新世纪高等学校规划教材 · 物理学系列

与程守洙、江之永主编的《普通物理学》（第7版）同步

大学物理精讲精练

（第3版）

梁 红◎主编

DAXUEWULI JINGJIANG JINGLIAN

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

学校规划教材 · 物理学系列

的《普通物理学》（第7版）同步

大学物理精讲精练

（第3版）

梁 红（中国传媒大学）◎ 主编

DAXUEWULI
JINGJIANG JINGLIAN

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

大学物理精讲精练 / 梁红主编. —3 版.— 北京 ：北京师范大学出版社，2017.4

新世纪高等学校规划教材. 物理学系列

ISBN 978-7-303-22125-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①梁… Ⅲ. ①物理学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 028132 号

营销中心电话　010-62978190　62979006

北师大出版社科技与经管分社　http://www.bjjsws.com

电子信箱　jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com

北京市海淀区新街口外大街 19 号

邮政编码：100875

印　　刷：三河市东兴印刷有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：787 mm×1092 mm　1/16

印　　张：17.75

字　　数：358 千字

版　　次：2017 年 4 月第 3 版

印　　次：2017 年 4 月第 4 次印刷

定　　价：28.00 元

策划编辑：范　林　刘风娟　　责任编辑：范　林　刘风娟

美术编辑：刘　超　　装帧设计：刘　超

责任校对：李　菡　　责任印制：赵非非

前言

物理学是一门重要的基础科学，大学物理是高等院校非物理专业的理工科专业的重要基础理论课之一. 由于学生在学习大学物理过程中普遍存在困难，为了帮助学生掌握好物理学的基本概念、基本规律，提高学生分析问题和解决问题的能力，编者在总结多年教学经验的基础上编写了本书.

大学物理精讲精练第一版按程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第五版)各章顺序编写，2007 年出版，2008 年第 2 次印刷，第二版按程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第六版)各章顺序编写，出版以来得到读者一定的好评. 此次修订根据老师和学生的建议与程守洙、江之永主编的《普通物理学》(第七版)章节同步，内容上做了一些调整，并补充了部分习题. 本书与众多辅导教材不同之处在于，本书并不是该教材后所附各章习题简单的题解，而是按教材内容分层次精心配置习题，每章均由以下四部分组成.

一、知识要点梳理：对本章知识简明、扼要地归纳、概括和总结，使知识系统化、条理化. 帮助学生理清知识脉络，为课后复习提供方便、清晰的系统资料.

二、问题分析：将学习中经常出现的问题分为概念问题、常见问题和困惑问题分析，对学习中若干重点、难点和疑点问题进行分析、讨论，澄清一些常见错误和模糊认识，具有极强的针对性.

三、典型例题分析：通过典型例题的求解，注重建立清晰的物理图像，突出解题方法和技巧，强调物理方法和数学方法的灵活运用，培养科学的思维方式，提高分析问题和解决问题的能力.

四、练习与自测：包括基础练习和综合练习两部分。基础练习包括单项选择题和填空题，是反映各章基本要求的测试习题；综合练习是反映综合解决问题能力的习题.

练习与自测的所有题目书后均有详解. 解题和知识要点梳理中针对不同问题有一题多解、一题多变、指点迷津、技巧点拨、授业解惑、错误分析、追根寻源、

总结述评等灵活多样的小栏目,可读性强.

另外,书中还有四套模拟试题,供学生每学期期中、期末同步复习使用.

全书共使用各类大学普通物理题库中近600道典型习题,类型丰富,知识点全面,难易程度层次分明,能满足不同层次的学生要求.

由于编者水平有限,书中难免存在不当之处和错误,敬请广大读者和同行指正.

修订过程中,得到北京师范大学出版社的大力支持和帮助,编辑认真仔细地审阅了书稿,提出了许多修改意见和建议,在此表示衷心的感谢!

中国传媒大学　梁红

目 录

第一章　力和运动

一、知识要点梳理

1 位置矢量与运动方程

(1)位置矢量(以下简称位矢),如图 1-1 所示.

