次方程組……七一五
算法……七一五
四元三次方程組……七四五
算法……七四五
四元高次方程組……七四八
算法……七四八

綫性方程組解法(方程術)總部

主編 姚 芳

方程術部

方程分部

題解

《九章筭術》卷八《方程》 方程 三國魏·劉徽注 以御錯糅正負。

三國魏·劉徽《九章筭術注》 程，課程也。羣物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，竝列爲行，故謂之方程。行之左右無所同存，且爲有所據而言耳。

唐·李籍《九章筭術音義》 方程：直成切。方者，左右也。程者，課率也。左右課率，總統羣物，故曰方程。錯糅：女救切，雜也。

宋·賈憲《黄帝九章筭經細草》 數方者，謂之形也。程者，量度之總名，亦權衡丈尺斛斗之平法也，尤課分明多寡之義。

明·吴敬《九章筭法比類大全》卷八《方程》 以諸物總併爲問，其法以減損，求源爲主，去一存一，以考其數。

明·柯尚遷《數學通軌·九章釋例》 八曰方程。本註以御錯雜正負。

古註曰：方爲科数之形也。程者，量度總名，亦權衡丈尺斛斗之平法也。尤課分明多寡之義。

唐氏曰：未知兩物之孰貴孰賤，而但知兩物相參伍之總價。若使此三而彼五，則價共增若干，此五而彼三，則價共減若干。是兩價混雜而物数固相形也，於是以物權價，則因物之參伍而推出價之貴賤，謂之方程。方程者，物價相檢括，有定式而不可亂也。

除灋例：程者，物價與銀数各有定式而不可亂。今以除法例，乘法例列之，便見方程之法之實。

凡遇前爲銀之實數，後爲銀之價。或遇前爲物之實数，後爲物之價，應用除灋。

如銀一兩五錢買稻，價銀二錢四分買稻一石。此銀数銀價俱是銀也。如麻一百斤，麻價六斤半賣銀一兩，此麻数麻價俱是物也。又如棉花八百七十斤，花價十二斤。又如「秋粮四石五斗，每田一畝科粮四升七合，該田若干」之類。此俱是物也，應用除灋。凡前後俱是銀，或前後俱是物，悉如此例，謂之方程。

又或遇總物總銀俱置盤内，如總物内，欲求一石或一畝或一人之類，要見銀若干，就以總銀爲實，以總物爲灋，除之。如總銀，欲求一兩或一錢，要見物若干，就以總物爲實，以總銀爲灋，除之。此一爲銀数，一爲物数。雖類乘灋，然是分数，故用除灋。

乘灋例

凡遇前爲銀之實數，後爲物之價。或遇前爲物之實数，後爲銀之價，應用乘灋。如銀一兩五錢買稻，稻價四石五斗，此一爲銀数，一爲物價。又如八兩七錢買花，花價九十五斤，此一爲銀数，一爲物價，故並用乘灋。凡一爲銀数，一爲物價，悉如此例。

明·周述學《曆宗筭會》卷一一《各分》 衆物衆價諸數混和，正負錯雜，互隱其實。若云散亂，難以紀哲。然即各数之多，寡而參，互考究實，有一定之程度，而不容紊也。故其分實之法，謂之方程。此權度量之平法，因諸物總併法，以減損求源爲主，去一存一。以考其数，猶課分明，多寡之義也。

明·程大位《筭法統宗》卷一一《方程》 方，正也，程，数也。以諸物總併爲問，去繁就簡爲主。乃諸物繁冗，諸價錯雜，必須布置行列。或損益加減，同異正負。逓互遍乘，求其有等。以少減多，餘物爲法，餘價爲实，法实相除得一價，以推其餘。若繁雜甚者次第求之。正者正数，負者欠数。

清·李長茂《算海説詳》卷九《匿覆》 匿價方程法：方，正也，程，數也。諸價錯褋法求正數，必須布置行列，同異虛實，逓互遍乘，求其有等。法實相除，得一價，以推其餘。繁褋多倍者，次第求之。

清·方中通《數度衍》卷二一《方程》 方程雜和較乘法

通曰：數之不齊者，以乘齊之。數之不齊者，以較齊之。偏用者，方程也。

清·梅文鼎《方程論》卷一 正名：名不正，則言不順。諸本方程，皆以二色三色四色等分欵立法，而不分和較。宜其端緒糾紛而説之滋謬也，故先正其名。

正名有四，一和數，二較數，三和較雜，四和較交變。和者無正負，如只云某物如干，某物如干，共價如干，以問每物各價者是也。較者有正負，如云以某物如干，與某物如干相較，多價如干，或少價如干，或相當適足者是也。雜者半有正負，半無正負。如一行云某物，某物各如干，共價如干。而其一行則又云以某物如干較某物如干，差價如干。或價相當適足者是也。變者或先無正負而變爲有正負。或先有正負變而無正負。三色以往，重列減餘，兼用兩行者是也。

又 算之用至於勾股方程，至矣盡矣。窺高致遠，探賾窮幽，無所不備。然其用不出於和較，且以方程言之，凡方程列位，皆以下位爲之端。如所列下一位爲上中兩位之總價，則和也。若下一位爲上中兩位相差之價，則較也。較故分正負，和故不分正負。雖不立正負，然必以兩和互乘對減以得其差，然後其數可得而知矣。故三色以往，先無正負者，有時而正負立焉。故方程之法以和求較而已矣。較者易知，和者難知，和之中有較，較之中又有較，此萬數之所由生，萬法之所由起。

