TURING 图灵数学·统计学丛书

经典实分析教材
强调逻辑严谨和分析基础

Analysis, 3rd Edition

陶哲轩实分析

[澳] 陶哲轩◎著
李馨◎译

（第3版）

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵数学·统计学丛书

Analysis, 3^{rd} Edition

陶哲轩实分析

（第3版）

[澳] 陶哲轩◎著

李馨◎译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

陶哲轩实分析：第3版/(澳)/陶哲轩
(Terence Tao)著；李馨译. —北京：人民邮电出版
社, 2018.5
(图灵数学·统计学丛书)
ISBN 978-7-115-48025-5

Ⅰ. ①陶··· Ⅱ. ①陶··· ②李··· Ⅲ. ①实分析 Ⅳ.
①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 044099 号

内 容 提 要

本书主要介绍了数学分析中的内容，以构造数系和集合论开篇，逐渐深入到级数、函数等高等数学内容，举例详实，每部分内容后的习题与正文内容密切相关，有利于读者掌握所学的内容。本书在附录部分还介绍了数理逻辑基础和十进制，突出了严格性和基础性。

本书适合已经学习过微积分的本科生和研究生，以及具有数学专业知识的读者。

◆ 著　〔澳〕陶哲轩
◆ 译　李　馨
责任编辑　朱　巍
执行编辑　潘明月
责任印制　周昇亮
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编 100164　电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：700×1000　1/16
印张：28.5
字数：574 千字　2018 年 5 月第 1 版
印数：1–4 000 册　2018 年 5 月北京第 1 次印刷
著作权合同登记号　图字：01-2015-8794 号

定价：99.00 元

读者服务热线：(010)51095186 转 600　印装质量热线：(010) 81055316

反盗版热线：(010)81055315

广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

版 权 声 明

感谢父母为我所做的一切。

第 1 版前言

本书的内容来源于我 2003 年在加州大学洛杉矶分校给本科生讲授高等实分析系列课程时所用的讲义。该校的本科生普遍认为实分析是最难学的课程之一，其原因不仅仅在于学生都是第一次接触很多抽象的概念（比如：拓扑、极限、可测性等），还因为本课程对于严格性和证明的要求较高。正是由于意识到学习本课程存在这样的困难，教师在授课时往往面临着如下两种艰难的选择：要么选择降低课程的严格性，让学习变得更加容易；要么坚持本课程学习中的严格标准，但是这样大部分本科生在阅读学习材料时就会非常吃力，包括那些既聪明又有学习热情的学生。

面对这种进退两难的局面，我尝试采用一种稍不寻常的方法来教授本课程。按照通常的教学方法，实分析的导论部分都假定学生已经非常了解实数、数学归纳法、初等微积分和集合论基础等知识，并且很快进入课程的核心部分，比如极限的概念。正常情况下，当学生学到核心内容时，教材会介绍必需的预备知识，但是大部分教材都不会对这些预备知识进行详细的论述。例如，虽然学生能够直观地想象出实数和整数，并且对它们进行代数运算，但是很少有学生能够真正**定义**实数或者整数。在我看来，这真的是错失了一个非常好的机会。实分析、线性代数和抽象代数是学生最先学习的三门课程。通过对实分析的学习，学生能够真正地领悟到严格数学证明的精妙之处。因此，这门课程为我们提供了一个回顾数学基础知识的绝佳机会，特别是为我们正确全面掌握实数的本质提供了良机。

因此，本课程将按照如下的方式展开。第一周，我将给出分析理论中一些比较著名的“悖论”。在这些悖论中，分析理论中的标准法则（如：极限运算与和运算的交换法则，或者和运算与积分运算的交换法则）按照不严格的方式来应用，就会得到一些荒谬的结论，如 $0 = 1$。这就启发我们要回到这门课程的开端，甚至回到自然数的定义，并要求我们对所有基础理论从头进行验证。例如，给学生的第一个家庭作业就是（只利用皮亚诺公理）证明对所有的自然数，加法结合律均成立（即对任意的自然数 a、b、c，$(a+b)+c = a+(b+c)$ 均成立，见习题 2.2.1）。所以，即便是在刚开始学习本课程的第一周，学生也必须利用数学归纳法写出严格的证明过程。在推导出自然数的所有基本性质之后，我们将开始学习整数（整数最初被定义为自然数的形式差）。一旦学生能证明整数的所有基本性质，我们将开始学习有理数（有理数最初被定义为整数的形式商）。然后，我们（通过柯西序列的形式极限）来学习实数的相关知识。在学习上述内容的同时，我们也会学习集合论的一些