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

大小:$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

方向:$\cos\alpha=x/r$, $\cos\beta=y/r$, $\cos\gamma=z/r$,

且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

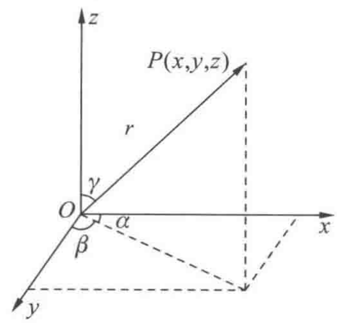

图 1-1

(2)运动方程:位矢随时间变化的方程.

$$\boldsymbol{r}=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}.$$

分量式为 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t).\end{cases}$

2 位移、速度和加速度

(1)位移:如图 1-2 所示.

$$\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}.$$

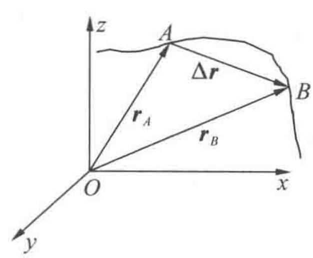

图 1-2

(2)速度、速率

①速度

平均速度:$\bar{\boldsymbol{v}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$,$\Delta t$ 时间内位移与时间 Δt 的比值.

瞬时速度:$\boldsymbol{v}=\lim\limits_{\Delta t\to0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$

$=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$,

位矢对时间的一阶导数.

②速率

平均速率:$\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$,$\Delta t$ 时间内路程与时间 Δt 的比值.

瞬时速率:$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,路程对时间的一阶导数.

(3)加速度

平均加速度:$\bar{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$,

瞬时加速度：$\boldsymbol{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}.$

3 圆周运动

(1)角速度：角速度等于角位移对时间的一阶导数.

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

(2)角加速度：角加速度等于角速度对时间的一阶导数或角位移对时间的二阶导数.

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

如匀速圆周运动：$\beta=0,\omega=$恒量；匀变速圆周运动：$\beta=$恒量.

(3)角量和线量的关系：

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta\cdot R}{\mathrm{d}t}=\omega R.$$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t}=\beta R.$$

角加速度
切向加速度

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R.$$

法向加速度

4 一般曲线运动

(1)切向加速度　大小：$a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，由于速度大小的变化而产生的；方向：沿轨道的切线方向.

(2)法向加速度　大小：$a_n=\dfrac{v^2}{R}$，由于速度方向的变化而产生的；方向：沿轨道的法线方向.

(3)总加速度大小：　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{t}+\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}$

$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(a_t)^2+(a_n)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{v^2}{R}\right)^2}$；方向：总是指向曲线的凹侧.

5 相对运动

(1)伽利略坐标变换

设有两个惯性系 k 和 k'，若 k' 系相对 k 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动，建立坐标系如图 1-3 所示，则有：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{r}_{oo'},\ t=t'.$$

分量式为 $\begin{cases}x'=x-ut,\\ y'=y,\\ z'=z,\\ t'=t.\end{cases}$

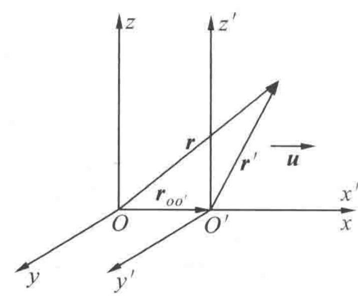

图 1-3

(2) 速度变换

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_{oo'},\quad \Delta t=\Delta t'.$$

分量式为 $\begin{cases}v_x'=v_x-u,\\ v_y'=v_y,\\ v_z'=v_z.\end{cases}$

(3) 加速度变换

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}_{oo}.$$

若 k 系和 k' 系间没有加速度，即 $\boldsymbol{a}_{oo}=0$ 时，k 系相对 k' 系做匀速直线运动，则有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}'$$

说明：彼此做匀速直线运动的惯性系，其力学规律是完全相同的.（伽利略相对性原理）

6　几种常见的力

(1)重力：因地球吸引而使物体受到的力，在地面附近可近似认为重力等于地球的引力.

大小：$G=mg$；方向：竖直向下.

(2)弹力：物体因形变而产生欲使其恢复原来形状的力称为弹性力.

大小：具体情况具体分析；方向：垂直于接触面，与形变方向相反.