清·陳世明《數學舉要》卷一《方程名義》 方程之數，不外於和較求之之術，先遍乘之，以發其隱。復加減之，以顯其微，則爲和爲較無不得之。今悉和較之目，如左其有不盡者，觸類引伸可也。

一曰：和数乃以各物之數相併，而欲求所以外之者，術爲以乘得之數，中末俱相減。

二曰：以多爲較，乃以物易物，多價若干。

三曰：以少爲較，乃以物易物，少價若干，二術並同和數。

四曰：一多一少較，乃以物易物，一爲多價若干，一爲少價若干，術則中減而末加。

五曰：和適足，乃一爲各物之數相併，爲共數，一爲以物易則，其價相若，術以中加而末仍之。

六曰：多較適足，乃一爲以物易物，多價若干，一爲以物易物，其價相若。

七曰：少較適足，乃一爲以物易物，少價若干，一爲以物易物，其價相若，二術俱中減而末仍之。

八曰：和較相雜，以多爲較者，乃一爲各物相併之共數，一爲以物易多，多價若干，術則中減而末加。

九曰：和較相雜，以少爲較者，乃一爲各物相併共數，一爲以物易物，少價若干，術以中末俱相加，此二色方程之大畧也。至若三色以上，以至四五六七色，要亦不外於是，但有所謂正負同異者，而加減之術又自不同。正與正爲同名，負與負亦爲同名，正與負爲異名。術若同名相加，則異名者相減。其同名相減，則異名者相加。設有應加者遇無可加，則反減之。應減者遇無可減，則加之。此則方程之變化者也。

清·屈曾發《九數通考》卷九《方程》 方程說，方者，比也，程者，式也。設問中諸物繁冗，諸價錯雜，無可置算。必須布置行列，定爲一成之式。然後遞互遍乘，同異加減，求其有等。作爲比例，故曰方程。蓋用互乘者，所以齊其分，使其首數皆同，減盡而餘。一法一實，以得一數，以推其餘也。雖有三色四色，以至多色，不過累乘累減，亦歸於一法一實而已。其二色者設二行，三色者設三行，有幾色者必設幾行。若三色設二行，即不可算。二色設三行，則一行又無所用。故解方程者，又謂設數必成方而後可算也。然其要總在於分和較，和數相比者，則互乘而相減。較數相比者，古人定爲正負之名，以辨異同加減之號。

又 說方程列位，皆以下位爲之端。如下位爲上中兩位之總價，則和也。如下位爲上中兩位相差之價，則較也。較故分正負，和故不分正負。雖不立正負，然必以兩和互乘，對減而得其差，然後其數可得而知，故三色以往。先無正負者，有時而正負立焉。蓋較者易知，和者難知。和之中有較，較之中又有較，故方程之法以和求較而已矣。

方程設例一省算，凡行有空位，則省算也。三色無空位者，必須乘減得數，變爲二色以求之，此常法也。若内有一行空位，則以所空之位列於首，而以兩行不空者，如法乘減，得數即重列之。與此原有空位者相對，如二色求之，則省一算。四色五色以至多色，無空位者，亦必如法乘減，五色變四色，四色變三色，三色變二色，漸次求之，此常法也。若一行有空位，或幾行有空位，總將所空之位，列爲首次。先以無空之行，如法互乘減去此所空之位，則減餘之行，恰與有空之行相對，另列求之，可省幾算。

如四色中，有一行空兩位，則將此兩位列爲首次，而以無空之三行，如法乘減變爲三色者兩行。又以此兩行，如法乘減，變爲二色者一行，恰與空兩位之行相對，作二色求之是也。

又如五色中有兩行空首位，一行空首次三之三位，則將無空之兩行，如法乘

減變爲四色者一行，恰與空首位之兩行相對，三行並列，如法乘減變爲三色者兩行。又相乘減變爲二色者一行，又恰與空三位之行相對，作二色求之是也。

諸例不能悉具，要在學者以一反三耳。一省乘，凡首位數有偶同，則省乘也。假如和數方程，首位同，則徑減矣。若較數，又須論其正負之名，同數而又同名，亦徑減矣。若同數而不同名，則更其一行之正負以相從，而後減併焉。否則首位雖減去，而其下之同異淆，則加減皆誤也。若和較兼用者，首位之數同，亦必以較數首位之名，名其和數之一行。而後減併之，所謂變從首位乘法之號也，然其爲省乘則一也。又有首位數雖不同，而可以分數相命者，則以其分數，改其一行之數。以從一行，則首位齊同，而可以對減，亦省其互乘矣。如兩首位爲五與十，是倍數也，則以十半之爲五。而其下諸數，皆半之以相減併，則五之行可無乘，而數亦簡明。又如兩首位爲二十與二，是十之一也。則以退位之法乘之，而其下諸數，皆取十之一，以相減併。則二之行可無乘而數亦易曉，若此類者，不可枚舉，得其意者酌而用之可耳。尤要在首位之必同名。一上下之位，可以互更。方程立法，務須首位齊同，以便減去。蓋減一色，則少一色。遞乘遞減，但留一法一實，方能得一數以推其餘。若行中有空位，則不待乘減，而其一色已先減去。故列位時，覆視橫列中有空位多者，取作首位，則能省算。若橫列中有兩數偶同，或數皆爲一者，取作首位，亦可省乘。一前後之行，可以互更，凡首位多空而其不空者隔遠，則更而聯之。以便乘減若各行首位，數偶相同，而爲他行所隔，亦可更置。使之聯並，若多色方程各行俱有空位，而又不等者，一時不必並列，先取首位俱實之行乘減。但以與減餘相對者，次第添入，並列而乘減之。總之上下可以互求，前後亦可易位，惟變所適，而不失其常，斯方程之法也。