基础知识，例如，对实数不可数性质的阐述。只有在学完以上这些内容后（大概十讲之后），我们才开始学习人们通常认为的实分析的核心部分：极限、连续性、可微性等。

按照这样的方式来学习，学生在整个学习过程中的反馈非常有趣。在最初的几周中，因为只需要掌握标准数系的一些基本性质，所以学生认为教材在概念层面上是非常简单的。但是在知识层面上，教材非常具有挑战性。这是由于为了从数系较原始的属性中严格地推导出更高级的属性，我们是从最基础的观点来分析数系的。有一名学生曾经告诉我，他很难向那些没有学习过高等实分析课程的朋友解释清楚如下两个问题：(a) 为什么当自己还在学习如何证明有理数只能为正、负或者零（习题 4.2.4）时，那些学习非高等实分析课程的学生已经在学习如何区分级数的绝对收敛和条件收敛；(b) 即便如此，为什么感觉自己的家庭作业要比那些同学的更难。另外一位学生非常苦恼地告诉我，尽管她很清楚为什么一个自然数 n 除以一个正整数 q 可以得到一个商 a 和一个小于 q 的余数 r（习题 2.3.5），但是要证明这个事实对她来说非常困难，这令她很沮丧。（我告诉她在后续课程中，有些命题的正确性并不是显而易见的，而且她一定能够学会证明这些命题。但是，她看起来并没有因为我说的这些而感到欣慰。）然而，这些学生仍然非常喜欢做家庭作业，因为他们通过自己的不懈努力，给出了关于某个直观事实的严格证明，这加强了规范数学的抽象处理与对数学（以及现实世界）的不规范直觉之间的联系，让他们感到非常满足。当被要求给出实分析中令人厌恶的“$\varepsilon-\delta$”证明时，他们已经通过大量的练习形成了直观概念并且已经认识到数理逻辑的精妙之处（例如：“任意”和“存在”两种表述的区别），这样他们就能够轻松地过渡到“$\varepsilon-\delta$”这种证明，同时我们也能够快速深入地开展课程。到第十周，我们就已经赶上非高等实分析课程的进度，学生也开始验证黎曼–斯蒂尔杰斯积分的变量替换公式，并且证明分段连续的函数是黎曼可积的。到第二十周，本系列课程就要结束的时候，我们已经（通过课堂讲述和家庭作业）学习了泰勒级数和傅里叶级数的收敛理论，以及多元连续可微函数的反函数和隐函数定理，并且建立了勒贝格积分的控制收敛定理。

为了充分利用本材料，很多关键性的基础结论都作为家庭作业留给学生自己去证明。事实上，这是本课程非常重要的一点，因为这样可以保证学生真正掌握了这些重要的概念。这种模式将保留在学习本书的整个过程当中。绝大部分的习题都是证明课本中的引理、命题和定理。如果你希望利用本书来学习实分析，那么我强烈建议你尽量多做这些习题，包括那些结论看起来“显然”成立的习题。这门课程的精妙之处不是通过单纯地阅读就可以掌握的。本书绝大部分章节的最后都给出了大量的习题供大家学习。

对于专业的数学工作者来说，本书的节奏可能稍微有些慢，特别是刚开始的几章，着重强调了严格性（明确标记为“非正式”的讨论内容除外），并且对那些通常

被认为显然成立、可以一带而过的步骤进行了论证。前几章（通过繁琐的证明）给出了标准数系中许多“显然”成立的性质，例如，两个正实数之和仍然是正的（习题 5.4.1），或者任意给定的两个不相等的实数之间一定存在有理数（习题 5.4.5）。这些基础章节也强调了**非循环论证**。所谓非循环论证是指不能利用后面更加高深的知识来证明前面那些初级的理论。特别是普通代数运算法则，在被推导出来之前是不能被使用的（另外，要分别证明代数运算法则在自然数、整数、有理数、实数中均是成立的）。这样做是为了让学生学会利用给定的有限条件进行抽象推理，并推导出正确的结论。不断进行这样的练习有助于学生在后期学习中，采用同样的推理技巧来掌握更加高深的概念（如勒贝格积分）。

因为本书来源于我教授实分析课程时所用的讲义，所以主要从教学的角度展开；许多关键性的资料都包含在习题当中。很多情况下，我采用了冗长且乏味但具有教育意义的证明过程来代替通俗抽象的证明。在更深层次的教科书中，学生将会发现这些材料的篇幅变得更简短，概念更凝练；而且书中更加强调直观性而非严格性。但是，我认为首先了解如何严格地“动手”进行分析非常重要，因为这有助于学生在研究生及更高的学习阶段中，更好地掌握现代、直观、抽象的分析方法。

