



新世纪高等学校规划教材·数学教育系列

解析几何解疑

(第2版)

章士藻 段志贵 左铨如◎编著

JIEXI JIHE JIEYI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校规划教材·数学教育系列

解析几何解疑

(第2版)

章士藻 段志贵 左铨如◎编著

JIEXI JIHE JIEYI



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何解疑/章士藻, 段志贵, 左铨如编著. —2 版. —北京:
北京师范大学出版社, 2018. 3

新世纪高等学校规划教材. 数学教育系列

ISBN 978-7-303-22714-3

I. ①解… II. ①章… ②段… ③左… III. ①解析几何—高等学校—
教学参考资料 IV. ①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 210992 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子邮箱 jswsbook@163.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 保定市中华美凯印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 730 mm×980 mm 1/16
印 张: 17.25
字 数: 279 千字
版 次: 2018 年 3 月第 2 版
印 次: 2018 年 3 月第 1 次印刷
定 价: 40.00 元

策划编辑: 刘凤娟	责任编辑: 刘凤娟
美术编辑: 刘 超	装帧设计: 刘 超
责任校对: 赵非非	责任印制: 赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-62978190

北京读者服务部电话: 010-62979006-8021

外埠邮购电话: 010-62978190

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-62979006-8006

前言

解析几何，这是产生于 17 世纪初，运用代数方法研究几何对象的一个重要的数学分支学科。

16、17 世纪，随着西方资本主义的兴起，生产实践向自然科学提出了许多新的研究课题，迫切需要力学、天文学等基础科学来研究解决，从而，也就要求数学提出相应的新的概念与方法。当时就是在这样的历史条件下，法国著名哲学、数学、物理学家笛卡儿(1596—1650)，在前人研究的基础上，认识到几何过分地依赖于图形，而代数又完全受公式、法则所约束等缺陷，提出建立坐标系，通过平面上点与实数对 (x, y) 之间的对应关系，将几何与代数两者结合起来，互相取长补短，以此为基本思想，创建了解析几何学。

创建了解析几何，建立变量数学才有了可能。至今解析几何与微积分不仅是学习高等数学的基础，而且是一切理工科的基本工具，它不仅在工程技术和物理学以及现代医学、经济学、教育统计学、实验心理学等方面有着广泛的应用，而且它的基本思想与基本方法几乎渗透到大多数数学研究的领域，成为初等数学进入高等数学的转折点。

解析几何，目前不仅是一切理工科院校的专业基础课，其平面部分还是中学、中专学校的重要教学内容，且在高考数学中的地位十分突出。作者早期任教过中学中师，后担任本专科初等几何、高等几何、解析几何、微分几何教学 30 多年，多次承担几何学方面讲座、培训与研讨，曾参阅不同时期、不同层次、不同国籍解析几何方面的教材、专著(包括有的孤本)达 100 多册，积累了较丰富的教学教

改经验，发表了多篇研究性论文，出版了多本几何学方面著作，为本书编写创造了条件，奠定了基础。

为有助于读者系统地学习与研究这门课程，本书基于数学与应用数学专业人才培养要求，兼顾大学、中学师生的需要，结合我们从事实际教学与研究的体会，分10个部分，即第1章总论；第2章关于点的坐标与常用公式；第3章曲线与方程；第4章关于直线；第5章关于圆锥曲线；第6章关于二次曲线一般理论；第7章关于二次曲线的应用；第8章关于参数方程；第9章关于极坐标；第10章关于空间解析几何中的一些问题。

本书共提炼出100个问题，以问答形式进行编写，每题独立成编，长短不拘统一，力求文字生动精练，内容明白易懂，具有学术性、先进性、针对性、实用性、启发性。

本书目的在于激发读者的学习兴趣，帮助读者进一步加深对解析几何基本思想、基本概念、基本公式、基本方法、基本技能技巧的理解与掌握，进一步培养分析问题与解决问题的能力。同时，由于本书中有一定数量的问题属于理论问题的阐述，理论联系实际的实例，深入钻研教材的教学体会，资料较为少见，这也为从事这门课程教学与研究的同志，提供一份内容较为丰富翔实的参考资料。

