

防策略 投票理论的 逻辑研究

孙雯
著

中国社会科学出版社

防策略

投票理论的 逻辑研究

孙雯
著

中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

防策略投票理论的逻辑研究 / 孙雯著. — 北京: 中国社会科学出版社, 2018. 4

ISBN 978-7-5203-2424-3

I. ①防… II. ①孙… III. ①社会选择—逻辑—研究 IV. ①C912.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 085087 号

出版人 赵剑英
责任编辑 韩国茹
责任校对 张爱华
责任印制 张雪娇

出版 中国社会科学出版社
社址 北京鼓楼西大街甲 158 号
邮编 100720
网址 <http://www.csspw.cn>
发行部 010-84083685
门市部 010-84029450
经销 新华书店及其他书店

印刷 北京君升印刷有限公司
装订 廊坊市广阳区广增装订厂
版次 2018 年 4 月第 1 版
印次 2018 年 4 月第 1 次印刷

开本 710×1000 1/16
印张 12.5
插页 2
字数 162 千字
定价 49.00 元



凡购买中国社会科学出版社图书,如有质量问题请与本社营销中心联系调换
电话:010-84083683

版权所有 侵权必究

本书获得“河北省高等学校人文社会科学研究项目 (SD171091)”、“河北师范大学学术著作出版基金项目 (S2016C01)”和“河北师范大学马克思主义学院著作出版基金”资助。

目 录

引 言	(1)
第一章 防策略投票理论概述	(6)
第一节 防策略投票理论的历史综述	(6)
一 对防策略投票理论的关注	(7)
二 防策略投票理论的萌芽及初步形成阶段	(9)
三 防策略投票理论的正式提出及深入发展 阶段	(13)
第二节 防策略投票方法研究概况	(19)
第二章 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票 不可能性定理的证明	(26)
第一节 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票 不可能性定理	(27)
一 符号与定义	(28)
二 线性投票下的 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理	(30)
三 非线性投票下的 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理	(39)
四 一些结论	(40)

第二节 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票

- 不可能性定理的 Saari 方法证明 (45)
- 一 预备知识 (45)
- 二 Saari 方法 (47)
- 三 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性
定理的 Saari 方法证明 (49)
- 四 其他相关属性 (55)

第三节 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票

- 不可能性定理的归纳法证明 (56)
- 一 归纳法记号 (56)
- 二 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性
定理的归纳法证明 (57)
- 三 计算机辅助证明 (62)

第四节 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票

- 不可能性定理证明的反思 (63)

第三章 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票

- 不可能性定理的逻辑刻画 (65)

第一节 基本概念 (66)

第二节 模态逻辑 $S5^m$ (67)

第三节 投票逻辑 (VL) (69)

第四节 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性 定理相关属性的逻辑刻画 (72)

第五节 VL 的不可判定性 (75)

一 公式翻译 (76)

二 模型翻译 (76)

第六节 可判定性特例 (80)

一	公式翻译	(81)
二	模型翻译	(82)
第四章	基于社会选择函数逻辑的防策略投票	
理论	(86)	
第一节	预备知识	(87)
第二节	命题控制联盟逻辑 (CL - PC)	(95)
一	CL - PC 的语言及语义	(96)
二	CL - PC 的演绎系统	(99)
第三节	社会选择函数逻辑 (SCFL)	(101)
一	SCFL 的语言及语义	(101)
二	SCFL 的公理及推理规则	(103)
第四节	防策略投票相关性质的表达	(107)
一	投票	(107)
二	社会选择函数 SCF 的刻画	(108)
三	真实偏好	(110)
四	非独裁	(111)
五	占优策略均衡	(112)
六	单调性	(113)
七	防策略	(114)
第五节	结论和进一步的研究	(116)
第五章	基于多主体策略逻辑的防策略投票理论	(118)
第一节	多主体联盟策略博弈模型	(118)
第二节	投票博弈	(122)
一	投票作为多主体策略博弈	(122)
二	投票博弈中的群体行动	(124)
第三节	多主体策略逻辑 (MASL)	(127)