清·徐鳳誥《筭學啓蒙通釋》卷上《方程正負門》 誥按：方者，法也，程者，式也。如三色者必消爲二色，二色者必消爲一色，只留一法一實，以法除實，先得其一色之數，而後乘除，得各色也。

藝文

明·王文素《筭學寶鑒》卷二六《方程》

方程錢物列排齊，首互乘來對減奇。
除物用他爲下法，餘錢爲寔法除之。
除知此價乘排物，減緫餘錢作寔施。
餘物歸除知彼價，位繁次第以求推。

損益術分部

算法

《九章筭術》卷八《方程》 今有上禾七秉，損實一斗，益之下禾二秉，而實一十斗。下禾八秉，益實一斗，與上禾二秉，而實一十斗。問上下禾實一秉各幾何。

荅曰：上禾一秉實一斗五十二分斗之一十八，
下禾一秉實五十二分斗之四十一。

術曰：如方程。損之曰益，益之曰損。**三國魏·劉徽注** 問者之辭雖？今按：實云上禾七秉，下禾二秉，實一十一斗。上禾二秉，下禾八秉，實九斗也。「損之曰益」，言損一斗，餘當一十斗。今欲全其實，當加所損也。「益之曰損」，言益實以一斗，乃滿一十斗。今欲(加)[知]本實，當減所加，即得也。損實一斗者，其實過一十斗也。益實一斗者，其實不滿一十斗也。**劉徽注** 重論損益數者，各以損益之數損益之也。

宋·賈憲《黄帝九章筭經細草》《永樂大典》卷一六三四四 上禾七秉，下禾二秉，共十一斗。上禾二秉，下禾八秉，共實九斗。

草曰：上禾二位互乘兩行，以少減多，簡位求之。合問。

明·吴敬《九章筭法比類大全》卷八《方程》 法曰：列所問數。

上七　下二　十一斗
上二　下八　九斗

以甲行上七爲法，遍乘乙行，上二得一十四，下八得五十六，九斗得六十三斗。復以乙行上二爲法，遍乘甲行，上七得一十四，與乙行上一十四對減盡。下二得四，減乙行下五十六，餘得下五十二。十一斗得二十二斗，減乙行六十三斗，餘得四十一斗。求出下禾五十二，米四十一斗，爲下禾一秉得五十

二分斗之四十一。乙行十一斗，以分母五十一通之，得五百七十二。減下二得八十二，餘四百九十。以上七除得七十，減五十二爲一斗，餘十八，上禾數。合問。

《九章算術》卷八《方程》　今有上禾五秉，損實一斗一升，當下禾七秉。上禾七秉，損實二斗五升，當下禾五秉。問上下禾實一秉各幾何。

荅曰：上禾一秉五升，下禾一秉二升。

術曰：如方程。置上禾五(禾)[秉]正，下禾七秉負，損實一斗一升正。**三國魏·劉徽注**　言上禾五秉之實多，減其一斗一升，餘是與下禾七秉相當數也。故互其(算)[筭]，令相折除，以一斗一升爲差。爲差者，上禾之餘實也。次置上禾七秉正，下禾五秉負，損實二斗五升正。以正負術入之。**劉徽注**　按：正負之術本設列行，物程之數不限多少，必令與實上下相次，而以每行各自爲率(多少)。然而或減或益，同行異位殊爲二品，各自并減之差見於下也。

宋·賈憲《黄帝九章算經細草》《永樂大典》卷一六三四四　草曰：列置所問：

五正　七負　一斗一升正

七正　五負　二斗五升正

上禾互乘兩行，以少行同名相減，右上禾空，以法除實，得下禾一秉二升。以減左行下禾，即見上和之實矣。

明·吴敬《九章算法比類大全》卷八《方程》　法曰：此問與前法同，列所問數，以甲行上正五爲法，遍乘乙行得數。

上正五爲法　下負七　正一斗一升

上正七得正二十五　下負五得負二十五　正二斗五升得正一石二斗五升

却以乙行上正七爲法，復遍乘甲行上正五，得正三十五，與乙行上正三十五同名對減尽。下負七，得負四十九，同減乙行下負二十五，餘得下負二十四爲法。正一斗一升得正一斗七升，同減乙行正一石二斗五升，餘得負四斗八升爲實。以法除，得二升爲下禾一秉之數。甲行下負七，以二升乘得一斗四升，加入正一斗一升，共得二斗五升。以上禾五束除，得五升爲上禾一秉之數。合問。

