



现代数学丛书

Series in Contemporary
Mathematics

激波反射的 数学分析

陈恕行 / 著

Mathematical Analysis
of Shock Wave Reflection

上海科学技术出版社
Shanghai Scientific & Technical Publishers



现代数学丛书

激波反射的数学分析

陈恕行 著

上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

激波反射的数学分析 / 陈恕行著. —上海: 上海
科学技术出版社, 2018. 11

(现代数学丛书)

ISBN 978-7-5478-4016-0

I. ①激… II. ①陈… III. ①激波反射—数学分析
IV. ①O354.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 103892 号

总 策 划 苏德敏 张 晨
丛书策划 包惠芳 田廷彦
责任编辑 田廷彦
封面设计 赵 军

激波反射的数学分析

陈恕行 著

上海世纪出版股份有限公司 出版
上海科学技术出版社
(上海钦州南路 71 号 邮政编码 200235)

上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海福建中路 193 号 www.ewen.co
上海中华商务联合印刷有限公司印刷
开本 787×1092 1/16 印张 13.5 插页 4
字数 230 千字

2018 年 11 月第 1 版 2018 年 11 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5478-4016-0/O·60
定价: 118.00 元

本书如有缺页、错装或坏损等严重质量问题, 请向工厂联系调换

《现代数学丛书》编委会

主 编

李大潜(LI Tatsien, LI Daqian)

复旦大学数学科学学院, 上海 200433, 中国

编 委

Philippe G. CIARLET

Department of Mathematics, City University of Hong Kong, Hong Kong, China

Jean-Michel CORON

Laboratoire Jaques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, 75252
Paris Cedex 05, France

鄂维南(E Weinan)

Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, NJ08544, USA
北京大学数学科学学院, 北京 100871, 中国

励建书(LI Jianshu)

Department of Mathematics, The Hong Kong University of Science and
Technology, Hong Kong, China

李骏(LI Jun)

Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA

林芳华(LIN Fanghua)

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New
York, NY 10012, USA

马志明(MA Zhiming)

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, 中国

Andrew J. MAJDA

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, NY 10012, USA

Cédric VILLANI

Institut Henri Poincaré, 75231 Paris Cedex 05, France

袁亚湘(YUAN Yaxiang)

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190, 中国

张伟平(ZHANG Weiping)

南开大学陈省身数学研究所, 天津 300071, 中国

助 理

姚一隼(YAO Yijun)

复旦大学数学科学学院, 上海 200433, 中国

前 言

在连续介质 (如流体) 的运动中激波 (或称冲击波) 的产生与传播是一个普遍的物理现象. 例如, 在连续介质中的爆破通常会产生一个激波由爆破源往外传播. 在超过音速的高速飞行物体前方通常也总会有一个激波随之一起运动. 激波的特点是在一个很薄的运动介质薄层中介质的状态发生急剧变化, 从而在激波的前方与后方, 介质的物理参量例如速度、压力、密度、温度等均会有显著的变化. 激波的出现对其周围运动介质的物理状态将会产生极大的影响. 当激波运动遇上障碍物被反射时, 其反射会表现出巨大的威力或破坏力. 因此, 对于激波的生成、传播以及反射过程的深入了解极其重要, 它也往往是相关的工程技术的关键点, 受到特别的关注. 由于激波以及它可能遇到的障碍物类型各异, 所以由激波反射所导致的流场与非线性波结构可以十分复杂, 从而精确地了解激波反射的过程及其所导致的效应既十分重要又相当困难.

通常人们通过理论、实验以及计算三种方法对流体力学的各类问题包括激波运动展开研究. 理论研究提供研究对象的定性特征, 从而为实验与计算研究提供理论支持, 其成果广泛地应用于工程技术. 由于理论研究往往是在许多理想的假定下进行的, 实际问题往往比这些理想的假定条件要复杂得多, 随着科学技术的发展与研究的深入, 对理论研究的要求也越来越高. 例如, 在激波反射问题中当假设入射激波与作为障碍物的表面都是平面时, 现有的理论分析可以准确地给出反射激波的位置以及波后的流动状态. 但一般情形下入射激波与障碍物的表面不是平面, 那时就必须用更深入的数学工具, 将所研究的问题归结为偏微分方程的边值问题来处理. 这时, 关于相应问题解的存在性、稳定性等理论分析成果还是相当欠缺的. 可以说与实验和计算技术相比, 现有的理论研究还相对比较粗糙, 特别是用数学分析方法进行精确理论分析的研究是相对滞后的.