在编写中，我们注意学习、吸收近几年来的研究成果，特向所引用的有关书籍、期刊的作者表示感谢。在编写中，曾一度考虑反映教学教改的问题，但由于我们已脱离该课程教学多年，且本书也不能面面俱到，故只能忍痛割爱，未涉及该课程当前的教学教改问题。

以上数端，只是我们一片愿望，鉴于我们自身的水平、能力和条件所限，加之修订时间仓促，书中难免有不足之处，敬盼有关专家、学者、老师和同学们多多提供指导性的意见，以待进一步修订、提高。

编 者

目 录

第1章 总 论

1. 何谓数学, 它有哪些基本特征? 1
2. 何谓几何学, 它有哪些主要分科? 4
3. 何谓解析几何, 它是怎样产生与发展起来的?
..... 6
4. 解析几何的方法、主要内容是什么, 学习
解析几何有何意义? 8
5. 解析几何教材有哪些基本的处理手法和安排
体系? 10
6. 在解析几何教学中应着重注意哪些问题?
..... 11
7. 在解析几何解题中应注意掌握哪些技能技巧?
..... 12

第2章 关于点的坐标与常用公式

8. 何谓有向线段, 有向线段、有向线段的数
量与有向线段的长度三者之间有什么关系?
..... 21
9. 何谓向量与向量的模, 向量与有向线段有
何区别? 21
10. 何谓张量, 数学中引进张量有何意义?
..... 22
11. 怎样证明沙尔定理, 它在解析几何中有什
么重要作用? 23

12. 数学中为什么要引进坐标的概念, 构成坐标的通则是什么? 24
13. 平面直角坐标系有哪些要素, 原点是否一定要取在两轴的交点处, 两轴上的单位长能否不一致? 26
14. 什么叫平面斜坐标系, 平面直角坐标与斜坐标的互换公式是怎样的? 27
15. 何谓平面仿射坐标系, 它有哪些基本公式? 28
16. 平面仿射坐标系与平面斜角坐标系在解题中有何具体应用? 29
17. 何谓平面三线坐标系, 它有何应用? 32
18. 平面解析几何中有哪些基本公式, 它们之间有何内在的联系? 33
19. 如何计算平面简单多边形的面积? 38
20. 如何求平面简单多边形的重心? 40

第3章 曲线与方程

21. 如何深刻理解曲线与方程的概念? 43
22. 求曲线的方程有哪些主要步骤, 并需要注意些什么问题? 44
23. 在求曲线方程时, 一般要不要进行纯粹性与完备性两方面的证明? 48
24. 如何利用方程的同解性化简曲线方程? 49
25. 由方程画曲线一般有哪些主要步骤? 51
26. 函数与图象、曲线与方程这两个概念有何联系与区别? 53

第4章 关于直线

27. 二元一次不等式的几何意义是什么, 如何确定二元一次不等式组所表示的平面区域? 54
28. 如何推导点到直线的距离公式, 在应用此公式时, 又如何去掉绝对值的符号? 56
29. 什么叫直线系方程, 研究直线系方程有何意义? 59
30. 什么叫解析法证题, 它与解析几何的方法证题、代数法证题

各有什么区别?	63
31. 解析法证题有哪些主要步骤, 实施中应注意掌握哪些技能技巧?	64
32. 什么叫直线型经验公式, 建立直线型经验公式有哪些常用的 方法, 各有何优缺点?	67

第5章 关于圆锥曲线

33. 圆的方程有哪些形式, 为什么要三个条件才能确定一个圆?	72
34. 何谓共轴圆系, 它有什么性质与应用?	73
35. 为什么将椭圆、双曲线和抛物线统称为圆锥曲线, 它们的统 一定义与方程是怎样得到的?	75
36. 如何用解析法证明平面与圆锥面相截, 所得的截线是椭圆, 双曲线或抛物线?	78
37. 建立椭圆、双曲线的标准方程时, 应如何论证方程的同解性?	80
38. 为什么说离心率相等的两个圆锥曲线是相似的?	83
39. 如何求一般方程 $f(x, y)=0$ 的近似解?	84
40. 如何简捷地作出圆锥曲线的切线?	90
41. 椭圆和双曲线各有常见的几何画法?	92
42. 徒手画双曲线应注意什么问题?	95
43. 椭圆有哪几种四心画法, 为什么说由四段圆弧所连成的是两 两吻接的?	96

