新世纪高等学校规划教材·数学教育系列

解析几何解疑

（第2版）

章士藻 段志贵 左铨如◎编著

JIEXI JIHE JIEYI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学教育系列

解析几何解疑

（第2版）

章士藻 段志贵 左铨如◎编著

JIEXI JIHE JIEYI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

解析几何解疑/章士藻，段志贵，左铨如编著. —2版. —北京：北京师范大学出版社，2018.3

新世纪高等学校规划教材. 数学教育系列

ISBN 978-7-303-22714-3

Ⅰ.①解… Ⅱ.①章… ②段… ③左… Ⅲ.①解析几何—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 210992 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：730 mm×980 mm 1/16
印　　张：17.25
字　　数：279 千字
版　　次：2018 年 3 月第 2 版
印　　次：2018 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：40.00 元

策划编辑：刘风娟　　责任编辑：刘风娟
美术编辑：刘　超　　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　　责任印制：赵非非

前 言

解析几何，这是产生于17世纪初，运用代数方法研究几何对象的一个重要的数学分支学科.

16、17世纪，随着西方资本主义的兴起，生产实践向自然科学提出了许多新的研究课题，迫切需要力学、天文学等基础科学来研究解决，从而，也就要求数学提出相应的新的概念与方法. 当时就是在这样的历史条件下，法国著名哲学、数学、物理学家笛卡儿(1596—1650)，在前人研究的基础上，认识到几何过分地依赖于图形，而代数又完全受公式、法则所约束等缺陷，提出建立坐标系，通过平面上点与实数对(x, y)之间的对应关系，将几何与代数两者结合起来，互相取长补短，以此为基本思想，创建了解析几何学.

创建了解析几何，建立变量数学才有了可能. 至今解析几何与微积分不仅是学习高等数学的基础，而且是一切理工科的基本工具，它不仅在工程技术和物理学以及现代医学、经济学、教育统计学、实验心理学等方面有着广泛的应用，而且它的基本思想与基本方法几乎渗透到大多数学研究的领域，成为初等数学进入高等数学的转折点.

解析几何，目前不仅是一切理工科院校的专业基础课，其平面部分还是中学、中专学校的重要教学内容，且在高考数学中的地位十分突出. 作者早期任教过中学中师，后担任本专科初等几何、高等几何、解析几何、微分几何教学30多年，多次承担几何学方面讲座、培训与研讨，曾参阅不同时期、不同层次、不同国籍解析几何方面的教材、专著(包括有的孤本)达100多册，积累了较丰富的教学教

改经验，发表了多篇研究性论文，出版了多本几何学方面著作，为本书编写创造了条件，奠定了基础.

为有助于读者系统地学习与研究这门课程，本书基于数学与应用数学专业人才培养要求，兼顾大学、中学师生的需要，结合我们从事实际教学与研究的体会，分 10 个部分，即第 1 章总论；第 2 章关于点的坐标与常用公式；第 3 章曲线与方程；第 4 章关于直线；第 5 章关于圆锥曲线；第 6 章关于二次曲线一般理论；第 7 章关于二次曲线的应用；第 8 章关于参数方程；第 9 章关于极坐标；第 10 章关于空间解析几何中的一些问题。

本书共提炼出 100 个问题，以问答形式进行编写，每题独立成编，长短不拘统一，力求文字生动精练，内容明白易懂，具有学术性、先进性、针对性、实用性、启发性.

本书目的在于激发读者的学习兴趣，帮助读者进一步加深对解析几何基本思想、基本概念、基本公式、基本方法、基本技能技巧的理解与掌握，进一步培养分析问题与解决问题的能力. 同时，由于本书中有一定数量的问题属于理论问题的阐述，理论联系实际的实例，深入钻研教材的教学体会，资料较为少见，这也为从事这门课程教学与研究的同志，提供一份内容较为丰富翔实的参考资料.