实验或数值计算虽然能提供发展工程技术所需要的数据, 但实验或数值计算

正是在正确的理论指导下展开的. 由于近代工程技术的发展对数据的要求越来越高, 如果能用近代的数学工具提供精确的理论分析, 将能为实验与数值计算提供坚实的理论基础, 或有可能提供新的计算方法, 实质性地增强所获得成果的可靠性. 著名的数学家与力学家 R. Courant 在其名著《超音速流与激波》(*Supersonic Flow and Shock Waves*)^[31] 中这样写: “工程师与物理学家对数学分析结果的信心最终应依赖于证明所得到的解是由问题的资料所唯一决定. 为将本书中所介绍的理论发展到这样一个层次, 使它满足应用的需要, 又符合自然科学发展的要求, 尚需做出巨大的努力.” 这段话应该是对于用数学分析方法对诸多物理问题进行理论研究重要性的很好的诠释.

本书将以偏微分方程为主要工具对激波反射所涉及的数学问题做深入的分析. 我们知道, 激波反射一般是一个运动的过程, 因此它在流体力学问题的研究中属于与时间相关的非定常流问题. 然而, 在特定的条件下, 它可以关于时间是稳定不变的, 或者可以选取跟随质点运动的坐标系使得在此坐标系中激波及其周围流场参量与时间无关, 从而可以作为定常流问题进行讨论. 本书中将先后对定常流与非定常流中的激波反射现象进行讨论.

激波反射现象的一个特点是随着激波入射角的不同, 在反射点附近会出现完全不同的非线性波结构. 通常有类似于线性波反射的正则反射结构与完全不同于前者的含三叉交点的 Mach 结构. 含 Mach 结构的激波反射称为 Mach 反射, Mach 结构的出现, 使得对于激波反射的研究陡增了复杂性. 我们将在本书中对于正则反射与 Mach 反射局部解的存在性与稳定性给予证明, 它对于了解与建立激波反射完整的数学理论是基本的.

激波反射问题的求解不仅与反射点附近的给定条件有关, 它通常还依赖于远处的环境条件, 所以必须研究激波反射问题的整体解. 但由于大范围的条件往往十分复杂且不容易确定, 故整体解的研究也更为困难. 可喜的是, 现在对一些特定的问题的研究已有了一定的进展.

本书第一章先介绍流体力学方程组以及激波的一些基本事项, 它在后续讨论中被反复用到, 其主要内容可以在 [31]、[60] 中找到. 第二章集中讨论激波极线的性质, 这些性质对于研究激波运动的数学分析是必要的, 但以往这些性质的阐述或证明常散见于不同的文献中, 在本书中我们对此做了集中的归纳, 有些性质 (特别是关于位势流方程激波极线的性质) 是第一次明确地提出与证明. 第三章介绍定常激波正则反射的数学分析, 由于这个问题与超音速流对于具尖前缘楔形物体

的绕流问题在数学处理上本质上一致,故在讨论二维空间中定常激波反射问题时采用了 [48] 中发展的方法,在讨论三维空间中定常激波反射问题时采用了 [17] 中发展的方法.第四章介绍定常激波 Mach 反射的数学分析,按物理问题的不同特性可分为 E-E 型的 Mach 反射与 E-H 型的 Mach 反射,这一章的内容主要取自 [19] 与 [24].第五章讨论非定常激波反射的数学分析,其各节内容分别取自 [15]、[10]、[20].第六章中列出了一些尚未解决而颇具挑战性的问题,对激波反射问题的研究今后的发展做了展望. G. Ben-Dor 在其著作《激波反射现象》(*Shock Waves Reflection Phenomena*)一书中详细地介绍与分析了激波反射中出现的各种现象与实验研究成果^[5].从中更可以看到利用以偏微分方程为基础的数学理论对激波反射中诸多问题的研究还处于起步阶段,很多问题有待研究与解决.笔者希望本书的出版能引起读者的兴趣,并为其进入这一研究领域作必要的准备,更期待后续研究能有新的推进.