胡克定律：在弹簧弹性限度内，弹性力的大小与弹簧的伸长量成正比，即 $F=-kx$，方向指向平衡位置.

(3)摩擦力：两个物体相互接触，由于有相对运动或者相对运动的趋势，在接触面处产生的一种阻碍物体相对运动或相对运动趋势的力.

①静摩擦力. 发生条件：接触面不光滑、物体间有相对运动趋势. 大小：随外力改变. 方向：与物体间相对运动趋势相反.

最大静摩擦力：$F_{max}=\mu_s N$，μ_s 为静摩擦系数，N 为正压力.

②滑动摩擦力. 发生条件：接触面不光滑、物体间有相对运动. 大小：$f_k=\mu_k F_N$，μ_k 为滑动摩擦系数. 方向：与物体间相对运动相反.

一般有 $\mu_k<\mu_s$，二者均与两接触物体的材料性质及接触面的情况有关，都近似小于 1.

(4)流体阻力：一个物体在流体中和流体有相对运动时，物体会受到流体的阻力. 大小：和相对速度的大小有关. 方向：和物体相对于流体的速度方向相反.

7　牛顿运动定律

(1)牛顿第一运动定律

任何物体总保持静止或匀速直线运动的状态，直到受到力的作用迫使它改变这种状态为止.

说明：

①任何物体都具有惯性(因此，该定律又称为惯性定律)；

②准确地提出力的含义——力是物体运动状态变化的原因，不是物体运动的原因.

(2)牛顿第二定律

物体受到外力作用时，它所获得的加速度的大小与外力的大小成正比，并与物体的质量成反比，加速度的方向与外力的方向相同.

数学表达式：$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}=m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$，式中 m 称惯性质量；

分量式：（直角坐标系）$\begin{cases}F_x=ma_x,\\F_y=ma_y,\\F_z=ma_z;\end{cases}$　（自然坐标系）$\begin{cases}F_t=ma_t=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\\F_n=ma_n=m\dfrac{v^2}{R}.\end{cases}$

(3)牛顿第三定律

两个物体之间的作用力与反作用力，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物

体上.

说明：

①作用力与反作用力是矛盾的两个方面，它们同时产生，同时消灭，任何一方都不能孤立地存在；

②作用力与反作用力是同一种性质的力；

③作用力与反作用力分别作用在两个不同的物体上，它们不能互相抵消.

(4)牛顿定律(经典力学)的适用范围

①质点或质点系；

②惯性参考系(牛顿第三定律对任何参考系都成立)；

③低速运动(与光速比较)的宏观物体.

8 非惯性系、惯性力

(1)非惯性系：对地面参考系做加速运动的物体.

(2)惯性力：为虚拟力，不是真实的力，是物体惯性的表现. 大小：等于运动质点的质量与非惯性系加速度的乘积；方向：与非惯性系加速度的方向相反.

二、问题分析

(一)概念问题

问题 1：质点做曲线运动，元位移 $d\boldsymbol{r}$、元路程 ds、位移 $\Delta\boldsymbol{r}$、路程 Δs 之间有什么关系呢？

答：这个问题常有两种错误概念，一种认为 $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s$，即位移的大小就是路程，还有一种认为 $d\boldsymbol{r}=ds$. 如图 1-2 中位移的大小为 AB 直线的长度，路程为 AB 曲线的长度，当 B 点无限接近 A 点时，位移的大小和路程相等，因此正确的关系是 $|d\boldsymbol{r}|=ds$.

(二)常见问题

问题 2：关于加速度和速度关系的问题.

(1)一物体具有加速度而其速度为零，是否可能？

(2)一物体具有恒定的速率但仍有变化的速度，是否可能？

(3)一物体具有恒定的速度但仍有变化的速率，是否可能？

答：(1)可能. 例如，物体由静止开始运动；做简谐振动的物体在偏离平衡位置最大时，速度为零而加速度不为零.

(2)可能. 速率是标量，速度是矢量，速度的变化是大小或方向改变，而速率仅表示速度的大小. 例如，做匀速圆周运动的物体，速率恒定，但速度变化.

(3)不可能. 速度恒定即表示速度大小、方向均不变，速率也一定不会变.

问题 3：关于力和运动的关系问题.