明·周述學《曆宗算會》卷一一《各分》　二項二物和價盈不足求各價。損積爲正，當禾爲負。損上正以求下負，則上正爲盈。益下正以求上負，則上負亦盈，是謂両盈。列：

右上正五　下負七　盈一斗一升

左上負七　下正五　盈二斗五升

以上正五互乘下正五，上負七互乘下負七，相減，淂二十四爲法。上正五互乘盈二十五升，淂一百二十五，上負七互乘盈一斗，淂七一升十七，相減，淂四十八升，爲下禾之實。下負七互乘盈二斗五升，淂一百七十五，下正五互乘盈一斗一升，淂五十五，相減，淂一百二十，爲上禾之實。各以法除之，淂上禾每束五升，下禾每束二升。

《九章算術》卷八《方程》　今有上禾六秉，損實一斗八升，當下禾一十秉。下禾一十五秉，損實五升，當上禾五秉。問上下禾實一秉各幾何。

荅曰：上禾一秉實八升，下禾一秉實三升。

術曰：如方程。置上禾六秉正，下禾一十秉負，損實一斗八升正。次，上禾五秉負，下禾一十五秉正，損實五升正。以正負術入之。**三國魏·劉徽注**　言上禾六秉之實多，減損其一斗八升，餘，是與下禾十秉相當之數。故亦互其(算)[筭]，而以一斗八升爲差實。差實者，(下)[上]禾之餘實。

宋·賈憲《黄帝九章算經細草》《永樂大典》卷一六三四四　草曰：列置所問：

上六秉正　下十秉負　下一斗八升正

上五秉負　十五秉正　實五升正

右上六秉，左上原五互乘兩行，皆十，約之。以少減多，異名，減右上空中，餘四爲法。同名，加實除，得一秉三升，以減右行下禾，求上禾得八升。合問。

明·吴敬《九章算法比類大全》卷八《方程》　法曰：此問損積爲正，當禾爲負，求同前法。列所問數，以甲行上正六爲法，遍乘乙行。

上正六爲法　下負十　正一斗八升

上負五得負三十　下正十五得正九十　正五升得正三斗

却以乙行上負五爲法，複遍乘甲行上正六，得正三十，與乙行上負三十，異名對減尽。下負十，得負五十，異減乙行下正九十，餘得下正四十，爲法。正一斗八升，得正八斗，同加乙行三斗，得正一十二斗，爲實。以法除得，下一秉得三升。甲行下負十，以三升乘，得三斗，加入正一斗八升，共得四斗八升。以上正六除，得上禾一秉得八升。合問。

明・周述學《曆宗筭會》卷一一《各分》 二項二物和價而盈求各價。損積爲正，當禾爲負。損上正以求下負，則上正爲盈。損下正以求上負，則上負不足，是爲一盈一不足。列：

右上正六　下負十　盈十八升

左上負五　下正十五　不足五升

以上正六互乘下正十五，得九十五，上負五互乘下負十，得五十，相減，餘四十爲法。以上正六互乘不足五升，得三斗，上負五互乘盈十八升，得九斗，相併，得一十二斗，爲下禾之實。以下負十互乘不足五升，得五十升，下正十五互乘一十八升，得二十七斗，相併，得三十二斗，爲上禾之實。各以法除之，得上禾一束八升，下禾一束三升。

《九章筭術》卷八《方程》 今有上禾三秉，益實六斗，當下禾一十秉。下禾五秉，益實一斗，當上禾二秉。問上下禾實一秉各幾何。

荅曰：上禾一秉實八斗，下禾一秉實三斗。

術曰：如方程。置上禾三秉正，下禾一十秉負，益實六斗(正)[負]。次置上禾二秉負，下禾五秉正，益實一斗(正)[負]。以正負術入之。**三國魏・劉徽注** 言上禾三秉之實少，益其六斗，然後於下禾十秉相當也。故亦互其(算)[筭]，而以六斗爲差實。差實者，下禾之餘實。

宋・賈憲《黃帝九章筭經細草》《永樂大典》卷一六三四四　宋・楊輝詳解 解題：牛馬問價者可以損益，此題不可損益，以本身並。添積爲正，當未爲負求之。術曰：以所求率互乘鄰行，齊所求之率，以少減多。**楊輝詳解** 去其求率。再求減損。**楊輝詳解** 位繁者再求即上文之意，不過欲其位簡。錢爲實，物爲法，實如法而一。

草曰：**楊輝詳解** 前問未足以發明正負，以此問再敘法草講明。列置所問：

上三正　下十負　添六斗正

上二負　下五正　添一斗正

以所求率上禾互乘諸行，**楊輝詳解** 右三乘左行，左二乘右行。以少減多，**楊輝詳解** 左行減右。異名相減，**楊輝詳解** 六負減六正，十五正減二十負。同名相加，**楊輝詳解** 二斗加十二斗。

上空　五負　十五斗正

六負　十五正　三斗正

再求，**楊輝詳解** 欲去下禾，以下禾互乘兩行。減損，**楊輝詳解** 以少減多，右負。異名減左正，同名加右斗得後數。

上空　七十五負　二百二十五

三十負　下禾空　二百四十

斗爲實，禾爲法，實如法而一。

明・吳敬《九章筭法比類大全》卷八《方程》 法曰：此問添積爲正，當禾爲負，求同前法。列所問數，以甲行上二爲法，遍乘乙行得數。

上正三爲法　下負十　添正六斗

上負二得負六　下正五得正一十五　添正一斗得正三斗

却以乙行上負二爲法，復遍乘甲行上正三，得正六，與乙行負六異對減，盡。下負十得負二十異，減第二行下正十五，餘，得下正五，爲法。正六斗得正十二斗，同加乙行正三斗，得正一十五斗，爲實。以法除得下禾一秉三斗。甲行下負十，以三斗乘，得三石。以減添正六斗，餘，得二石四斗。以上禾三秉除，得八斗，爲上禾一秉之數。合問。