在本书的写作中笔者还参考了许多其他文献中的方法与成果,均在引用时有所注明.此外,笔者还与学术界同行有过许多讨论,受益匪浅,在此一并表示感谢.然而由于笔者能力与知识的局限,在本书的取材与阐述上仍有很多不足之处.恳切地盼望读者们能给予指正与帮助.

陈恕行

2018 年 2 月 1 日

目 录

第一章	绪论	1
1.1	激波反射问题的物理背景	1
1.2	方程与边界条件	4
1.2.1	Euler 方程组与其简化模型	4
1.2.2	激波、Rankine-Hugoniot 条件	10
1.2.3	熵条件	16
1.2.4	边界条件	22
1.3	平面激波的反射	23
1.3.1	平面激波的正反射	23
1.3.2	平面激波的斜反射	26
第二章	激波极线分析	27
2.1	Euler 方程组的激波极线	27
2.1.1	在 (u, v) 平面上的激波极线	27
2.1.2	在 (θ, p) 平面上的激波极线	33
2.2	位势流方程的激波极线	35
2.3	平面激波反射与 Mach 结构	43
2.3.1	平面激波正则反射	43
2.3.2	Mach 结构	48
第三章	激波正则反射的扰动	54
3.1	二维空间中含超音速反射激波的正则反射	54
3.1.1	角状区域中的边值问题	54
3.1.2	关于具特征边界的自由边值问题的结论	58
3.1.3	等熵无旋流激波反射问题局部解的存在性	59

3.1.4	非等熵流激波反射问题局部解的存在性	61
3.2	三维空间中含超音速反射激波的正则反射	64
3.2.1	预备事项	64
3.2.2	线性化问题及有关的先验估计	72
3.2.3	非线性问题第一近似解的构造	78
3.2.4	Newton 迭代法与非线性问题解的存在性	85
3.3	含跨音速反射激波的正则反射	88
第四章	Mach 反射结构的稳定性	93
4.1	问题的归结与 Mach 结构的分类	93
4.1.1	E-E 型与 E-H 型 Mach 结构	93
4.1.2	方程与边界条件	95
4.2	Lagrange 变换与非线性方程的典则形式	98
4.2.1	定常流的 Lagrange 变换	98
4.2.2	激波边界的处理	101
4.2.3	方程组的分解	103
4.3	E-E 型 Mach 结构导致的线性化问题的估计	105
4.3.1	线性化问题	105
4.3.2	椭圆子问题	106
4.3.3	Sobolev 估计	108
4.3.4	Hölder 估计	111
4.4	迭代过程的收敛性与 E-E 型 Mach 结构的稳定性	114
4.4.1	解非线性问题 (NL) 的迭代过程	114
4.4.2	迭代格式的收敛性	116
4.4.3	自由边值问题解的存在性	117
4.5	E-H 型 Mach 结构的稳定性	120
4.5.1	问题与结论	120
4.5.2	非线性 Lavrentiev-Bitsadze 混合型方程	122
4.5.3	问题的线性化处理	126
4.5.4	线性 Lavrentiev-Bitsadze 方程广义 Tricomi 问题的求解	128
4.5.5	关于非线性问题的结论	135

第五章	非定常流的激波反射	137
5.1	激波被光滑曲面的反射	137
5.1.1	问题的归结	137
5.1.2	化为具固定边界的 Goursat 问题	139
5.1.3	非线性边值问题的求解	141
5.2	平面激波被斜坡的正则反射	144
5.2.1	平面激波被斜坡正则反射问题表述	144
5.2.2	拟超音速区域中流场的确定	148
5.2.3	非线性退化椭圆型方程边值问题	153
5.2.4	椭圆截断	158
5.2.5	非线性迭代格式	159
5.2.6	椭圆正则化	162
5.2.7	非线性退化椭圆边值问题解的存在性	164
5.3	平面激波被斜坡的 Mach 反射	171
5.3.1	问题的陈述	171
5.3.2	平坦 Mach 结构的扰动	174
5.3.3	证明的主要步骤	176
5.3.4	定理 5.4 的证明	187
第六章	进一步研究的问题	188
6.1	完全 Euler 方程组的讨论	188
6.2	三维空间中的激波反射	189
6.2.1	平面激波被弯曲斜坡的反射	189
6.2.2	平面激波被圆锥体的反射	189
6.2.3	三维空间中的 Mach 结构稳定性	190
6.3	大扰动与整体解	191
6.3.1	大扰动问题	191
6.3.2	整体解问题	192
6.4	不同激波反射结构的转换	193
参考文献		195
索引		200