第6章 关于二次曲线的一般理论

44. 直线与二次曲线至多有几个交点? 为什么?	100
45. 为什么说圆锥曲线的直径都可认为是直线, 研究圆锥曲线的直 径与共轭直径有何意义?	101
46. 如何求二次曲线的对称轴, 它有多少条对称轴?	104
47. 如何求二次曲线的渐近线?	107
48. 如何求经过定点或给定斜率的二次曲线的切线方程, 又如何 判别定点在二次曲线的内域或外域?	110

49. 如何建立求平面曲线关于定点、定直线对称曲线的统一方法?	113
50. 两曲线相切的充要条件是什么, 解有关这类习题时应注意什么?	114
51. 何谓二次曲线的极点与极线, 引进这两个概念有何意义?	117
52. 坐标变换与点变换之间有何联系与区别?	118
53. 在移轴变换下二次方程有何变化规律, 利用移轴变换能否消去方程中的 xy 项?	121
54. 在转轴变换下二次方程有何变化规律, 利用转轴变换能否消去方程中的 y^2 (或 x^2) 项?	123
55. 如果选择双曲线的一条渐近线为坐标轴, 那么它的方程将成为什么形式?	126
56. 何谓二次曲线方程的不变量, 研究其不变量有何意义?	127
57. 如何用不变量表示二次曲线的离心率与焦点等几何量?	128
58. 如何用不变量判别中心二次曲线的类型, 并确定二次曲线的位置?	129
59. 如何用不变量确定抛物线的开口方向?	131
60. 怎样最简捷的化简一般二元二次方程?	134
61. 研究二次曲线族有何意义, 有哪些常见的二次曲线族方程?	139

第7章 关于二次曲线的应用

62. 如何具体鉴别一段圆锥曲线弧, 如何简便地画抛物线弧?	143
63. 如何简单地求两条二次曲线的交点, 应用此法又如何解一元四次方程?	146
64. 如何运用伸缩变换来研究椭圆的性质?	149
65. 如何计算椭圆的周长?	151
66. 何谓双曲线时差定位图, 其绘制原理与使用方法是怎样的?	154

第 8 章 关于参数方程

67. 化曲线的参数方程为普通方程有何作用, 有哪些基本的方法, 并应注意些什么问题? 156
68. 化曲线的普通方程为参数方程有何意义, 选择参数的原则与方法各是怎样的? 160
69. 如何选取参数建立轨迹的方程, 又如何利用参数与变换解轨迹题? 163
70. 如何讨论参数方程所表示曲线的性质? 169

第 9 章 关于极坐标

71. 何谓双极坐标系, 它有何应用? 172
72. 为什么要引进广义极坐标, 何谓曲线极坐标方程的通式与特式? 173
73. 在广义极坐标系下, 如何正确理解曲线与方程的对应关系? 174
74. 何谓曲线的周期, 它与曲线 $\rho=f(\theta)$ 的特式与函数 $\rho=f(\theta)$ 的周期有什么关系? 175
75. 研究曲线的直角坐标方程与极坐标方程的互化有何意义, 在互化中应注意什么问题? 178
76. 如何求曲线的极坐标方程, 并应注意些什么问题? 182
77. 如何讨论极坐标方程所表示曲线的性质? 185
78. 如何求极坐标系中两曲线的交点? 188
79. 如何推导旋轮线和圆内外旋轮线的统一方程, 并正确地对它们进行分类? 192
80. 为什么说椭圆、帕斯卡蜗线和玫瑰线都是圆内外旋轮线的特例? 198
81. 尖旋轮线为何又称为最速降线和摆线, 摆线的等时性是什么意义? 202
82. 何谓圆的广义渐伸线, 为何它是圆外旋轮线的极限情形? 205
83. 为何阿基米德螺线又是圆的渐伸线的特例? 207
84. 如何推导天体运行的轨道方程 $\rho=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$? 207