(1)物体的运动方向和合外力方向是否一定相同？

(2)物体受到几个力的作用，是否一定产生加速度？

(3)物体运动的速率不变，所受合外力是否为零？

(4)物体速度很大，所受到的合外力是否也很大？

答：(1)不一定. 运动方向与速度方向相同，而合外力方向与加速度方向相同，因此运动方向与合外力方向不一定相同.

(2)不一定.当物体虽受到几个力的作用,但其合外力为零时,加速度为零.

(3)不一定.速率不变不表示速度不变,因此合外力不一定为零.例如,做匀速圆周运动的物体,速率不变,合外力指向圆心.

(4)不一定.合外力的大小决定了物体加速度的大小,而不是速度的大小.

(三)困惑问题

问题4:若质点的运动方程为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,在计算速度时,有两种计算方法:一种是先求出 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后根据 $v=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$求得结果;另一种是先计算速度的分量,再合成求结果,即 $v=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$,两种方法结果不同,哪种正确呢?

【授业解惑】后一种方法正确.$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$仅仅计算的是位置矢量的大小对时间的变化率,因为速度是矢量,按照定义 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,应该是位置矢量对时间的变化率,必须按照矢量的运算规则计算,即首先求出各方向的分量,然后合成.

问题5:惯性离心力与向心力大小相等,方向相反,沿同一直线,为什么不是作用力和反作用力呢?

【授业解惑】作用力与反作用力必须是同一种性质的力,分别作用在两个物体上.向心力是合力的概念,是真实存在的力;惯性离心力是虚拟力,并不是真实的力,两者都是对同一物体而言,所以它们不是作用力和反作用力.

三、典型例题分析

例1　一质点的运动方程为 $x=2t$, $y=19-2t^2$(SI:国际单位制),试求:

(1)质点的运动轨迹;

(2)$t=2$ s时刻质点的速度和加速度;

(3)在何时,质点的位矢与其速度矢量恰好垂直?写出此时质点的位矢.

解　(1)由运动方程 $x=2t$,$y=19-2t^2$ (SI),消去参数 t 得轨迹方程为

$$y=19-\frac{x^2}{2}.$$

此为抛物线方程,即质点的运动轨迹为抛物线.

(2)**解法1**　对运动方程求一阶导数,得速度的分量为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2,\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4t.$$

$t=2$ s时,　$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2^2+(-4\times2)^2}=8.26\ \mathrm{m/s}.$$

与 x 轴的夹角 α 满足:　$$\alpha=\arccos\frac{v_x}{v}=\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$$

对速度的分量式求导,得加速度的分量为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=0\ \mathrm{m/s^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=-4\ \mathrm{m/s^2}.$$

$t=2$ s 时，$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=4\ \mathrm{m/s^2}$，方向：沿 y 轴负向.

解法 2　矢量运算法

先将运动方程写成位置矢量形式

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}.$$

由速度及加速度定义知

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}.$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}.$$

所以 $t=2$ s 时，$\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m/s})$，$\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{j}\,(\mathrm{m/s^2})$.

接下来求解大小及方向的过程与解法 1 相同.

(3)当质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直时有 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，即

$$[2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}]\cdot(2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j})=0,$$

整理得 $2t^2-18=0$，解得 $t_1=0$，$t_2=3$.

将所求代入位置矢量表达式：　$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$

得 $\begin{cases}x_0=0,\\ y_0=19\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_3=6,\\ y_3=1.\end{cases}$

【技巧点拨】此题为质点的二维运动，应熟练地将运动方程的分量式写为矢量式(或将矢量式写为分量式)，直接进行矢量的运算；本题也可以先求速度和加速度的各分量，然后合成. 中学常用后一种方法，大学阶段应掌握用矢量式直接运算.

例 2　设某质点沿 x 轴运动，在 $t=0$ 时的速度为 v_0，其加速度与速度的大小成正比且方向相反，比例系数为 $k(k>0)$，试求速度随时间变化的关系式.