第一章

绪论

激波 (或称冲击波) 的产生与传播是连续介质运动中一个普遍的物理现象. 激波的特点是在一个很薄的薄层中介质的状态发生急剧变化. 如果不考虑介质的黏性, 激波可以被视为一个无厚度的曲面, 而描述介质状态的物理量在激波上发生间断. 如果用偏微分方程为工具来研究介质以及相应激波的运动, 就需要研究刻画介质运动方程的含有待定的间断面的解, 这个间断面将随着方程的解一起确定. 在偏微分方程理论中这种允许未知函数出现间断的解也称为广义解. 对物理现象研究的需求催生了相应的广义解的数学理论的发展. 至今, 描述含激波的连续介质运动的数学理论已成为十分深刻而内容丰富的学科分支.

尽管对激波反射的物理现象已有大量的实验研究与数值模拟, 但相应的数学分析理论研究尚很不够. 本书的主题就是用偏微分方程的理论与方法来研究激波反射问题. 在第一章我们介绍激波反射问题的物理背景, 将其归结为偏微分方程边值问题, 也包括对一些最简单情形的分析. 它们都是后面详细分析展开的基础.

1.1 激波反射问题的物理背景

激波的产生与传播是连续介质运动中一个普遍的物理现象. 例如, 在连续介质中的爆破通常会产生一个激波, 它由爆破源往外传播. 在超过音速的高速飞行物体前方通常也总会有一个激波随着此飞行体一起运动. 激波的特点是在一个很薄的薄层中介质的状态发生急剧的变化, 因而在激波的前方与后方, 介质的物理参量例如速度、压力、密度、温度等均会有显著的变化. 激波的作用或其破坏力常在激波越过物体的瞬间产生, 特别地, 当激波运动遇到障碍物时巨大能量的传递会对障碍物产生破坏作用, 同时激波本身也因为被障碍物反射而改变其运动状态. 所以, 在研究连续介质动力学有可能出现激波的运动中, 人们在考察激波的生成及其传

播的同时，对于激波反射的运动过程也总是加以特别的关注。

在本书中主要讨论气体中的激波运动. 我们将忽略气体的黏性，一般不讨论激波内部的结构，从而将激波视为一个无厚度的曲面. 由于在激波两侧气体的流动参量有明显的变化，所以激波是各种流动参量的间断面. 如果用偏微分方程为工具来研究气体以及相应激波的运动，就需要研究该方程的含有间断的解，且解的间断面是未知的，这个间断面将随着方程的解一起确定。

让我们先以一些典型的例子来了解激波反射的过程. 设在地平面上方有一个爆破源，在某时刻 (设为 $t = 0$) 发生爆破. 如无特别的设计，该爆破将产生一个均匀地扩张的球面激波. 不妨设在 $t = t_0$ 时刻该球面激波碰到地面，并从这一时刻起激波被地面反射 (图 1.1). 在反射初期，即 t 超过 t_0 不多时，反射的图像与线性波反射图像相似 (图 1.2)，这种反射模式称为正则反射. 但由于激波是非线性波，由激波所服从的规律及相关的计算可知，反射激波与地面所成的反射角要大于入射角. 于是，随时间增加，到某一临界时刻 $t = t_1$ 以后，类似于线性波反射的图像将不可能继续保持. 实际的反射图像将如图 1.3 所示. 这时，入射球面激波与反射激波的交点将离开地面一段距离，该交点与地面被另一个激波 (称为 Mach 激波或 Mach 杆) 连接，且同时过此交点还会有其他的非线性波出现. 在图 1.3 中所出现的激波结构称为 Mach 结构，这时出现的激波反射称为 Mach 反射. 这是为纪念 E. Mach 首次发现这种激波反射而命名的. 图 1.3 中出现的 Mach 结构已被理论分析与实验所证实. 它在更复杂的激波反射中还会以各种组合形式出现，从而显著地增加了激波反射研究的困难。

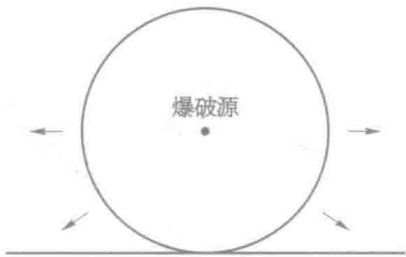


图 1.1 在 $t = t_0$ 时刻，激波接触地面



图 1.2 在 $t_0 < t < t_1$ 时的激波反射 (正则反射)