在编写中，我们注意学习、吸收近几年来的研究成果，特向所引用的有关书籍、期刊的作者表示感谢. 在编写中，曾一度考虑反映教学教改的问题，但由于我们已脱离该课程教学多年，且本书也不能面面俱到，故只能忍痛割爱，未涉及该课程当前的教学教改问题.

以上数端，只是我们一片愿望，鉴于我们自身的水平、能力和条件所限，加之修订时间仓促，书中难免有不足之处，敬盼有关专家、学者、老师和同学们多多提供指导性的意见，以待进一步修订、提高.

编　者

目 录

第 5 章　关于圆锥曲线

第 6 章　关于二次曲线的一般理论

第 7 章　关于二次曲线的应用

第8章 关于参数方程

第9章 关于极坐标

第1章 总 论

1. 何谓数学，它有哪些基本特征？

(1)数学的本质

何谓数学，即数学是什么？这是当今一个既十分古老，又很难准确回答的新课题.

所谓古老，从亚里士多德给出第一个数学定义“数学是量的科学”以来，不少数学家、哲学家都一直在关注、探讨这个问题. 1878 年恩格斯(1820—1895)在《反杜林论》一书中对数学下的定义是“数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学”，该定义一直被我国教科书广泛采用.

所谓今新，随着 19 世纪末 20 世纪初数学的发展，“数”已发展为任意性质的对象(如数量、向量、张量、矩阵、算子、算符等)；“数量关系”已发展成为一种结构关系(顺序结构、代数结构、拓扑结构)；“空间形式”继欧氏空间后，又出现了罗氏空间、黎氏空间、射影空间、拓扑空间等，从现实空间发展到抽象空间，从有限空间发展到无限空间.

为此，人们对数学本质的认识已不一致，出现了各种新的观点. 例如，我国已故著名数学家关肇直(1919—1982)认为“数学是研究量的关系的科学”；苏联一些学者认为“数学是客观和主观世界的数量关系和结构关系”；德国希尔伯特(1962—1943)认为“数学本身是形式系统的集合”；英国罗素(1872—1970)认为“数学是一种逻辑结构”；美籍匈牙利数学教育家波利亚(1887—1985)认为“数学既是演绎体系，又是归纳体系；既有完美的形式，又有发展过程中的稚气；既是证明的科学，又是实验的科学”.

此外，还有人认为“数学是锻炼思维的体操”“数学是创造性的艺术”“数学是无限的科学”“数学是真正的美学”“数学是按照一定虚构规则玩耍的游戏”“数学是科学技术的基础”“数学是文化”，等等.

特别在当今，随着纯数学发展上的突破，数学分支的日益增多，140 年前恩格斯的定义与当今社会进步和发展出现了较不适应的情况. 在数学本体论中又唤起人们对数学本质研究的重视，法国布尔巴基学派认为“数学是研究结构的科学”. 我国数学教育家丁石荪教授认为“数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系”等等.

1969 年，西方科学哲学会议以“科学理论的结构”为议题，提出了科学哲学的“新方向”，以有助于澄清思想混乱，同时又引起了数学家的思考. 随之，关于数学本质的研究，出现了“由研究下定义”朝着“由方法下定义”的转变.

我国著名数学教育家徐利治教授从 20 世纪 80 年代起致力于数学哲学的研究，从数学的本体论与认识论的角度，提出了“数学是一种模式真理”的真理观，这对揭示数学的本质是很有创见的.

随着人们对 20 世纪数学发展与研究的总结，针对数学教育抽象、枯燥、无用的普遍批评，再次唤起人们对“数学是文化”的认同. 数学是文化传播的载体、文化交流的工具，而又有谁会认为文化抽象、枯燥、无用呢？也许数学这一定义更能贴近人们的思想与生活的实际，为 21 世纪数学的发展与教学的改革展现新的天地.