4 防策略投票理论的逻辑研究

一 MASL 的语言和语义	(127)
二 MASL 的演算	(132)
三 防策略投票相关性质的表达	(133)
四 MASL 与联盟逻辑 (CL) 的联系	(138)
第四节 MASL 的认知扩张——EMASL	(141)
一 EMASL 的语法和语义	(141)
二 EMASL 的演算	(144)
三 相关性质的表达	(145)
第五节 结论和进一步的研究	(147)
附 录	(151)
防操纵社会选择机制逻辑研究述评	(153)
吉伯德 - 萨特思韦特防策略不可能性定理的逻辑 初探	(161)
投票理论阐释的新视角	(172)
参考文献	(186)
后 记	(193)

引言

民主是当今世界各国所广泛接受的价值之一。正如赫尔德所言，民主似乎使得现代政治生活变得合法化了。当论及民主时，人们联想到的往往是选举投票。的确，民主与投票是难解难分的，可以说，民主最直观、最生动和最具体的表现形式就是选举。民主可以视为一种价值目标，投票则是达成这一目标的基本手段。

在一个以市场作为支配机制的时代中，投票是否略显多余？未必是这样。有相当多的问题在决策时需要集体投票来做出选择。例如，对一个政党或委员会候选人的选举，或者更为常见的，对于管理一个健身俱乐部候选人的选择。这类决策是现代社会不可或缺的部分。然而，很多时候，这些决策是错综复杂的，投票人可以通过谎报自己的真实偏好使投票结果发生有利于自己的变化，这就是所谓的“策略投票”。策略投票的后果极其严重，它不仅使集结的群体偏好不能正确反映群体的意愿，而且使谎报偏好者获得某种程度的“奖励”。从社会选择的角度看，“可操纵性”是不应该也不应被提倡的。

如何以透明而合理的方式做出决策呢？是否有防策略的

投票规则呢？答案是肯定的。防策略投票适时而生，它要求投票者不能从谎报他们的真实偏好中获益，进而可以抑制社会选择中的策略投票，促使投票者都投出自己的真实选票，从而使选举结果体现人们的真实意愿，以充分保障社会的公平和正义。

防策略投票理论的真正发展是在 20 世纪 70 年代中后期，其时吉伯德（Gibbard）和萨特思韦特（Satterthwaite）提出了防策略投票不可能性定理。在此之后，出现了大量的数学定理，用来处理和解决投票程序的操纵性，从理论上论证了防策略投票不可能性定理。从本质上讲，Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理意味着任何投票选择程序在一定条件下，要么是可被操纵的，要么是独裁的。这在理论界引起了很大的震动，特别是它对经济领域的资源合理配置理论的存在性和合理性提出了巨大的挑战。因此，对该理论的研究极具吸引力。

近十几年来，防策略投票不可能性定理已经引起了数学、计算机科学、逻辑学以及哲学等领域研究者的广泛注意。越来越多的学者从逻辑形式化的观点和方法，研究如何对社会选择中的问题进行描述并建立模型，进而用计算机程序来自动验证其不可能性定理。另外，还有一些逻辑学家基于模态逻辑，设计出适合的逻辑系统来模型社会选择中的防策略投票问题，或者利用已有的逻辑框架，如一阶逻辑、命题逻辑、高阶逻辑来研究社会选择问题及刻画防策略投票不可能性定理。

从逻辑应用的角度来看，用逻辑来刻画和模型社会选择理论中的种种问题，更加具有实践意义。有鉴于此，本书主

要介绍如何用逻辑的方法有效地刻画社会选择理论中的防策略投票问题。

本书的章节结构和主要内容如下。

第一章是防策略投票理论概述。首先,简要概述防策略投票的理论背景,从投票悖论谈起,到 Arrow 不可能性定理和 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理的提出,从而引起人们对防策略投票问题的关注。其次,系统地梳理了防策略投票理论的发展历史和研究现状。从逻辑的角度,勾勒出防策略投票的发展图景。最后,阐述了避免策略投票的方法,特别概述了在计算机科学中计算复杂性的方法。

第二章研究防策略投票的理论基础——Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理。首先,在集合论的基础上给出投票理论的一般定义,然后详细地论证了线性投票和非线性投票下的 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理,并给出相关结论。其次,介绍 Saari 方法,从新的视角,验证了 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理的正确性。再次,借助于归纳法,证明了特殊情形下的 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理。通过这种方法,我们可以使用计算机来辅助证明不可能性定理以及发现新的不可能性定理或不可能性结果。最后,对 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理的证明进行反思,讨论了其理论意义和实践意义。