解　直线运动中可用标量代替矢量，由题意及加速度的定义式，可知 $a=-kv=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

因而
$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}t.$$

$a=-kV=\frac{dv}{dt}$

积分
$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\mathrm{d}t.$$

得
$$\ln\frac{v}{v_0}=-kt.$$

所以
$$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}.$$

求解运动学两类问题简单图示如下：

求导两次：已知 $\boldsymbol{r}(t)\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{v}(t)\xrightarrow{\text{求导}}\boldsymbol{a}(t)$

积分两次：$\boldsymbol{r}(t)\xleftarrow{\text{积分}}\boldsymbol{v}(t)\xleftarrow{\text{积分}}$ 已知 $\boldsymbol{a}(t)$

$\boldsymbol{a}(t)\xleftarrow{\text{求导}}$ 已知 $\boldsymbol{v}(t)\xrightarrow{\text{积分}}\boldsymbol{r}(t)$

例 3　如图 1-4 所示，在离水面高为 H 的岸边，有人用绳拉船靠岸，船在离岸边 S 处，当人以 v_0 的速率收绳时，求船的速度和加速度.

解法 1　建立坐标系如图，根据几何关系有

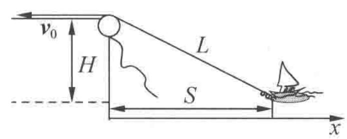

图 1-4

$$L^2=H^2+S^2,$$

注意上式中除岸高是常量外，绳长 L、船离山脚的距离 S 均为随时间变化的变量. 方程两边同时对时间求导，得

$$2L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=2S\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.$$

式中，$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=-v_0$，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 为船的速率.

所以船的速率为：$v=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\frac{L}{S}v_0$，方向：沿 x 轴负向.

解法 2　中学方法

船的实际运动方向即为合运动方向，故沿绳的方向为分运动方向，即

$$\frac{v_0}{v}=\cos\alpha,\ v=\frac{v_0}{\cos\alpha}=\frac{L}{S}v_0.$$

船的加速度为
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}S-L\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}}{S^2}v_0=-\frac{v_0S-Lv}{S^2}v_0.$$

将 $v=-\frac{L}{S}v_0$ 代入上式得
$$a=-\frac{L^2-S^2}{S^3}v_0^2=-\frac{H^2}{S^3}v_0^2.$$

【易犯错误】$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{L'}{S}v_0=\frac{v_0^2}{S}$.

【追根寻源】错误的根源在于忽略了 S 也是变量. 解决该类问题的关键是根据题意建立运动方程，明确方程中的常量和变量，这是同学们常常忽视的问题. 一旦建立了运动方程，根据速度和加速度的定义就可以很快地求出结果.

例 4　一质点做半径为 $R=0.5$ m 的圆周运动，其运动方程为 $\theta=t^3+3t$ (SI)，试求：质点在 $t=2$ s 时的角位置、角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度和总加速度.

解　根据角速度、角加速度的定义有

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=3t^2+3,\ \beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=6t.$$

将 $t=2$ s 代入可得
$$\begin{cases}\theta=14\ \mathrm{rad}.\\ \omega=15\ \mathrm{rad/s}.\\ \beta=12\ \mathrm{rad/s^2}.\end{cases}$$

而
$$\begin{cases}a_n=R\omega^2=112.5\ \mathrm{m/s^2}.\\ a_t=R\beta=6\ \mathrm{m/s^2}.\end{cases}$$

则加速度大小为
$$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=112.7\ \mathrm{m/s^2}.$$

方向为
$$\alpha(a_t,a)=\arctan\frac{a_t}{a_n}=\arctan\frac{6}{112.5}=3°3'10''.$$

例 5　一张 CD 光盘音轨区域的内半径 $R_1=2.2$ cm，外半径 $R_2=5.6$ cm，径向音轨密度 $n=650$ 条/mm. 在 CD 唱机内，光盘每转一圈，激光头沿径向向外移动一条音轨，激光束相对光盘是以 $v=1.3$ m/s 的恒定线速度运动的. 求：(1) 这张光盘的全部放音时间是多少？(2) 激光束到达离盘心 $r=5.0$ cm 处时，光盘转动的角速度和角加速度各为多少？

