普通高等教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计

颜宝平 夏林丽 杨龙仙 主编

中国工信出版集团 電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

颜宝平　夏林丽　杨龙仙　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书强调理论，同时高度重视知识的运用. 全书分为三篇：概率部分，数理统计部分，实验部分. 概率部分包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理；数理统计部分包括：数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析；实验部分包括 8 个实验. 本书提供配套电子课件.

本书可作为数学类相关课程的教材，也可供相关领域的人员学习、参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计 / 颜宝平，夏林丽，杨龙仙主编. 一北京：电子工业出版社，2018.8

ISBN 978-7-121-33980-6

I. ①概… II. ①颜… ②夏… ③杨… III. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 070198 号

策划编辑：王晓庆
责任编辑：王晓庆
印　　刷：涿州市京南印刷厂
装　　订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：14.5　　字数：371 千字
版　　次：2018 年 8 月第 1 版
印　　次：2018 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换. 若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888.

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn.

本书咨询联系方式：（010）88254113，wangxq@phei.com.cn.

前　言

根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”精神，结合普通高等学校本科专业类教学质量国家标准，为实现铜仁学院建设高水平教学服务型大学的目标，概率论与数理统计本科教学须强调专业教育服务. 全书内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析，以及 8 个实验. 各章节均配有习题，针对重要知识点设置了一定数量的思考题，通过思考和练习，学生可强化和巩固其知识与技能. 概率论与数理统计是随机数学类课程的核心基础课程，本书的编写不仅强调理论，而且高度重视知识的运用，内容上力求实用，简洁易懂，注重培养学生数学素质，适用于问题驱动教学，以解决问题为前提，在教学中引入新知识、新方法，参考了部分概率论与数理统计教材，教材编写在传统课程体系基础上做了一些新的尝试. 例如，利用计算机软件编制了几个实验，目的是借助计算机将理论知识用于解决实际问题.

本书提供配套电子课件，请登录华信教育资源网（http://www.hxedu.com.cn）注册下载.

本书由颜宝平、夏林丽、杨龙仙主编，具体分工是：颜宝平承担第 1～4 章，夏林丽承担第 5～7 章，杨龙仙承担第 8～10 章及 8 个实验的编写工作. 本书是铜仁学院大数据学院教学改革的缩影，编写工作得到了学院全体老师的支持. 教材出版得到了电子工业出版社领导的大力支持和帮助，责任编辑王晓庆为编辑、出版本书付出了辛勤的劳动，在此一并致以谢意.

本书是贵州省本科教学工程项目“基于应用型人才培养模式下的‘概率论与数理统计’课程建设研究”（NO.2014SJJGXM004）的阶段性成果，同时得到了贵州省区域内一流建设培育学科“教育学”（黔教科研发〔2017〕85 号）的支持.

限于编写时间仓促，本书不妥和错误之处在所难免，恳请专家同行及读者批评指正，编者联系方式：5231004@163.com.

编　者

2018 年 8 月

目　录

第一篇　概率部分

第二篇 数理统计部分

第三篇 实 验 部 分

第一篇 概率部分

第1章 随机事件及其概率

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门科学. 在科学研究中，随机现象的普遍存在性决定了它的广泛应用性.

在一定条件下，并不总是出现相同结果的现象称为**随机现象**. 例如，掷一枚硬币的结果、一天内进入某超市的顾客数.

从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机性在生活中的作用，直到20世纪初，人们才认识到随机现象亦可以通过数量化方法来进行研究. 概率论就是以数量化方法来研究随机现象及其规律性的一门数学课程，微积分等则是研究确定性现象的数学课程.

在现实世界中，存在只有一个结果的现象，称为**确定性现象或必然现象**. 例如，水在标准大气压下加温到100℃就会沸腾；同性电荷相互排斥，异性电荷相互吸引；太阳从东方升起.

【例 1.1.1】 随机现象的例子.

（1）掷一颗骰子，出现的点数；

（2）抛一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面；

（3）某种型号电视机的寿命；

（4）一天内进入某商场的顾客数；

（5）某地区10月份的平均气温；

（6）一天内自己的手机的来电数.

思考问题：

随机现象具有什么特点？

1.1.2 随机试验

在相同条件下可以重复对随机现象进行的观察、记录、实验称为**随机试验**（Random Trial），记为 E.

随机试验具有三个特点.