85. 如何推导人造地球卫星的周期 $T = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left(1 + \frac{h_{\text{近}} + h_{\text{远}}}{2R}\right)^{3/2}$?
..... 210
86. 如何推导三种宇宙速度, 它与天体的运行轨道有何关系?
..... 211

第 10 章 关于空间解析几何中的一些问题

87. 向量是怎样产生的, 在解析几何的研究中引入向量有何意义?
..... 215
88. 为什么应用向量解决几何问题往往会简便些? 216
89. 如何推导空间绕定直线的旋转变换公式? 在此变换下, 如何确定旋转轴和旋转角度? 219
90. 如何计算空间简单多边形的面积? 222
91. 如何计算空间四面体的体积? 225
92. 如何求关于定点, 定平面对称的曲面与曲线的方程? 228
93. 何谓柱面坐标, 它有何重要应用? 230
94. 何谓球面坐标, 它有何重要应用? 232
95. 如何画二次曲面的直观图? 233
96. 求动曲线的轨迹方程时, 如何消去参数? 237
97. 如何求二次曲面的对称平面和二次曲面的基本不变量及半不变量? 242
98. 化简二次曲面的方程有何简捷的方法, 又如何判别二次曲面的类型? 249
99. 如何确定二次曲面的位置, 又如何确定抛物柱面和抛物面的开口方向? 255
100. 何谓二次直纹面, 它有哪些重要的性质与作用? 259

参考文献 263

后 记 265

第1章 总论

1. 何谓数学，它有哪些基本特征？

(1) 数学的本质

何谓数学，即数学是什么？这是当今一个既十分古老，又很难准确回答的新课题。

所谓古老，从亚里士多德给出第一个数学定义“数学是量的科学”以来，不少数学家、哲学家都一直在关注、探讨这个问题。1878年恩格斯(1820—1895)在《反杜林论》一书中对数学下的定义是“数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学”，该定义一直被我国教科书广泛采用。

所谓今新，随着19世纪末20世纪初数学的发展，“数”已发展为任意性质的对象(如数量、向量、张量、矩阵、算子、算符等)；“数量关系”已发展成为一种结构关系(顺序结构、代数结构、拓扑结构)；“空间形式”继欧氏空间后，又出现了罗氏空间、黎氏空间、射影空间、拓扑空间等，从现实空间发展到抽象空间，从有限空间发展到无限空间。

为此，人们对数学本质的认识已不一致，出现了各种新的观点。例如，我国已故著名数学家关肇直(1919—1982)认为“数学是研究量的关系的科学”；苏联一些学者认为“数学是客观和主观世界的数量关系和结构关系”；德国希尔伯特(1862—1943)认为“数学本身是形式系统的集合”；英国罗素(1872—1970)认为“数学是一种逻辑结构”；美籍匈牙利数学教育家波利亚(1887—1985)认为“数学既是演绎体系，又是归纳体系；既有完美的形式，又有发展过程中的稚气；既是证明的科学，又是实验的科学”。

此外，还有人认为“数学是锻炼思维的体操”“数学是创造性的艺术”“数学是无限的科学”“数学是真正的美学”“数学是按照一定虚构规则玩耍的游戏”“数学是科学技术的基础”“数学是文化”，等等。

特别在当今，随着纯数学发展上的突破，数学分支的日益增多，140年前恩格斯的定义与当今社会进步和发展出现了较不适应的情况。在数学本体论中又唤起人们对数学本质研究的重视，法国布尔巴基学派认为“数学是研究结构的科学”。我国数学教育家丁石荪教授认为“数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系”等等。

1969年,西方科学哲学会议以“科学理论的结构”为议题,提出了科学哲学的“新方向”,以有助于澄清思想混乱,同时又引起了数学家的思考.随之,关于数学本质的研究,出现了“由研究下定义”朝着“由方法下定义”的转变.