清・劳乃宣《古籌算考釋》卷四《方程》 此以差實爲問，梅氏所謂較數也。原術曰：置上禾三秉正，下禾十秉負，益實六斗正。是以上禾三秉，益實六斗，與下禾十秉相當也。又曰：次置上禾二秉負，下禾五秉正，益實一斗正。是以下禾五秉，益實一斗，與上禾二秉相當也。其列益實爲正，正合正負相當之理。

李氏乃謂正皆當作負，謬矣。《九章》方程諸術，所列下實正負，多與相當之理相反，惟此相合。蓋方程中之正負，特以之別異同耳。雖不用相當式，算亦可通，故《九章》兩載之，以廣異術。然以算理而論，終以相當者爲正，且與天元相通。後人不察，沿爲下實與多數同名之説，昧其本矣，今辯正之。此題以直除法演草。

置位式

|||　—〇　⊤

||　|||||　|

右上乘左行式

|||　—〇　⊤

丅
一||||
|||

移右行下禾秉數於實下乘得數式

|||　丅

|||
≡○
一○

消右行下實式

|||
=||||

移置右行法實式

|||
=||||
|||

除得上禾實數式

置上禾三秉正，下禾十秉負，實六斗正，於右行。置上禾二秉負，下禾五秉正，實一斗正，於左行。以右上上禾三秉正偏乘左行，得上禾六負，下禾十五正，實三正。首位左右異名，當用異名相減，同名相加法，乃以加爲消也。以右行二度消左行，首位二三如六，得六正，與左消盡。中位一二如二，得二十負，與左相消，得五負。下位二六一十二得一十二正，與左相消，得一十五正。凡云幾度消之者仿此。左行下爲實，上爲法，除之。得三斗，爲下禾一秉實。乃求上禾，移右行下禾十秉負，置下禾實三斗正下，乘之，得三十斗負。以消右行實六斗正，異名相減，得二十四斗負，餘上禾三秉正，實二十四斗負。下爲實，上爲法，除之。得八斗，爲上禾一秉實。

《九章算術》卷八《方程》　今有賣牛二、羊五，以買一十三豕，有餘錢一千。賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足。賣六羊、八豕，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何。

答曰：牛價一千二百，羊價五百，豕價三百。

術曰：如方程。置牛二、羊五正，豕一十三負，餘錢數正。次，牛三正，羊九負，豕三正。次，五牛負，六羊正，八豕正，不足錢負。以正負(求)術入之。**三國魏·劉徽注**　此中行買賣相折，錢適足，故但互買賣(算)[筭]而已。故下無錢直也。設欲以此行如方程法，先令二牛偏乘(左)[中]行，而以右行直除之。是故終於下實虚缺矣，故注曰正無實負，負無實正，方爲類也。方將以別實加(不)[適]足之數與實物作實。

《盈不足章》黄金白銀與此相當。「假令黄金九、白銀一十一，稱之重適等。交易其一，金輕十三兩。問金銀一枚各重幾何？」與此同。

宋·賈憲《黄帝九章筭經細草》《永樂大典》卷一六三四四　賣二牛五羊，買十三豕，剩錢一貫。賣一牛一豕，買三羊，適足。賣六羊八豕，買五牛，少錢六百，與前題同。**宋·楊輝詳解**　解題：賣爲正數，買爲負數。題中借賣買爲正負，又加少、剩、適足爲問，此意不亦遠乎。正負，**楊輝詳解**　正者正數也，負者欠數也，方(相)[程]　以鄰行相乘，求等，對位爲除，而簡其位。**楊輝詳解**　求源，如正負名不同者數不相入，可副置位傍。正負折除，古人謂非其法，故立成術。謂異名相減，同名相(減)[加]，二法使學者參題取用，以代副置折除之愚也。

一法，異名相減，**楊輝詳解**　正見負爲異名，以正減負者非減也，是正折其去負矣。負見正亦異名，以負減正者誠減也，正多負而折去矣。同名相加，**楊輝詳解**　正見正或負見負，皆爲同名。上文異名爲減，下即同名補還。正無人正之，負無人負之。**楊輝詳解**　本是同名相加，因鄰位無算可入，故云。正無入者仍爲正，負無入者仍爲負，古本誤刻「無人」者非。以問中草段爲解，就明作法也。

賣爲正　買爲負　適足數停
多爲正　少爲負
二正　五正　十三負　一貫正
一正　三負　一正　空
五負　六正　八正　六百負
先去羊，**楊輝詳解**　乘少羊之行與多羊，等而對減。二乘中行減左。
二正　五正　十三負　一貫正
二正　六負　二正　空
減數　二正　六負　二正　空
原數　五負　六正　八正　六百負