综上所述，其一，应认识到对数学本质研究的重要意义，研究的前景喜人，认识有待于深化，人们在近时期内可能还难有定论；其二，尽管恩格斯的论述与现代数学有一定的差距，但如果我们将数量关系、空间形式以本文开头所述那样赋予新的含义，恩格斯在百余年前关于数学本质的论述至今应仍是适用的，这可能是至今在教材、教参中人们还多以恩格斯的论述作为揭示数学本质的原因之所在.

(2)数学的基本特征

数学的特征是什么？过去人们普遍认为就是所谓三性：抽象性、严谨性和应用的广泛性. 但近年来国内外也有学者对此提出异议.

首先，抽象性并非数学所特有. 各门学科都有一定的抽象性，哲学比数学更为抽象. 通常人们认为数学是抽象的，如所研究的点没有大小，线段没有宽窄，面没有厚薄. 但日常生活中，“人”的概念也是抽象的，人们只能见到一个个或一些具体的人；物理学中的分子、原子、原子核一般也看不到，只是头脑中想象的原子模型. 因此，如果只泛泛而谈数学的抽象性，而不研究数学抽象的特殊性是没有实际意义的；相反的，只能给人一种数学抽象、数学难学的感叹，给数学教学不会带来好处.

其次，关于严谨性，又有哪一门科学不是严谨的呢？不仅自然科学需要依靠大量的观察、实验，提出假设，建立理论，再经实践检验，才能不断完善；而社会科学也必须尊重事实，忠于史料，勤于考证，具有严谨的学风，才能建立与发展起来. 这里人们又常以“严谨的形式逻辑演绎体系”作为数学严谨性的特殊意义，其实这也未必能构成数学最基本的特征之一. 从数学的产生与发展来说，我国古代数学有辉煌的成就，但一直未能纳入严谨的逻辑演绎体系；微

积分创立之初就未探究其严谨性；即使千锤百炼的欧氏几何，经希尔伯特论证后也认为不够严谨．任何数学新学科的创立，都是依靠创新的数学观念、独特的数学思想，而逻辑演绎仅是一种手段．同时数学中的严谨性始终也是相对的，作为教育数学更是如此．因此过多地强调数学的严谨性，只能将生动活泼的数学思想淹没在逻辑的海洋里．

再次，关于应用的广泛性，又有哪一门学科不涉及应用呢？自然科学如此，社会科学更是如此．例如，语言学人人都学，随时随地都用，马列主义放之四海皆准也．因此应用的广泛性，从某种意义上说是理论联系实际的问题，是学风的问题，更不能作为数学学科的特征之一．

可见，以上提出的“三性”，能反映数学上的某些特征，有其合理的成分，但它并不能真正刻画数学的基本特征．那么，数学的基本特征应该是什么呢？以我们浅见，赞同“高度分化，高度统一”的观点，我们不妨将“抽象性、严谨性、广泛性”作为数学特征的传统提法，而将“高度分化，高度统一”作为数学特征的现代提法．

高度分化．17 世纪以来，随着解析几何、微积分的诞生，这种分化一直占据着主导地位，当今数学进入了一个全新的发展阶段，不仅分支学科日渐增多，而且各门学科“数学化”，各基础学科之间相互渗透．例如，出现了计算物理学、计算矿物学、计算化学、生物数学、医学数学、管理数学、经济数学、数量遗传学、数量分类学等交叉学科和一系列数学分支．这种分化过程仍在继续中，难有止境的时刻．

高度统一．数学在高度分化的同时，还进行着统一的过程，进行着数学不同领域的思想和方法相互渗透的过程．20 世纪 30 年代以来，这种综合、统一的趋势又占据着主导地位．集合论的思想形成了统一的基本思想，在布尔巴基学派著作中实现的统一，其基础是所谓基本结构，认为任何数学都是这种结构的复合．