我国著名数学教育家徐利治教授从20世纪80年代起致力于数学哲学的研究,从数学的本体论与认识论的角度,提出了“数学是一种模式真理”的真理观,这对揭示数学的本质是很有创见的.

随着人们对20世纪数学发展与研究的总结,针对数学教育抽象、枯燥、无用的普遍批评,再次唤起人们对“数学是文化”的认同.数学是文化传播的载体、文化交流的工具,而又有谁会认为文化抽象、枯燥、无用呢?也许数学这一定义更能贴近人们的思想与生活的实际,为21世纪数学的发展与教学的改革展现新的天地.

综上所述,其一,应认识到对数学本质研究的重要意义,研究的前景喜人,认识有待于深化,人们在近时期内可能还难有定论;其二,尽管恩格斯的论述与现代数学有一定的差距,但如果我们将数量关系、空间形式以本文开头所述那样赋予新的含义,恩格斯在百余年前关于数学本质的论述至今应仍是适用的,这可能是至今在教材、教参中人们还多以恩格斯的论述作为揭示数学本质的原因之所在.

(2) 数学的基本特征

数学的特征是什么?过去人们普遍认为就是所谓三性:抽象性、严谨性和应用的广泛性.但近年来国内外也有学者对此提出异议.

首先,抽象性并非数学所特有.各门学科都有一定的抽象性,哲学比数学更为抽象.通常人们认为数学是抽象的,如所研究的点没有大小,线段没有宽窄,面没有厚薄.但日常生活中,“人”的概念也是抽象的,人们只能见到一个个或一些具体的人;物理学中的分子、原子、原子核一般也看不到,只是头脑中想象的原子模型.因此,如果只泛泛而谈数学的抽象性,而不研究数学抽象的特殊性是没有实际意义的;相反的,只能给人一种数学抽象、数学难学的感叹,给数学教学不会带来好处.

其次,关于严谨性,又有哪一门科学不是严谨的呢?不仅自然科学需要依靠大量的观察、实验,提出假设,建立理论,再经实践检验,才能不断完善;而社会科学也必须尊重事实,忠于史料,勤于考证,具有严谨的学风,才能建立与发展起来.这里人们又常以“严谨的形式逻辑演绎体系”作为数学严谨性的特殊意义,其实这也未必能构成数学最基本的特征之一.从数学的产生与发展来说,我国古代数学有辉煌的成就,但一直未能纳入严谨的逻辑演绎体系;微

积分创立之初就未探究其严谨性；即使千锤百炼的欧氏几何，经希尔伯特论证后也认为不够严谨。任何数学新学科的创立，都是依靠创新的数学观念、独特的数学思想，而逻辑演绎仅是一种手段。同时数学中的严谨性始终也是相对的，作为教育数学更是如此。因此过多地强调数学的严谨性，只能将生动活泼的数学思想淹没在逻辑的海洋里。

再次，关于应用的广泛性，又有哪一门学科不涉及应用呢？自然科学如此，社会科学更是如此。例如，语言学人人都学，随时随地都用，马列主义放之四海皆准也。因此应用的广泛性，从某种意义上说是理论联系实际的问题，是学风的问题，更不能作为数学学科的特征之一。

可见，以上提出的“三性”，能反映数学上的某些特征，有其合理的成分，但它并不能真正刻画数学的基本特征。那么，数学的基本特征应该是什么呢？以我们浅见，赞同“高度分化，高度统一”的观点，我们不妨将“抽象性、严谨性、广泛性”作为数学特征的传统提法，而将“高度分化，高度统一”作为数学特征的现代提法。

高度分化。17世纪以来，随着解析几何、微积分的诞生，这种分化一直占据着主导地位，当今数学进入了一个全新的发展阶段，不仅分支学科日渐增多，而且各门学科“数学化”，各基础学科之间相互渗透。例如，出现了计算物理学、计算矿物学、计算化学、生物数学、医学数学、管理数学、经济数学、数量遗传学、数量分类学等交叉学科和一系列数学分支。这种分化过程仍在继续中，难有止境的时刻。