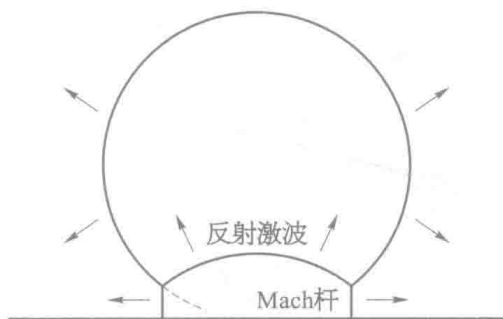


图 1.3 在 $t > t_1$ 时的激波反射 (Mach 反射)

一个高速飞行的飞行体，当速度超过音速时，在其前方会产生一个激波. 该激波将随着飞行体一起运动. 激波遇到地面也会反射. 我们设此飞行体处于稳定常速飞行的状态，也暂不讨论在飞行体前方的激波的形状，只集中注意于激波在地面的反射. 如限于激波与地面相交处某点附近来考察，可以近似地将激波视为平面激波. 与前面一个例子的情况相仿，当激波入射角较小时，激波反射的图像与线性波反射的图像相似，而反射角一般会大于入射角 (图 1.4). 但是，当入射角大于一个临界角时，就会出现 Mach 反射的反射模式：入射波与反射波并不相遇在地面，而是通过一个称为 Mach 杆的激波与地面相连接. 在上述三激波的相交点还会有一个接触间断，它的特性以后会详细描述 (图 1.5).



图 1.4 当入射角较小时的激波反射



图 1.5 当入射角较大时的激波反射

上面两个例子中都描述了激波运动与反射的实际过程. 其中激波的位置是随时间变化的. 但在第二个例子中如果飞行体保持匀速飞行，由于激波始终是平面激波，若我们将坐标系取在激波上从而跟着激波一起运动，则在这样的坐标系中激波就可视为静止的. 此外，由于原先在激波前方的气体处于静止状态，故在新的

坐标系中来看, 该区域的气体也处于等速运动的常态之中, 所以在这一问题所涉及的运动激波反射问题化成一个不依赖时间的定常问题来讨论. 在激波研究的实验中, 人们还能构造真正不依赖时间变化的激波. 这样的激波在遇到静止的障碍物时所引起的反射当然也不随时间而变化. 所以, 与在一般情形对流体运动的研究分成定常运动与非定常运动一样, 在激波反射的研究中也可分成定常激波反射与非定常激波反射的讨论, 它们在本书中都会涉及.

1.2 方程与边界条件

1.2.1 Euler 方程组与其简化模型

前面已说到, 在本书中讨论的气体运动一般都忽略黏性的作用. 无黏可压缩流体运动可以用 Euler 方程组来描述, 该方程组的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} E + p \vec{v}) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

三维空间 (空间坐标为 x, y, z) 中的 Euler 方程组 (1.1) 是含 5 个方程的方程组, 其中 $\rho, \vec{v}, p, E$ 分别表示密度、速度、压力与能量. $\vec{v}$ 的三个分量为 (u, v, w) . 由于这些物理量间还通过一个状态方程相连接, 从而实质的未知函数个数也是 5 个.

能量 E 可以表示为单位质量所具备的内能与动能之和, 即 $E = e(p, \rho) + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2$. 其中内能 $e(p, \rho)$ 是一个给定的 p, ρ 的函数, 它也称为状态方程.

在气体动力学很多问题的讨论中也常引入热力学函数熵 s 或焓 i , 焓与其他流动参量的关系为 $i = e + \frac{p}{\rho}$, 而熵与其他流动参量的关系通过一微分关系来确定:

$$de = Tds - pd\tau. \quad (1.2)$$

其中, T 表示温度, $\tau = \frac{1}{\rho}$ 表示比容, 它是密度的倒数. 将 $E = e + \frac{1}{2}|\vec{v}|^2$ 代入 (1.1) 中最后一式, 并与前两式相消, 可以得到

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (1.3)$$

而将 (1.1) 中的质量守恒律写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0,$$

并将 (1.2) 与 (1.3) 代入上式, 就可以得到

$$T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right) = 0, \quad (1.4)$$