随着数学研究的不断深入，这种“高度分化，又高度统一”的特征将变得更为突出、鲜明．其实，从分析基础数学的发展情况，就可明显地说明了数学的这一现代特征．

例如，小学阶段学的是正有理数四则运算，初中阶段是代数与平面几何，高中阶段是代数、立体几何与解析几何，大学阶段是数学分析、高等几何、微分几何、高等代数等，这是学科知识分化的具体表现．

在小学里，只能大数减小数，不能小数减大数，加减分别得很清楚；而初中里，在有理数运算中加减统一起来，运算简单化了．

在中学里，对各种极值问题的处理，方法众多，形式各异，技巧性很强，而在微积分里对各种极值问题的处理统一起来，计算也简单化了.

再如，在数学分析中，线积分通过格林公式转化为二重积分，即

格林公式　设 C 为区域 D 上的边界曲线，$P(x, y)$，$Q(x, y)$，$\frac{\partial\theta}{\partial x}$，$\frac{\partial p}{\partial y}$在区域及其边界 C 上连续，则

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+\theta(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

面积分通过奥氏公式转化为三重积分，即

奥氏公式　设 $P(x, y, z)Q(x, y, z)R(x, y, z)$ 在区域 Ω 上有一阶连续偏导数，则

$$\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$是光滑曲面 Σ 在点(x, y, z)处的向外法向量.

然而，通过外微分形式，重积分、线积分、面积分变成一个公式，又统一起来了，简单化了.

俗话说："站得高，看得远". 我国著名数学家华罗庚(1910—1985)曾说："书先读时越读越厚，再读时越读越薄". 数学应该是越学越简单，一通百通. 因此，以我们浅见，以高度分化，高度统一的观点来揭示数学的特征，可能是对华罗庚以上论述的最好理解；同时以高度分化，又高度统一的观点来揭示数学的基本特征，也便于指导与应用于当今数学的教学与研究之中.

2. 何谓几何学，它有哪些主要分科?

所谓几何学，简单说来就是研究物体形状、位置和大小的学科. 由于研究对象、研究方法的不同，它又分为许多不同学科. 关于几何学的分科，这是一个动态的概念，从传统意义上说，几何学有下列主要分科：

欧氏几何，是几何学的一个分科，又名初等几何，分平面几何与立体几何两大部分. 它是由公元前 3 世纪希腊数学家欧几里得(前 330—前 275)在总结前人知识、经验的基础上，加以系统化，形成一系列定义和公理而建立起来的. 其中最著名的是平行公理，即：在平面上，过直线外一点，只能作一条直线与该直线平行.

非欧几何，是几何学的一个分科. 它与欧氏几何主要区别在于改变了欧氏几何的平行公理，并发展为两种：

双曲几何(又名罗巴契夫斯基几何，简称罗氏几何)，经过平面上一点，可引两条直线与已知直线平行；

椭圆几何(又名黎曼几何，简称黎氏几何)，经过平面上一点，没有直线与已知直线平行.

非欧几何不仅打破了欧氏几何一统天下的局面，而且也是数学的一个重要工具，它在微分方程、微分几何、变分法、复变函数以及航空、航海等实际问题中都有着重要应用.

球面几何，几何学的一个分科，是研究球面上图形的几何学，其中专门研究球面上三角形性质的，叫作“球面三角”. 球面几何在大地测量、卫星定位、镜面成像以及航空、航海等方面都有重要应用.

画法几何，几何学的一个分科，是研究平面上用图形表示形体和解决空间问题理论与方法的学科. 研究正投影图、轴测图、透视图等的绘制原理，在机械工程、建筑工程、绘制地图等方面都有重要应用.

解析几何，几何学的一个分科. 这是17世纪初由法国著名数学家笛卡儿(1596—1650)提出坐标概念，实现点与实数对的对应后，将对图形的研究转化为对方程的研究，从而发展起来的一个重要学科.