高度统一。数学在高度分化的同时，还进行着统一的过程，进行着数学不同领域的思想和方法相互渗透的过程。20世纪30年代以来，这种综合、统一的趋势又占据着主导地位。集合论的思想形成了统一的基本思想，在布尔巴基学派著作中实现的统一，其基础是所谓基本结构，认为任何数学都是这种结构的复合。

随着数学研究的不断深入，这种“高度分化，又高度统一”的特征将变得更为突出、鲜明。其实，从分析基础数学的发展情况，就可明显地说明了数学的这一现代特征。

例如，小学阶段学的是正有理数四则运算，初中阶段是代数与平面几何，高中阶段是代数、立体几何与解析几何，大学阶段是数学分析、高等几何、微分几何、高等代数等，这是学科知识分化的具体表现。

在小学里，只能大数减小数，不能小数减大数，加减分别得很清楚；而初中里，在有理数运算中加减统一起来，运算简单化了。

在中学里,对各种极值问题的处理,方法众多,形式各异,技巧性很强,而在微积分里对各种极值问题的处理统一起来,计算也简单化了.

再如,在数学分析中,线积分通过格林公式转化为二重积分,即

格林公式 设 C 为区域 D 上的边界曲线, $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$ 在区域及其边界 C 上连续, 则

$$\oint_C P(x, y)dx + \theta(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy;$$

面积分通过奥氏公式转化为三重积分, 即

奥氏公式 设 $P(x, y, z)Q(x, y, z)R(x, y, z)$ 在区域 Ω 上有一阶连续偏导数, 则

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

其中 $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 是光滑曲面 Σ 在点 (x, y, z) 处的向外法向量.

然而, 通过外微分形式, 重积分、线积分、面积分变成一个公式, 又统一起来了, 简单化了.

俗话说: “站得高, 看得远”. 我国著名数学家华罗庚(1910—1985)曾说: “书先读时越读越厚, 再读时越读越薄”. 数学应该是越学越简单, 一通百通. 因此, 以我们浅见, 以高度分化, 高度统一的观点来揭示数学的特征, 可能是对华罗庚以上论述的最好理解; 同时以高度分化, 又高度统一的观点来揭示数学的基本特征, 也便于指导与应用于当今数学的教学与研究之中.

2. 何谓几何学, 它有哪些主要分科?

所谓几何学, 简单说来就是研究物体形状、位置和大小的学科. 由于研究对象、研究方法的不同, 它又分为许多不同学科. 关于几何学的分科, 这是一个动态的概念, 从传统意义上说, 几何学有下列主要分科:

欧氏几何, 是几何学的一个分科, 又名初等几何, 分平面几何与立体几何两大部分. 它是由公元前 3 世纪希腊数学家欧几里得(前 330—前 275)在总结前人知识、经验的基础上, 加以系统化, 形成一系列定义和公理而建立起来的. 其中最著名的是平行公理, 即: 在平面上, 过直线外一点, 只能作一条直线与该直线平行.

非欧几何, 是几何学的一个分科. 它与欧氏几何主要区别在于改变了欧氏几何的平行公理, 并发展为两种:

双曲几何(又名罗巴契夫斯基几何,简称罗氏几何),经过平面上一点,可引两条直线与已知直线平行;

椭圆几何(又名黎曼几何,简称黎氏几何),经过平面上一点,没有直线与已知直线平行.

非欧几何不仅打破了欧氏几何一统天下的局面,而且也是数学的一个重要工具,它在微分方程、微分几何、变分法、复变函数以及航空、航海等实际问题中都有着重要应用.

球面几何,几何学的一个分科,是研究球面上图形的几何学,其中专门研究球面上三角形性质的,叫作“球面三角”.球面几何在大地测量、卫星定位、镜面成像以及航空、航海等方面都有重要应用.

画法几何,几何学的一个分科,是研究平面上用图形表示形体和解决空间问题理论与方法的学科.研究正投影图、轴测图、透视图等的绘制原理,在机械工程、建筑工程、绘制地图等方面都有重要应用.