楊輝詳解
正負折除此數，　三負異号相減，空異名相減，　十正同名相加。　六百負無加不動。

二法，同名相減，**楊輝詳解** 正見正，負見負，謂之同名相減。異名相加，**楊輝詳解** 上以正減正，下以負還正或以正還負。上以負減負，下以負還正或以正還負，猶前去相補之意。正無人正之，負無人負。**楊輝詳解** 亦是異名相加，補還之理，原其鄰位無算可入，故云，是反前術。更摘草段爲解。

二正	五正	十三負	一貫正
二正	六負	二正	空
三負	無	十正	六百貫

去中牛，以右行減之，**楊輝詳解** 右二牛等也。

	二正	五正	十三負	一貫正
減數	二正	五正	十三負	一貫正
原數	二正	六負	二正	無入

楊輝詳解 折半此數，牛空同名相減，十一負異名相加。十五正異名相加，一貫負正無入負。

三負	羊空	十五正	六百貫

楊輝詳解 以後竝用成法更不重說。

更去左牛，以右牛乘左行，用左行兩度，異名相減，**楊輝詳解** 左三牛負減右六牛正，左十豕正減二十豕負，左六百負減一貫二百正。

牛空	十五正	十九負	一貫八百正
牛空	十一負	十五正	一貫負
三負	羊空	一十正	六百負

去其羊，以右中羊互乘，以右減中。

牛空	百六十五正	二百九負	十九貫八百正
牛空	羊空	十六正	四貫八百**楊輝詳解** 同名相減，無入正之。
三負	羊空	一十正	六百負

錢爲實，物爲法，先求豕價。以減左右之豕，求牛之價。

明・吳敬《九章算法比類大全》卷八《方程》 賣二牛五羊，買十三豕，剩錢一貫。賣一牛一豕，買三羊，適足。賣六羊八豕，買五牛，少錢六百。問牛羊豕價各幾何。

答曰：牛一貫二百，羊五百，豕三百。

法曰：賣爲正數，買爲負數。題中借買賣爲負正，又加□剩□足，爲問此意，不亦遠乎。列所問數，賣爲正數，買爲負數。以右行牛正二爲法，遍乘中左二行得數。

	牛	羊	豕	價
右	正二爲法	正五	負十三	正一貫
中	正一得正二	負三得負六	正一得正二	空
左	負五得負十	正六得正十二	正八得正十六	負六百得負一貫二百

卻以中行牛正一爲法，復遍乘右行。牛正二得二斗，与中行牛正二對減，盡。羊正五得正五，異加中行羊負六得羊負十一。豕負十三得負十三，異加中行豕正二得豕正十五。正一貫得正一貫，中行價空旡減得正一貫。再以左行牛負五爲法，復遍乘右行。牛正二得正十，與左行牛負十異名對減，盡。羊正五得羊正二十五，同加左行羊正十二得羊正三十七。豕負十三得豕負六十五，異減左行豕正十六，餘得豕負四十九。正一貫得正五貫，異減左行負一貫二百，餘得負三貫八百。

再相乘，以中行羊負十一爲法，遍乘左行。羊正三十七得羊正四百七，豕負四十九得豕負五百三十九，價負三貫八百得價負四十一貫八百。卻以左行羊正三十七爲法，復遍乘中行。羊負十一得羊負四百七，與左行羊正四百七，異名對減，尽。豕正十五得豕正五百五十五，異減左行豕負五百三十九，餘得豕正一十六爲法。正一貫得正三十七貫，異減左行負四十一貫八百，餘得正四貫八百爲實。以法除得豕價一百。

中行豕正十五，以價二百乘得四貫五百，加正一貫共得五貫五百。以羊十一除得羊價五百。右行豕負十三，以價三百乘得三貫九百。加入正一貫，共得四貫九百。減羊五，價得二貫五百，餘得二貫四百。以牛二除得牛價一貫二百。合問。

明・王文素《筭學寶鑒》卷二六《述古佳題》 解題曰：賣物爲正，買物爲負。題中借買賣爲負正，又加少剩適足，爲問此意不亦遠乎。

正負方程初圖

甲	正二牛	正五羊	負十三豕	正錢一貫
乙	正一牛	負三羊	正一豕	空錢
丙	負五牛	正六羊	正八豕	負錢六百

法曰：甲正二牛乘乙負三羊得六，以乙正一牛乘甲正五羊得五，此系三正一負異加，得乙負羊十一。又以甲正二牛乘乙正一豕得二。却以乙正一牛乘甲負十三得十三，此三正一負異加，得乙正豕十五。又以甲正二牛乘乙錢空，不必乘之，却以乙正牛一乘甲正錢一千，得一千。乙錢空無，減就爲乙正錢一千文。又以甲正二牛乘丙正六羊，加得丙正羊三十七。又以甲正二牛乘丙正八豕，得十六。以丙負五牛乘甲負十三豕，得六十五豕，此系二正二負異減，得丙行負豕四十九。