（1）**重复性**：可以在相同的条件下重复地进行；

（2）**明确性**：每次试验的可能结果不止一个，并且事先可以明确试验所有可能出现的结果；

（3）**随机性**：进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

【例 1.1.2】 随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况；

E_2：掷两颗骰子，观察出现的点数之和；

E_3：在一批电视机中任意抽取一台，测试它的寿命；

E_4：某城市某一交通路口，指定一小时内的汽车流量；

E_5：考察某地区 10 月份的平均气温.

在现实生活中，也有很多随机现象是不能重复的. 例如，某场篮球赛的输赢是不能重复的；失业、经济增长速度等经济现象也是不能重复的. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象，但是也研究不能重复的随机现象.

1.1.3 样本空间

随机试验的所有可能结果组成的集合称为**样本空间**（Sample space），记为 $\Omega=\{\omega\}$. 样本空间的元素 ω 称为**样本点**，表示基本结果. 样本点是统计中抽样的最基本单元. 写出随机试验的样本空间是认识随机现象的第一步.

【例 1.1.3】 下面给出随机现象的样本空间.

（1）掷一颗骰子的样本空间 $\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，其中 ω_i（$i=1,2,3,4,5,6$）表示出现 i 点，样本空间也可直接写为 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$.

（2）抛一枚硬币的样本空间 $\Omega_2=\{H,T\}$，其中 H 表示正面，T 表示反面.

（3）某种型号电视机的寿命的样本空间 $\Omega_3=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

（4）一天内进入某商场的顾客数的样本空间 $\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

（5）考察某地区 10 月份的平均气温的样本空间 $\Omega_5=\{t\,|\,T_1\leqslant t\leqslant T_2\}$，其中 t 表示平均气温.

（6）从一批含有正品和次品的产品中任意抽取一个产品的样本空间 $\Omega_6=\{N,D\}$，其中 N 表示正品，D 表示次品.

注意：

（1）样本空间中的元素可以是数，也可以不是数.

（2）根据样本空间含有样本点的个数来区分，样本空间可分为有限与无限两类. 例如，样本空间 Ω_1、Ω_2、Ω_6 中的样本点个数为有限个，而样本空间 Ω_3、Ω_4、Ω_5 中的样本点个数为无限个. 无限又分为可列与不可列，这里 Ω_4 中的样本点个数是可列个，Ω_3、Ω_5 中样本点个数是不可列个. 在今后的学习中，我们往往将样本点个数为有限个或可列个的情况归为一类，称为**离散样本空间**，而将样本点个数为不可列、无限个的情况归为另一类，称为**连续样本空间**. 这两类有本质的差别.

思考问题：

样本空间至少有多少个样本点？

1.1.4 随机事件

随机现象的某些样本点组成的集合，即样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**（Random

Event），简称事件[1]，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 例如，在掷一颗骰子中，$A=$“出现点数为偶数”是一个事件，若试验结果是“出现 2 点”，则称事件 A 发生.

注意：

（1）任何事件 A 对应样本空间的一个子集. 在概率论中常用一个长方形表示样本空间 Ω，用其中一个圆或其他几何图形表示事件 A，即事件 A 的维恩图，如图 1.1.1 所示.

（2）事件 A 发生是指当且仅当 A 中某个样本点出现了. 例如，当 $\omega_1(\in A)$ 出现时，则 A 发生；当 $\omega_2(\notin A)$ 出现时，则 A 不发生.

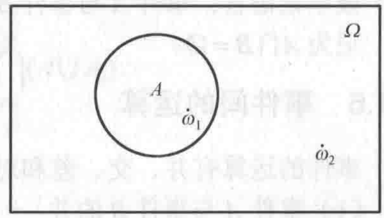

图 1.1.1　事件 A 的维恩图

（3）事件可以用集合表示，也可用准确的语言描述.

（4）样本空间 Ω 中单个样本点组成的子集称为**基本事件**. 必然发生的事件称为**必然事件**，记为 Ω；不可能发生的事件称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

思考问题：

样本空间的最大子集是什么事件？最小子集是什么事件？

【例 1.1.4】 抛一颗骰子的随机试验 E，样本空间记为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，请写出下列事件.

（1）事件 $A=$“出现 2 点”；

（2）事件 $B=$“出现点数小于 7”；

（3）事件 $C=$“出现点数大于 6”.

分析：事件 A 是 Ω 的单个样本点“2”组成的事件，是一个基本事件；事件 B 是由 Ω 的所有样本点组成的事件，是必然事件；事件 C 不可能发生，Ω 的任意样本点都不在事件 C 中，事件 C 是不可能事件.