第三章对 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理进行了精确的刻画。首先,形式化地给出相关概念。其次,基于模态逻辑 $S5^m$, 提出投票逻辑 VL, 给出其语言和语义。再次,基于 VL, 对 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不

可能性定理进行逻辑刻画。最后,详细讨论 VL 的不可判定性和可判定性特例。

第四章基于社会选择函数逻辑研究防策略投票理论。首先,形式化地给出相关博弈论和社会选择的概念。其次,给出命题控制联盟逻辑 CL-PC 的语言、语义以及其公理系统和推理规则。进而,基于 CL-PC,提出社会选择函数逻辑 SCFL,并给出其语言、语义以及公理和推理规则。再次,基于 SCFL,对投票、社会选择函数、单调性、真实偏好、非独裁、防策略等进行了精确的刻画,并给出防策略和单调性的关系,即 $\vdash \wedge_{scf} [N, K] \text{ MON} \leftrightarrow \text{STRPROOF}$, 并讨论社会选择函数是否防策略这一问题。最后,给出结论并指出进一步的研究方向。

第五章基于多主体策略逻辑研究防策略投票。首先,阐明投票也可以看作多主体策略博弈,并给出多主体策略博弈模型和投票博弈模型。其次,提出多主体策略逻辑 (MASL),给出其语言、语义,并阐明 MASL 是完全的。再次,基于 MASL 表达防策略投票理论中的很多重要的概念,并且讨论 MASL 和 CL 的关系,阐明 CL 和 MASL 是可以转化的。最后,在 MASL 的基础之上进行认知扩张,得到认知多主体策略逻辑 (EMASL),给出 EMASL 的语言和语义,并应用于刻画知道独裁、知道防策略。

在借助逻辑工具对防策略投票问题的研究中,我们发现,逻辑学、计算机科学、社会选择理论等学科以惊人而富有成效的方式相互关联着,可谓“枝枝相覆盖,叶叶相交通”,从而创建了一个跨学科的“视角”。用逻辑的方法来研究防策略社会选择机制,最终完美地刻画和解决防策略投票

问题，从而使其在实践上成为可行的，这在今天具有重要的理论意义和实践意义。然而，对于逻辑学家来说，用现代逻辑模型社会选择中的问题，找到适合的逻辑系统来解决防策略投票问题，仍然还有许多问题亟待解决。但随着更多的新技术被国内外学者所掌握，我们相信，关于防策略投票理论的研究必将逐步丰富起来，并能解决更多的实际问题。

第一章 防策略投票理论概述

“绝对公平的选举是不可能实现的!”当美国经济学家阿罗 (K. J. Arrow) 在 1952 年向全世界发表阿罗不可能性定理时,人们才开始意识到选举系统通常是可以被策略操纵的,从而激发了人们对防策略投票的研究。本章对防策略投票理论进行了概述,笔者的主要工作有以下两个方面:一是以 Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理为核心,回顾了防策略投票思想的发展历史和研究现状,展开对防策略投票理论的概述。二是从如何避免策略投票的角度,梳理了防策略投票的方法。

第一节 防策略投票理论的历史综述

从许多经典文献中可以看出,在每个合理的选举系统中,有些投票者会选择言不由衷。合理的选举系统通常是可以被操纵的。投票者如果知道社会决策的规则,或许可以通过误报或显示虚假的信息来获得更有利的结果,从而达到对社会选择规则的策略操纵。因此,我们说策略操纵是一个普遍存在的问题。那么在投票中是否可以避免策略操纵以及如

何避免策略操纵,即防策略投票的研究。防策略投票理论起始于20世纪70年代中后期吉伯德和萨特思韦特提出防策略投票不可能性定理之后。

一 对防策略投票理论的关注

投票无疑是最常见的偏好聚合问题,投票选举作为一种群的偏好集结方法,一直是人们最重要的解决有差别的个人偏好成为社会偏好的常用方式。然而,在多数规则下,每个人均按照他的偏好来投票。大多数人是偏好 X 胜于 Y ,同样大多数人也是偏好 Y 胜于 Z ,按照逻辑上的一致性,这种偏好应当是可以传递的,即大多数人偏好 X 胜于 Z 。但实际上,大多数人偏好 Z 胜于 X 。因此,以投票的多数规则来确定社会或集体的选择会产生循环的结果。结果,在这些选择方案中,没有一个能够获得多数票而通过,这就是著名的“投票悖论”(paradox of voting)。那么,能不能设计出一个消除循环投票,做出合理决策的投票方案呢?20世纪50年代,阿罗指出,社会福利函数在满足一些合理性条件的前提下将不存在,具体来讲,社会福利函数应满足如下四个条件:

无限制定义域(unrestricted domain)表示映射 f 的定义域包括了 X 上的所有逻辑可能的 n 元组的个人排序。

无关选项相独立(independence of irrelevant alternatives,也称为独立性原则)表示社会福利函数的结果中候选者 x 和 y 的排序只与投票者们对 x 和 y 的态度有关,而与投票者对其他候选者的态度无关。

帕累托最优原则(pareto principle,也称为一致性原则)表示如果所有选民都认为候选者 x 优于候选者 y ,则 y 一定不

是最终的胜者。

非独裁者 (non-dictator) 表示对于 f 的定义域中所有的组合和所有在 X 上的每对选择 x 和 y , 社会不存在个体 i 使得如果有 xP_iy , 那么有 xPy 。

但是如果供选方案不少于三个, 满足这些条件的任何理性群体决策将不存在。也即, 同时满足无限制原则 (U)、独立性原则 (I)、一致性原则 (P)、非独裁原则 (D) 这 4 条公理要求的民主决策的规则是不存在的, 就是著名的“阿罗不可能性定理” (Arrow's impossibility theorem)。

阿罗采用数学的方法、符号化的公理和数理逻辑的证明方法, 说明依靠简单多数的投票原则, 要在各种个人偏好中选择出一个共同认可的顺序, 是不可能的。如果供选方案的事件个数不小于 3, 那么就不存在任何遵循原则 U、P、I、D 的规则。这表明满足所有一般条件的民主选择要么是强加的, 要么就是独裁的结果。这样, 要想借助于投票过程来达到协调一致的集体选择结果, 一般是不可能的。这个结论是令人震动的: 一个社会不可能有完全的每个个人的自由——否则将导致独裁; 一个社会也不可能实现完全的自由经济——否则将导致垄断。

继而学者们围绕化解阿罗不可能性定理, 使“不可能”成为“可能”, 进行了大量研究, 但却出现了许多问题亟待解决。现实生活中, 人们为了获得更大的利益, 往往通过控制、贿赂和操纵的策略行为来改变投票选举的结果。^① 如通

^① Faliszewski P., *Manipulation of Elections: Algorithms and Infeasibility Results*, University of Rochester, 2008, p. 941.

过引入新的投票者或招募候选人,投票者甚至可能会以某种方式来收买投票或投出虚假的选票以便操纵选举,这可能会产生更有利的结果。^①

因此,人们对防策略投票的研究产生了特别浓厚的兴趣并继续深入地发展起来。20 世纪 70 年代以来, Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理确立后,人们对如何避免策略操纵,即防策略投票问题开始了广泛的研究。在此之后,出现了大量的数学定理,用来处理和解决投票程序的操纵性,并从理论上论证了防策略投票不可能性定理。

防策略投票社会选择机制设计的目的,一是为了抑制社会选择中的“策略投票”,避免个人欺骗;二是防止垄断的出现。然而,社会选择中各成员之间因各种原因会形成联盟,决策时联盟中各成员根据集体意志采取行动,而非单纯的个人偏好。因此,在存在利益集团的情况下,选择规则的防策略性等问题仅依靠社会选择理论本身难以完成,有鉴于此, Gibbard - Satterthwaite 防策略投票不可能性定理引起了数学、计算机科学、逻辑学以及哲学等领域研究者的广泛关注。

二 防策略投票理论的萌芽及初步形成阶段

国外在 13 世纪就开始对投票问题进行研究,其代表人物主要有罗曼·勒尔 (Roman Lull) 和诺奥赖斯·卡萨努斯 (Nuolas Cusanus)。他们各自提出了自己的选举方法,也注意到了选举程序中的策略投票问题。1283 年,勒尔指出人们的

^① Faliszewski P., Hemaspaandra E. and L. A. “Hemaspaandra, Using Complexity to Protect Elections”, *Communications of the ACM*, 2010. 53 (11), pp. 74 - 82.