又 以甲正二牛，乘丙負錢六百，得一千二百。以丙負正牛乘甲正錢一千，得五千，此系二正二負，異減，餘得丙負錢三千八百文，又列于位。

第二列圖

乙　負羊十一　正豕十五　正錢一千

丙　正羊三十七　負豕四十九　負錢三千八百

以乙夏羊十一乘丙負豕四十九，得五百三十九。以丙羊三十七乘乙正豕十五，得五百五十五，此二正二負，異減餘豕一十六爲法。又以乙負羊一十一乘丙負錢三十八百，得四萬一千八百。却以丙正羊三十七乘乙正錢一千，得三萬七千，此係二正二負，異減，餘四千八百爲寔。以法除之，得豕價三百文。就以第二圖乙正豕十五乘之，得四千五百，加乙正錢乙千，共得五千五百爲寔。以乙負羊一十一除之，得一羊價五百文。以初圖甲負豕十三乘價三百，得三千九百，加入甲正錢一千共四千九百，内減五羊價二千五百，餘二千四百爲寔。以甲正二牛爲法，除之，得一牛價一千二百文。合問。

明・周述學《曆宗算會》卷一一《各分》 三物和價盈不足適足求各價。賣二牛五羊，買十三豕，盈錢一貫。賣一牛一豕，買[三]三羊，適足。賣六羊八豕，買五牛，不足六百文。求各價幾何。

賣爲正，買爲負。盈爲正，不足爲負。列

右　牛正二　羊正二　豕負一十三　價正一貫

中　牛正一　羊負三　豕正一　空

左　牛負五　羊正六　豕正八　價負六百文

以右行牛正二爲法，遍乘中行。羊負三負得負六，豕正一得正二，價無乘。遍乘左行，羊正六得正十二，豕正八得正十六，價六百得一貫二百文。次以中行牛正一互乘右行，羊正五仍得，與羊負六異名相併，得羊負十一。豕負十三與豕正一異名相併，得豕正十五。價正一貫，無加減次。以左行牛負五互乘右行羊正，得正二十五。與正十二相加，得羊正三十七。豕負得六十五，與豕正十六相減，餘豕負四十九。價得正五貫，與一貫二百文相減，餘價負三貫八百文。次列

羊負十一　豕正十五　價正一　正豕價二十一貫

羊正三十七　豕負四十九　價負三貫八百文　正羊價多三貫八百文

以羊負互乘豕負，得五百三十九。羊正互乘豕正，得五百五十一，相減得一十六爲法。羊負互乘價負，得四十一貫八百文，羊正互乘價正，得三十七貫，相減得四貫八百文，爲豕價之實。豕正互乘價負得五十七貫，豕負互乘價正得四十九貫，相減得八貫，爲羊價之實。各以法除之，得豕三百文，羊五百文。以右行豕負十三，以價三百乘之，加入正一貫，得四貫九百文，減五羊之價，餘二貫四百文，半之得牛價一貫二百文。

又法：先去羊，乘少羊之行，與多羊等而對減。以右牛二爲法，遍乘中行，減左。第一法，異名相減，正見負爲異名。以正減負者非減也，是正折去其負矣。負見正亦異名，以負減正者誠減也，正多負而折去矣。同名相加，正見正或負見負，皆爲同名。上既異名爲減，下即同名補還。正無入正之，負無入負之。本是同名相加，因鄰行無筭可入，故正無入者仍爲正，負無入者仍爲負。

右　牛正二爲法　羊正五豕負十三　價正一貫

中　牛正一　羊負三　豕正一　價適足空

乘出數　正二　負六　正二　空

左　牛負五　羊正六　正豕　價負六百貫

折併數　負三異減空異減　正十同加　負六百無加不動

去中牛，以右行減中行乘出之數。

第二法，同名相減，正見正，負見負，謂之同名相減。異名相加，上以正減正，下以負還正，或以正還負。上以負減負，下以負還正，或以正還負。猶前法相補之意也。正無人負之，負無人正之，亦是異名相加，補還之理。原其鄰位無筭可入，故前術。

右　牛正二　羊正五　豕負十三　價正一貫

右行乘出中行數　正二　負六　正二　無入

右行加減中行數　牛空同減　負十一異加　正十五異加　價負一貫正無人負

左　牛負三　羊空　豕正十　價負六百

更去左牛，以右牛乘左行，用左行兩度異名相減，左三牛負減右六牛正，左十豕正減二十豕負，左六百負減一貫二百正。

右左三乘　牛二正六正　羊五正十五正　豕十三負三十九　價一貫正　三貫

左行兩度加減餘數　牛空異減　十五正不動　十九負異減　價一貫八百正異減

中　牛空　羊十一負　豕十五正　價一貫負

左　牛三負　羊空　豕一十正　價六百負

去其羊，以右中羊互乘，以右減中。

牛空　羊一百六十五正 右中羊互乘，　豕二百九負 中羊乘豕十九負，　價十九貫八百正 中羊乘一貫八百正。

牛空　羊空 右中羊互乘對減盡，　豕十六正 右羊乘豕十五減餘，　價四貫八百[正] 右羊乘一貫同減無人，正之。

牛三負　羊空　豕一十正　六百負

以價四貫八百爲實，以物一十六爲法除之淂豕價三百文。求羊價，以豕價乘右行豕二百九得六十二貫七百文。加右行價十九貫八百，共淂八十二貫五百文，爲右羊價之實。以右羊一百六十五爲法，除之，得羊價五百文。求牛價，以豕價乘左下豕一十淂三貫，加左下價六百文，共淂三貫六百文，爲左牛之實。以左上三牛爲法，除之淂牛價一貫二百文。