所以, 当诸流动参量均为连续可微函数时, 方程组 (1.1) 可以写成以下等价的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

引进了热力学函数熵以后, 气体的状态方程可以写成 $p = f(\rho, s)$, 且一般有 $f_\rho > 0, f_{\rho\rho} \geq 0$. 例如, 对于一类常见的完全气体, 它的状态方程可以写成

$$p = A(s)\rho^\gamma, \quad (1.6)$$

其中 γ 称为绝热指数, 对于通常的空气来说 $\gamma = 1.4$, 而

$$A(s) = (\gamma - 1) \exp(c_v^{-1}(s - s_0)),$$

式中 c_v 为一个反映气体特性的常数, s_0 是该气体某个特定状态的熵. 实际上, 熵的变化值 $s - s_0$ 才是影响气体运动的量, 而 s_0 的取值对决定气体的运动并不产生影响¹. 对于满足 (1.5) 的完全气体, 又可在熵不变的条件下由 $de = -pd\tau$ 推得

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho},$$

以及进而有

$$i = \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho},$$

从 (1.5) 的最后一式知, 当流动参量为连续可微函数时 (简称为连续流), 熵沿流线为常数. 故如果在所考察的区域中所有流线都从一个熵取常值的区域发出, 则在全区域中熵为常值. 这样的气流称为等熵流. 对于等熵的连续流来说, (1.5) 的最后一个方程自动满足, 故此方程可以分离出去. 但是, 当在所考察区域中出现激波等解

¹关于热力学函数熵的概念与性质, 可参见 [31] 或其他有关著作. 此处从略.

的间断面时, 流体在越过激波时熵值可以变化, 这时 (1.5) 的最后一个方程就不能分离, 必须综合考虑 (1.5) 方程组的求解.

在一些特定的假定下, 方程组 (1.5) 可以有各种简化. 如果压力 p 仅依赖于密度 ρ 单个变量, $p = p(\rho)$, 这样的气体称为正压气体 (barotropic gas). 在考察这类气体的运动时, (1.5) 中最后一个方程可以去掉.

一个重要的刻画气体运动特性的量是旋度 $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$, 对于正压流或等熵流, $p = p(\rho)$, 故 $\frac{1}{\rho} \nabla p$ 的旋度为零. 于是从 (1.5) 可导出

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} + (\operatorname{div} \vec{v}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (1.7)$$

这是一个关于 $\vec{\omega}$ 的线性方程组. 于是, 如果某区域中连续的等熵流的所有流线均来自一个无旋区域, 则该区域中的旋度就恒为零. 特别地, 对于一个封闭区域 (可以是无界区域) 中的连续流动, 如果初始时刻是无旋的, 则以后就一直是无旋的. 旋度为零的气流称为无旋流.

注 1.1 注意, 无旋流并非必定是等熵的. 反之, 仅仅是等熵的条件也不足以推出流动是无旋的. 在上面的论述中可知, 对于一个连续的等熵流, 其所有流线均来自一个无旋区域是该流动为无旋必须满足的条件.

下面给出一个有旋的等熵流的反例. 考虑二维定常流

$$u = y, \quad v = -x, \quad \rho = x^2 + y^2, \quad (1.8)$$

气体的状态方程为 $p = \frac{1}{4} \rho^2$, 则该气流满足

$$\begin{aligned} (\rho u)_x + (\rho v)_y &= (x^2 y)_x + (-xy^2)_y = 0, \\ uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho} p_x &= -x + x = 0, \\ uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho} p_y &= -y + y = 0, \end{aligned}$$

但 $u_y - v_x = 2 \neq 0$. 事实上, 若在平面上画出 (1.8) 所表示的速度场可明显地看到该流体的运动包含有一个旋转.

对于等熵无旋流, 由 $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ 知可以引进速度势 ϕ , 使其满足 $\nabla \phi = \vec{v}$, 此时, 由方程组 (1.5) 的第 2, 3, 4 式可以沿流线积分得到

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + i = C. \quad (1.9)$$

它称为 Bernoulli 关系式. 式中 C 是一个常数, 它沿不同的流线可以是表示不同的常数, i 即前述的热力学函数焓, $i = e + \frac{p}{\rho}$. 在等熵的条件下 $p = p(\rho)$, 则焓容易