答：（1）$A=\{2\}$；

（2）$B=\{1,2,3,4,5,6\}$；

（3）$C=\varnothing$.

1.1.5　事件间的关系

事件是一个集合，因而事件间的关系可以对比集合之间的关系来处理. 下面的讨论假设在同一样本空间 Ω 中进行，主要有以下几种关系.

（1）包含关系

集合语言：属于集合 A 的元素必属于集合 B.

概率论语言：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B（或称事件 B 包含事件 A）.

记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

对于任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

---

① 严格地说，事件是指 Ω 中满足某些条件的子集. 当 Ω 由有限个元素或无限可列个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 当 Ω 由不可列无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸而这种不可容许的子集在实际应用中几乎不会遇到. 今后，我们讲的事件均指它是容许考虑的那种子集.

（2）相等关系

集合语言：属于集合 A 的元素必属于集合 B，而且属于集合 B 的元素必属于集合 A.

概率论语言：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，且事件 B 发生必然导致事件 A 发生（$A\subset B$ 且 $B\supset A$），则称事件 A 与 B 相等（或等价）.

记为 $A=B$.

（3）互不相容

集合语言：若集合 A 与集合 B 没有相同的元素，则称集合 A 与集合 B 互不相容.

概率论语言：事件 A 与事件 B 不可能同时发生.

记为 $A\cap B=\varnothing$.

1.1.6 事件间的运算

事件的运算有并、交、差和对立四种，与集合的并、交、差和补集运算相当.

（1）事件 A 与事件 B 的并

集合语言："由集合 A 与 B 中所有的元素（相同的只计入一次）"组成的新集合.

概率论语言："事件 A 与 B 中至少有一个发生"的事件称为 A 与 B 的并（和）.

记为 $A\cup B$.

如：若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,5\}$，则 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$.

（2）事件 A 与事件 B 的交（积）

集合语言："由事件 A 与 B 中公共的元素"组成的新集合.

概率论语言："事件 A 与 B 同时发生"的事件.

记为 $A\cap B$ 或 AB.

如：若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,5\}$，则 $A\cap B=\{1,2\}$.

（3）事件 A 与事件 B 的差

集合语言："由属于集合 A 而不属于集合 B 中的元素"组成的新集合.

概率论语言："事件 A 发生而 B 不发生".

记为 $A-B$.

如：若 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,5\}$，则 $A-B=\{3\}$.

（4）对立事件

集合语言："由属于 Ω 而不属于集合 A 中的元素"组成的新集合称为集合 A 的对立事件.

概率论语言：A 不发生，记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=\Omega-A$.

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件（对立事件）. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 是由所有不属于 A 的样本点组成的事件，它表示" A 不发生"事件. 显然 $\overline{A}=\Omega-A$.

注意：

1．对立事件是相互的，即 A 的对立事件是 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 的对立事件是 A（$\overline{\overline{A}}=A$）.

2．必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 互为对立事件，即 $\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$.

思考问题：

对立事件一定是互不相容的事件，互不相容的事件一定是对立事件吗？为什么？

可以验证一般事件的运算满足如下关系：

1．交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ 或者 $AB=BA$；

2．结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ 或者 $A(BC)=(AB)C$；

3．分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形，即

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i)，\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i)；$$

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i)，\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup A_i).$$

4．对偶律（德·摩根公式）

事件交的对立等于对立的并：$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

事件并的对立等于对立的交：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

对有限个或可列无穷个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}，\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}；$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}，\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

5．概率论与集合论之间的对应关系.

概率论与集合论之间的对应关系如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1　概率论与集合论之间的对应关系

记　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	集合 A 的对立事件	集合 A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致 B 发生	集合 A 是集合 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 的相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的和集
AB	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 没有相同的元素

以上事件的关系及运算可以用维恩图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则 A 与 B 的各种关系及其运算如图 1.1.2～图 1.1.7 所示.

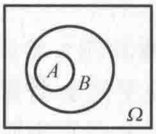

图 1.1.2　$A\subset B$

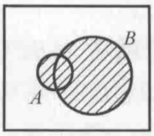

图 1.1.3　$A\cup B$

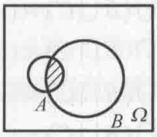

图 1.1.4　$A\cap B$

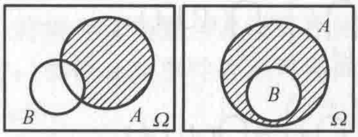

图 1.1.5　$A-B$

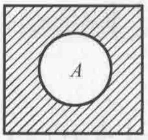

图 1.1.6　$\overline{A}$

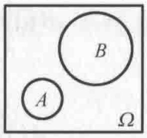

图 1.1.7　$AB=\varnothing$

【例 1.1.5】 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 A 表示“甲中靶”，B 表示“乙中靶”，C 表示“丙中靶”，则可用上述三个事件的运算来分别表示下列各事件：