明・程大位《筭法統宗》卷一一《三色方程》　今有賣二牛五羊，買十三豬，剩銀五兩。賣一牛一豬，買三羊，適足。賣六羊八豬，買五牛少銀三兩。問牛羊豬各價若干。

荅曰：牛價六兩，羊價二兩五錢，豬價一兩五錢。

法曰：以賣牛爲正，以買豬爲負。以多爲正，以少爲負，列所問數。

右　牛正二爲法　羊正五　豬負十三　正五兩

中　牛正一　羊負三得負六　豬正一得正二　空適足

左　牛負五　羊正六得正十二　豬正八得正十六　負三兩得六兩

先以右行牛正二，爲法，遍乘中左二行，得數。

却以中行牛正一爲法，復遍乘右行。羊正五得正五，異加中行羊負六，共得羊負十一。豬負十三得負十三，異加中行豬正二，共得豬正十五。價正五兩得正五兩，因中行價空無減，得正五兩。再以左行牛負五爲法，復遍乘右行，羊正五得羊正二十五。同名加左羊正十二，共得三十七。豬負十三得豬負六十五。異減左行豬正十六，餘得豬負四十九。價正五兩得正二十五兩，異減左行負六兩，餘得負一十九兩。

再以中行羊負十一爲法，遍乘左行羊正三十七，得羊正四百零七。豬負四十九得豬負五百三十九，價負一十九兩得價負二十兩令九錢。

却以左行羊正三十七爲法，復遍乘中行羊負十一，得羊負四百令七。與左行羊正四百令七，異名對減盡。豬正十五得豬正五百五十五，異減左行豬負五百三十九，餘得豬正一十六爲法。價正五兩得正一十八兩五錢，異減左行價二十兩令九錢，餘得正二兩四錢爲實。以法除之，得豬價一兩五錢。中行豬正十五，以價一兩五錢乘，得二十二兩五錢。加正五兩，共二十七兩五錢。以羊十一除之，得羊價二兩五錢。右行豬負十三以價一兩五錢乘，得一十九兩五錢，加入正五兩，共得二十四兩五錢，減五羊價共一十二兩五錢，餘得一十二兩，以牛二除之，得牛價六兩。合問。

《九章筭術》卷八《方程》　今有甲乙二人持錢不知其數。甲得乙半而錢五十，乙得甲太半而亦錢五十。問甲乙持錢各幾何。

荅曰：甲持三十七錢半，乙持二十五錢。

術曰：如方程。損益之。**三國魏・劉徽注**　此問者言一甲半乙而五十，太半甲一乙亦五十也。各以分母乘其全，内子行定。二甲一乙而錢一百。二甲三乙而錢一百五十。於是乃如方程。諸物有分者放此。

明・吳敬《九章筭法比類大全》卷八《方程》　法曰：甲欲乙中半，乙母二分子之一，乙欲甲之太半，甲母是三分子乃之二，以甲母三分乘乙錢五十得一百五十。復以乙母二分乘甲錢五十得一百。以少減多，乙錢餘五十，半之得乙錢二十五文。復以乙錢二十五文，甲錢一百文，以少減多，甲錢餘七十五文，半之得甲錢三十七文半。合問。

明・周述學《曆宗筭會》卷一一《各分》　甲欲乙中半，乙分母二分子之一。乙欲甲太半，甲分母三分子之二。以甲分母三乘乙錢，淂一百五十。乙分母二乘甲錢，得一百。相減餘五十。半之淂乙二十五文二，而三之淂甲三

十七文半。又甲得四分之三，乙得二分之一。以之三互乘五十，分母四除之，淂甲。以之一，互乘五十，分母二除之，淂乙。

《九章筭術》卷八《方程》 今有二馬一牛價過一萬，如半馬之價。一馬二牛價不滿一萬，如半牛之價。問牛馬價各幾何。

荅曰：馬價五千四百五十四錢一十一分錢之六，

牛價一千八百一十八錢一十一分錢之二。

術曰：如方程。損益之。**三國魏・劉徽注** 此一馬半與一牛價直一萬也，二牛半與一馬亦直一萬也。一馬半與一牛[直錢一萬]，通分内子，右行爲三馬二牛，直錢二萬。二牛半與一馬直錢一萬，通分内子，左行爲二馬五牛，直錢二萬也。

明・吴敬《九章筭法比類大全》卷八《方程》 法曰：未知牛馬半價者當損益，求斉二馬一牛，價過十貫外多半馬之價，當損半馬爲一馬半，一牛直十貫文。一馬二牛價不滿十貫，内少半牛之價，當益半牛爲一馬，二牛半直十貫。

排列問數，半者倍之。

三馬　二牛　二十貫抡右

二馬　五牛　二十貫抡左

先以右行三馬爲法，遍乘左行。二馬得六，五牛得十五，價二十貫得六十貫。却以左行二馬復遍乘右行，三馬得六馬，與左行六馬對減尽。二牛得四牛，減左行十五牛，餘得十一牛爲法。價二十貫得四十貫，減左行六十貫，餘得二十貫爲實。以法十一除得一貫八百一十八文十一分錢之二。却以牛十一乘馬六得六十六爲法。又以牛十一乘鈔四十貫得四百四十貫。却以牛四乘鈔二十貫得八十貫。以減餘得鈔三百六十貫爲實。以法除得馬價五貫四百五十四文，餘實三十六，以六約得一十一分錢之六。合問。