代数几何，几何学的一个分科，它以代数流形为研究对象，代数流形是由空间坐标的一个或多个代数方程所确定的点的轨迹. 三维空间中的代数流形，就是代数曲线与代数曲面，代数几何一般研究三次以上的代数曲线与代数曲面，而直线、圆锥曲线、二次曲面都是其特例. 代数几何不仅是纯数学的工具，促进现代物理学的发展，而且在动力学、机器人学、计算机学、图形学等方面都有着重要的应用.

射影几何，几何学的一个分科，在平面(或空间)将直线(或平面)上的点，经过中心投影(包括平行投影)到另一直线(或平面)上，称为“透视”，当一个图形经过有限次透视后变成另一图形时，称为射影变换，研究射影变换的几何学，叫作射影几何. 它在航空、测量、绘图、摄影等方面有着重要应用.

仿射几何，几何学的一个分科，在平面(或空间)将直线(或平面)上的点，经过平行投影到另一直线(或平面)上，这样得到的点与点之间的对应，称为“平行透视”，当一个图形经过有限次平行透视后变成另一图形时，称为仿射变换，研究仿射变换的几何学，叫作仿射几何. 它在初等数学、测量、建筑、摄影等方面有重要应用.

微分几何，几何学的一个分科，它主要以光滑曲线与光滑曲面为研究对象，且以数学分析、微分方程为研究工具而命名，在力学、物理学、工程技术

中都有重要应用.

拓扑学，几何学的一个分科，包括代数拓扑与点集拓扑两大部分. 主要以连续曲线与连续曲面为研究对象，研究几何图形在一对一的双方连续变换下的性质. 例如曲面的闭合性、相交性和四色问题等都是它的研究重点，在泛函分析、李群、微分几何、微分方程等方面都有重要应用.

以研究方法而言，运用综合法(初等方法)的，有欧氏几何、非欧几何、球面几何、画法几何；运用代数方法的，有解析几何、代数几何；应用分析方法的，有微分几何、拓扑学，即

$$\begin{cases}\text{综合法：欧氏几何、非欧几何、球面几何、画法几何}\\ \text{代数法：解析几何、代数几何}\\ \text{分析法：微分几何、拓扑学}\end{cases}$$

高等几何，是相对于初等几何(欧氏几何)而言的，它一般包括非欧几何、射影几何、仿射几何，而射影几何与仿射几何，既可应用初等方法，又可应用代数方法分别进行研究.

微分几何与拓扑学本属于传统的几何学，但由于近代发展迅速，现在它们已独立成一大科，成为数学中与几何学并列的 14 大学科之一，通常不再隶属于几何学范畴了. 而且出现了计算几何学——研究几何模型与数据处理的学科、分形几何学——又称大自然几何学，研究对象为非负实数，当然它们也都不属于传统的几何学范畴内了。

3. 何谓解析几何，它是怎样产生与发展起来的?

解析几何，又叫坐标几何. 它是用代数方法来研究几何图形和变换的一门学科，是 17 世纪初期产生出来的一个数学分科.

我们知道，几何学的产生源远流长，远在 5000 多年前，埃及、巴比伦、中国、印度等文明古国的人民，在从事农牧业的生产中，测量土地、疏通河道、制造工具以及日常生活用品等，积累了大量有关几何图形的知识，得出了计算面积、体积，测量距离的方法等.

据《史记》记载，我国古代夏禹治水(前 1889 年)时，就用到“准绳”和“规矩”. 在公元前 1 世纪左右成书的《周髀算经》中载有“径一而周三”，意思是说圆周率 $\pi=3$. 还载有“故折矩，以为句广三，股修四，径隅五”，其意思是说“如果将一根直尺折成一个直角，较短的一边(称为勾，又为句)长为 3，较长的一边(称为股)长为 4，那么原有尺两端的距离(称为径)一定为 5”. 因此，至今还有人用“勾三股四弦五”来代表勾股定理.