解析几何,几何学的一个分科.这是17世纪初由法国著名数学家笛卡儿(1596—1650)提出坐标概念,实现点与实数对的对应后,将对图形的研究转化为对方程的研究,从而发展起来的一个重要学科.

代数几何,几何学的一个分科,它以代数流形为研究对象,代数流形是由空间坐标的一个或多个代数方程所确定的点的轨迹.三维空间中的代数流形,就是代数曲线与代数曲面,代数几何一般研究三次以上的代数曲线与代数曲面,而直线、圆锥曲线、二次曲面都是其特例.代数几何不仅是纯数学的工具,促进现代物理学的发展,而且在动力学、机器人学、计算机学、图形学等方面都有着重要的应用.

射影几何,几何学的一个分科,在平面(或空间)将直线(或平面)上的点,经过中心投影(包括平行投影)到另一直线(或平面)上,称为“透视”,当一个图形经过有限次透视后变成另一图形时,称为射影变换,研究射影变换的几何学,叫作射影几何.它在航空、测量、绘图、摄影等方面有着重要应用.

仿射几何,几何学的一个分科,在平面(或空间)将直线(或平面)上的点,经过平行投影到另一直线(或平面)上,这样得到的点与点之间的对应,称为“平行透视”,当一个图形经过有限次平行透视后变成另一图形时,称为仿射变换,研究仿射变换的几何学,叫作仿射几何.它在初等数学、测量、建筑、摄影等方面有重要应用.

微分几何,几何学的一个分科,它主要以光滑曲线与光滑曲面为研究对象,且以数学分析、微分方程为研究工具而命名,在力学、物理学、工程技术

中都有重要应用。

拓扑学，几何学的一个分科，包括代数拓扑与点集拓扑两大部分。主要以连续曲线与连续曲面为研究对象，研究几何图形在一对一的双方连续变换下的性质，例如曲面的闭合性、相交性和四色问题等都是它的研究重点，在泛函分析、李群、微分几何、微分方程等方面都有重要应用。

以研究方法而言，运用综合法(初等方法)的，有欧氏几何、非欧几何、球面几何、画法几何；运用代数方法的，有解析几何、代数几何；应用分析方法的，有微分几何、拓扑学，即

{ 综合法：欧氏几何、非欧几何、球面几何、画法几何
 { 代数法：解析几何、代数几何
 { 分析法：微分几何、拓扑学

高等几何，是相对于初等几何(欧氏几何)而言的，它一般包括非欧几何、射影几何、仿射几何，而射影几何与仿射几何，既可应用初等方法，又可应用代数方法分别进行研究。

微分几何与拓扑学本属于传统的几何学，但由于近代发展迅速，现在它们已独立成一大科，成为数学中与几何学并列的 14 大学科之一，通常不再隶属于几何学范畴了。而且出现了计算几何学——研究几何模型与数据处理的学科、分形几何学——又称大自然几何学，研究对象为非负实数，当然它们也都不属于传统的几何学范畴内了。

3. 何谓解析几何，它是怎样产生与发展起来的？

解析几何，又叫坐标几何。它是用代数方法来研究几何图形和变换的一门学科，是 17 世纪初期产生出来的一个数学分科。

我们知道，几何学的产生源远流长，远在 5000 多年前，埃及、巴比伦、中国、印度等文明古国的人民，在从事农牧业的生产中，测量土地、疏通河道、制造工具以及日常生活用品等，积累了大量有关几何图形的知识，得出了计算面积、体积，测量距离的方法等。

据《史记》记载，我国古代夏禹治水(前 1889 年)时，就用到“准绳”和“规矩”。在公元前 1 世纪左右成书的《周髀算经》中载有“径一而周三”，意思是说圆周率 $\pi=3$ 。还载有“故折矩，以为句广三，股修四，径隅五”，其意思是说“如果将一根直尺折成一个直角，较短的一边(称为勾，又为句)长为 3，较长的一边(称为股)长为 4，那么原有尺两端的距离(称为径)一定为 5”。因此，至今还有人用“勾三股四弦五”来代表勾股定理。