本书着重强调了严格性和形式化。但是，这不意味着采用本书作为教材的课程都要按照这样的方式来展开。其实，我在教学过程中会向学生展示更加直观的概念（画一些非规范的图形并举一些具体的例子），从而对书中正式的授课内容给出补充观点。那些被设置为家庭作业的习题是连接直观形象和概念的重要桥梁，它们要求学生把直观形象和形式理解结合起来，帮助学生正确地论证题目。我发现这对于学生来说是最困难的任务，因为这要求学生必须真正理解所学的知识，而不仅仅记住学习内容或者囫囵吞枣地吸收。然而，我从学生那里得到的反馈是：虽然基于上述原因，家庭作业对他们来说是有些吃力，但是对他们也有很大益处，因为这些作业使他们能够把规范数学的抽象处理与对基本概念（如数字、集合、函数）的直观感觉联系起来。当然，在这个过程中，优秀助教的帮助也非常重要。

关于考试部分，我建议采取如下两种方式之一：一种是开卷考试，题目可以类似于本书的习题（题目内容可以更加简短，解题的思路更加常规）；另外一种是家庭作业式的测验，内容应该包含解题思路较为复杂的题目。因为实分析所包含的内容非常广泛，所以不应该强迫学生去记忆定义和定理。因此，我不建议采取闭卷考试，也不建议采取那种通过对书本内容进行反刍式的压缩而做的考试。（事实上，在考试中，我会为学生提供一张附页，这张附页会列出与本次考试内容相关的关键性定义和定理。）将考试设置成类似于家庭作业的形式，有助于促进学生认真、全面地复习和理解作业中的问题（相对于那些使用教学卡片或者类似的教学工具来让学生记忆教材内容的方式），这不仅仅有助于学生备考，同时也能帮助他们为一

般的数学研究做好准备。

本书中的一些材料相对于主题而言是次要的，如果时间有限，可以忽略此部分内容。例如，集合论不像数系那样是分析理论的基础内容，所以有关集合论的章节（第 3 章和第 8 章）可以不那么严格地快速略讲，或者把这部分内容当作阅读资料。附录中关于逻辑学和十进制的内容可以作为选学或者补充阅读内容，不必在课堂上讲授；附录中的逻辑学部分特别适合在讲授前几章时作为阅读材料使用。另外，第 16 章（关于傅里叶级数）在本书的其他部分用不到，可以略去。

鉴于篇幅的缘故，本书分为两卷 ①。第一卷的篇幅稍长，但是若将那些次要的材料忽略或者删减掉，本卷可以分为大约 30 讲来教授。第二卷会不时涉及第一卷的内容，但是针对已经通过其他资料学习过分析论入门课程的学生，可以直接向他们讲授第二卷的内容。第二卷也分为大约 30 讲完成。

我非常感谢我的学生。他们参与了整个实分析课程的学习，纠正了赖以编成此书的讲义中许多错误的地方，并且给了我非常宝贵的反馈意见。另外，我非常感谢那些匿名审阅人，他们对本书进行了多次修正并给出了许多重要的修改意见。同时，我非常感谢 Biswaranjan Behera、Tai-Danae Bradley、Brian、Eduardo Buscicchio、Carlos、EO、Florian、Gökhan Güclü、Evangelos Georgiadis、Ulrich Groh、Bart Kleijngeld、Erik Koelink、Wang Kuyyang、Matthis Lehmkühler、Percy Li、Ming Li、Jason M.、Manoranjan Majji、Geoff Mess、Pieter Naaijkens、Vineet Nair、Cristina Pereyra、David Radnell、Tim Reijnders、Pieter Roffelsen、Luke Rogers、Marc Schoolderman、Kent Van Vels、Daan Wanrooy、Yandong Xiao、Sam Xu、Luqing Ye。最后，对新墨西哥大学 Math 401/501 和 Math 402/502 班次的同学表示感谢，感谢他们对本书第 1 版和第 2 版进行的修订。

陶哲轩

① 中文版合为一本书出版，第一部分对应原书第一卷，第二部分对应原书第二卷。——编者注

第 2 版和第 3 版前言

本书第 1 版发行后，许多学生和老师与我联系，指出了书中一些拼写错误并提供了一些修正意见。另外，也有人提出了对本书精装版的需求。基于上述原因，出版商和我决定对第 1 版进行修订并将第 2 版作为精装版发行。新版书的版面编排、页面编号以及索引都发生了变动。但是，第 2 版的章节和习题编号以及数学知识都与第 1 版相同，所以，基于家庭作业和学习的目的，本书第 1 版和第 2 版可以替换使用。