（1）“甲未中靶”：　$\overline{A}$

（2）“甲中靶而乙未中靶”：　$A\overline{B}$

（3）“三人中只有丙未中靶”：　$AB\overline{C}$

（4）“三人中恰好有一人中靶”：　$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

（5）“三人中至少有一人中靶”：　$A\cup B\cup C$

（6）“三人中至少有一人未中靶”：　$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$

（7）“三人中恰有两人中靶”：　$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$

（8）“三人中至少有两人中靶”：　$AB\cup AC\cup BC$

（9）“三人均未中靶”：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

（10）“三人中至多有一人中靶”：　$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$

（11）“三人中至多有两人中靶”：　$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

注：用其他事件的运算来表示一个事件，方法往往不唯一，如例 1.1.5 中的（6）和（11）实际上是同一事件，读者应学会用不同方法表达同一事件，特别是在解决具体问题时，往往要根据需要选择一种恰当的表示方法.

习题 1.1

1．写出下列随机试验的样本空间及下列事件包含的样本点.

（1）掷一颗骰子，出现奇数点.

（2）掷两颗骰子，A=“出现点数之和为奇数，且恰好其中有一个 1 点”，B=“出现点数之和为偶数，但没有一颗骰子出现 1 点”.

（3）将一枚硬币抛两次，A=“第一次出现正面”，B=“至少有一次出现正面”，C=“两次出现同一面”.

2．设 A、B、C 为三个事件，试用 A、B、C 的运算关系式表示下列事件：

（1）A 发生，B、C 都不发生；

（2）A 与 B 发生，C 不发生；

（3）A、B、C 都发生；

（4）A、B、C 至少有一个发生；

（5）A、B、C 都不发生；

（6）A、B、C 不都发生；

（7）A、B、C 至多有两个发生；

（8）A、B、C 至少有两个发生；

（9）A、B、C 不多于一个发生；

（10）A、B、C 至少有一个不发生.

3. 指出下列各等式命题是否成立，并说明理由：

（1）$A\cup B=(A\overline{B})\cup B$；

（2）$\overline{A}B=A\cup B$；

（3）$\overline{A\cup B}\cap C=\overline{AB}\,\overline{C}$；

（4）$(AB)(A\overline{B})=\varnothing$；

（5）若 $A\cup C=C\cup B$，则 $A=B$；

（6）若 $A-C=B-C$，则 $A=B$；

（7）若 $AC=BC$，则 $A=B$；

（8）若 $AB=\varnothing$，则 $\overline{AB}=\varnothing$.

4. 化简下列事件：

（1）$(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{A}\cup B)$；（2）$A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\,\overline{B}$；（3）$A\cap(B\cup\overline{B})$.

5. 证明：$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

6. 从某学院学生中任选一名学生. 若事件 A 表示该生是男生，事件 B 表示该生是大学一年级学生，事件 C 表示该生是贫困生.

（1）叙述 $AB\overline{C}$ 的意义.

（2）在什么条件下 $ABC=B$ 成立？

（3）在什么条件下 $\overline{A}\subset B$ 成立？

7. 一名射击选手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示第 i（i=1,2,3）次射击时击中目标，试用文字描述下列事件：$A_1\cup A_2$；A_2；$A_1A_2A_3$；$A_1\cup A_2\cup A_3$；A_3-A_2；$\overline{A_2}A_3$；$\overline{A_1\cup A_2}$；$\overline{A_2}\,\overline{A_3}$；$(A_1A_2)\cup(A_2A_3)\cup(A_1A_3)$.

8. 从 N 件产品中任意抽取 M（$M\leqslant N$）件，设 A 表示“至少有一件次品”，B 表示“至多有一件次品”，则 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 及 AB 各表示什么事件？

9. 检验某种圆柱形产品时，要求长度与直径都符合要求时才算合格品，A=“产品合格”，B=“长度合格”，C=“直径合格”，试讨论：

（1）A 与 B、C 之间的关系；

（2）$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ $\overline{C}$ 之间的关系.

1.2　随机事件的概率

对一个随机事件 A，在一次随机试验中是否会发生，事先不能确定. 人们常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小. 为此，首先引入频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表示事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.