解　(1) 在距离中心为 r、宽度为 $\mathrm{d}r$ 内音轨的长度为 $2\pi rn\mathrm{d}r$，激光划过这些音轨所需的

时间 $\mathrm{d}t=\frac{2\pi rn\mathrm{d}r}{v}$,则整张 CD 的放音时间为

$$t=\int \mathrm{d}t=\int_{R_1}^{R_2}\frac{2\pi rn\,\mathrm{d}r}{v}=\frac{\pi n}{v}(R_2^2-R_1^2)=\frac{\pi\times 6\ 500}{130}(5.6^2-2.2^2)=4\ 164\ \mathrm{s}.$$

(2) $\omega=\frac{v}{r}$, $r=5.0$ cm 时, $\omega=\frac{130}{5.0}=26$ rad/s,而

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{v}{r^2}\frac{v}{2\pi rn}=-\frac{v^2}{2\pi r^3 n}.$$

$r=5.0$ cm 时, $\beta=-\frac{130^2}{2\pi\times 5^3\times 6\ 500}=-3.31\times 10^{-3}\ \mathrm{rad/s^2}.$

【总结述评】以上例题充分体现了微积分在物理中的应用,很多同学学习大学物理时感到困难,原因之一在于不能灵活运用数学知识.而另有些同学微积分学得不错,但不会解决物理实际问题,这是因为数学是高度的概括和抽象,通常是给定一个函数关系式,用 x 表示变量, y 表示函数,直接积分或求导即可.但物理问题中的函数关系式需要根据物理规律来建立,因此学习物理必须掌握物理概念的物理意义,明确物理规律的适用条件,这样才能根据物理规律建立正确的数学关系式.之后要分析关系式中哪些物理量是常量,哪些是变量,有时会有多个变量出现,为了减少计算的麻烦,通常要将其统一.在大学学习阶段,经常是用微积分的方法来解决物理问题,在以后的学习中同学们可以逐渐去体会.

例 6 河水自西向东流动,速度为 10 km/h.一轮船在水中航行,船相对于河水的航向为北偏西 30°,相对于河水的航速为 20 km/h.此时风向为由东向西,风速为 10 km/h.试求在船上观察到的烟囱冒出的烟缕的飘向(设烟离开烟囱后很快就获得与风相同的速度).

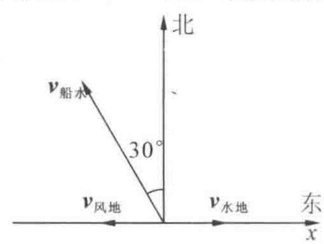

图 1-5(a)

解法 1 解析法

如图 1-5(a)所示建立坐标系,由题意可知

$\boldsymbol{v}_{水地}=10\boldsymbol{i}$ km/h.

$\boldsymbol{v}_{风地}=-10\boldsymbol{i}$ km/h.

$\boldsymbol{v}_{船水}=-20\sin 30°\boldsymbol{i}+20\cos 30°\boldsymbol{j}$ (km/h).

根据相对速度公式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{烟船}&=\boldsymbol{v}_{风船}=\boldsymbol{v}_{风地}+\boldsymbol{v}_{地水}+\boldsymbol{v}_{水船}\\&=\boldsymbol{v}_{风地}-\boldsymbol{v}_{水地}-\boldsymbol{v}_{船水}\\&=(-10)\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{i}-(-20\sin 30°\boldsymbol{i}+20\cos 30°\boldsymbol{j})\\&=-10\boldsymbol{i}-17.3\boldsymbol{j}\ (\mathrm{km/h}).\end{aligned}$$

$v_{烟船}=\sqrt{(-10)^2+(-17.3)^2}=20$ km/h.

$\theta=\arctan\frac{10}{17.3}=30°.$

解法 2 图解法

根据相对速度公式,作图如图 1-5(b)所示,知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{烟船}&=\boldsymbol{v}_{风船}\\&=\boldsymbol{v}_{风地}+\boldsymbol{v}_{地水}+\boldsymbol{v}_{水船}\\&=\boldsymbol{v}_{风地}+(-\boldsymbol{v}_{水地})+(-\boldsymbol{v}_{船水}).\end{aligned}$$

其中，$v_{风地}+(-v_{水地})=20\ \mathrm{km/h}$，$v_{船水}=20\ \mathrm{km/h}$.

可知图 1-5(b)中$\triangle ABC$为等边三角形，所以 $v_{烟船}=20\ \mathrm{km/h}$，$\theta=30°$.