第 3 版对第 2 版做了一些修正，并且增加了部分新的习题，但是从本质上来说，与第 2 版内容相同。

目　　录

第一部分

第 1 章　引　　言

1.1　什么是分析

本书将介绍高等**实分析**，这是关于实数、实数序列、实数级数以及实值函数的分析。虽然实分析与复分析、调和分析以及泛函分析是相关的，但与它们又是不同的。**复分析**是关于复数和复函数的分析；**调和分析**是关于调和函数（振动）的分析，比如正弦振动，并研究这些函数如何通过傅里叶变换构造其他函数；**泛函分析**研究的内容主要集中在函数上（以及这些函数如何构造出如向量空间这样的东西）。**分析学**是对这些对象进行严格研究的学科，并且着力于对这些对象做出准确的定性和定量分析。实分析是**微积分学**的理论基础，而微积分是我们在处理函数时所用到的计算规则的集合。

在本书中，我们将对很多概念进行研究，而这些概念在学习初等微积分时会学到，比如：数字、序列、级数、极限、函数、定积分、导数等。虽然你曾经基于这些概念进行过大量的运算，但是现在我们主要研究这些概念的基本理论。我们关心如下几个问题。

（1）什么是实数？是否存在最大的实数？“0”之后的“下一个”实数是多少？（即：最小的正实数是几？）是否能够对一个实数进行无限次分割？为什么有些数（比如 2）有平方根，而有些数（比如 -2）没有平方根？如果有无穷多个实数和无穷多个有理数，那么为什么会说实数比有理数的个数“多”？

（2）如何确定实数序列的极限值？什么样的序列存在极限，什么样的序列不存在极限？如果你能够阻止一个序列趋向无穷，这是否意味着该序列最终会停止变化并且收敛？把无穷多个实数相加后得到一个有限实数的情况是否存在？把无穷多个有理数相加后得到一个非有理数的情况是否存在？如果有无穷多个数相加，那么改变这些数的排列次序，所得到的和是否保持不变？

（3）什么是函数？函数是连续的、可微的、可积的、有界的分别是什么意思？能否将无限多个函数相加？对函数序列取极限会怎样？能否对无穷函数级数求微分？什么是求积分？如果一个函数 $f(x)$ 满足：当 $x=0$ 时，$f(x)$ 的值为 3；当 $x=1$ 时，$f(x)$ 的值为 5（即 $f(0)=3$ 且 $f(1)=5$），那么 x 若取遍 0 到 1 之间的所有值，$f(x)$ 是否也取遍了 3 到 5 之间的所有值？为什么？

如果你上过微积分课程，也许能够回答出上述问题中的几个。但是对于微积分这类课程来说，上述这类问题并不是最重要的。这类课程的重点在于教会学生如何

计算，比如计算函数 $x\sin(x^2)$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 上的积分。既然现在你对这些概念已经非常熟悉了，而且知道如何进行运算，那么我们将回归到理论知识并且尝试真正去理解这些内容是如何展开的。

1.2 为什么要做分析

当人们谈论分析理论的时候，自然会想到“为什么要做分析”这个问题。从哲学角度来说，认识到事物**为什么**起作用，能够带给人们一定的满足感。但是，讲究实际的人会认为，只需要了解事物在解决实际问题时是**如何**起作用的就足够了。在学习入门课程时，你曾经接受过的微积分训练，足以让你可以开始着手解决存在于物理、化学、生物、经济、计算机科学、金融、工程学或者其他学科中的问题。而且，对于链式法则、洛必达法则或者分部积分法等，即使你并不了解它们为什么会起作用，或者不知道这些法则是否有例外的情况存在，也不影响你应用它们来解决问题。然而，如果一个人在应用某些法则时并不了解它们是如何得出的，也不知道使用这些法则有哪些限制条件，那么他将陷入困境之中。我来举一些例子。这些例子将告诉我们，对于那些我们熟知的法则，如果不了解其背后潜在的分析原理而盲目地应用它们，将会导致灾难性的后果。

例 1.2.1（用零做除数） 这是大家都非常熟悉的一个例子。当 $c=0$ 时，消去律 $ac=bc \Longrightarrow a=b$ 不成立。例如，等式 $1\times 0=2\times 0$ 是恒成立的，但是如果有人盲目地消去 0，那么将会得到 $1=2$，这显然是错误的。在这个例子中，能够明显看出错误在于用零做了除数；但是在其他情况下，错误可能更加隐蔽。

例 1.2.2（发散级数） 你也许见过如下无穷和形式的几何级数：

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

你大概也见过按照下面的技巧求该级数和的方法：令该级数和为 S，那么将等号两端同时乘以 2 得

$$2S=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2+S$$

于是 $S=2$，因此上述级数和为 2。但是，如果按照同样的方法来计算级数：

$$S=1+2+4+8+16+\cdots$$

将得到一个荒谬的结果：

$$2S=2+4+8+16+\cdots=S-1\Rightarrow S=-1$$

那么，按照同样的计算方法，我们得到了 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=2$ 和 $1+2+4+8+\cdots=-1$ 两个结果。为什么我们认为前一个等式是成立的，而第二个等式是不成立的？另外一个类似的例子是关于下面这个级数的：