即在船上观察，烟以 20 km/h 的速率向南偏西 30°飘去.

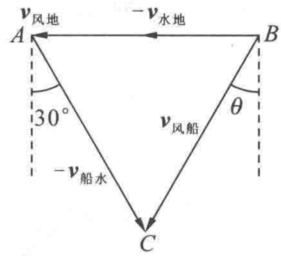

图 1-5(b)

【技巧点拨】解相对运动问题首先要明确哪个物体是 K 系、哪个物体是 K'系、被研究对象是什么. 按照速度变换公式 $\boldsymbol{v}_K=\boldsymbol{v}_{K'}+\boldsymbol{v}_{K'K}$，其中 $\boldsymbol{v}_K$ 为被研究对象在 K 系中的速度；$\boldsymbol{v}_{K'}$ 为被研究对象在 K'系中的速度；$\boldsymbol{v}_{K'K}$ 为 K'系相对 K 系的速度，如果还有中间参照系 K''、K''' 等系，速度变换公式的特点是下脚标字母首尾相接，明确了每个物理量的意义，便可以按照速度变换公式求解相对运动问题.

例 7 如图 1-6 所示，一质量为 m，长度为 L 的均质绳子，以 AA'为轴以匀角速度 ω 绕固定端旋转. 设绳子不伸长，重力忽略不计，试求离固定端为 r 处绳中的张力.

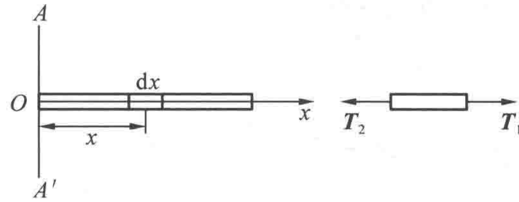

图 1-6

解 如图，设以固定端为原点沿绳子方向为 x 轴正向，距原点 x 处取一质量元为研究对象，质量元质量为 $\mathrm{d}m=\dfrac{M}{L}\mathrm{d}x$.

质量元所受张力为 $T_2-T_1=\mathrm{d}T$，此力为向心力. 对质量元应用牛顿第二定律：

$$\mathrm{d}T=-a_n\mathrm{d}m=-\omega^2 x\frac{M}{L}\mathrm{d}x. \qquad (1)$$

式中负号表示加速度方向与坐标轴正向相反.

当 $x=L$ 时，$T=0$(错误理解：$x=0$ 时，$T=0$)；$x=r$ 时绳中的张力为 T.

对(1)式积分
$$\int_0^T \mathrm{d}T=-\int_L^r \omega^2 x\frac{M}{L}\mathrm{d}x.$$

得
$$T=\frac{M\omega^2}{2L}(L^2-r^2).$$

【指点迷津】该问题中绳子各处张力并不相等，张力是位置的函数. 下列两种情况中绳子张力处处相等：(1)绳子做匀速直线运动，根据牛顿第二定律，对绳中任一质量元有 $\Delta T=\Delta ma$，由于 $a=0$，所以 $\Delta T=0$；(2)绳子加速运动但绳子质量忽略不计，在 $\Delta T=\Delta ma$ 中虽然 $a\neq0$，但 $\Delta m=0$，所以 $\Delta T=0$. 中学中经常讨论轻绳的原因便在于此，因为轻绳的质量可以忽略不计，所以绳中张力处处相等.

例 8 一物体自地球表面以速率 v_0 竖直上抛. 假定空气对物体阻力的数值为 $f=kmv^2$，其中，m 为物体的质量，k 为常数. 求：(1)该物体能上升的高度；(2)物体返回地面时速度的大小.

解 (1)如图 1-7，物体受到重力和空气对物体的阻力，上升时，阻力方向向下.

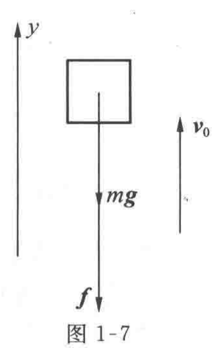

图 1-7

以地面为原点，竖直向上为 y 轴正向，由牛顿第二定律得

$$-mg-kmv^2=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$