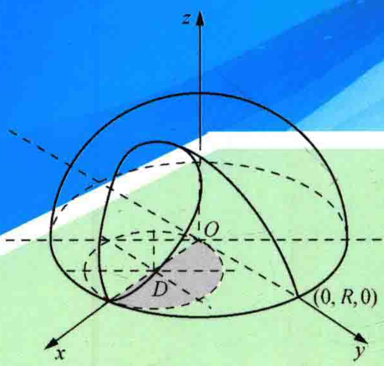
21世纪应用型本科院校规划教材

主 编 范新华 陈荣军

数学建模

SHUXUEJIANMO



南京大学出版社

21世纪应用型本科院校规划教材

数学建模

主 编 范新华 陈荣军

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模 / 范新华，陈荣军主编. — 南京 ：南京大学出版社，2018.1

21 世纪应用型本科院校规划教材

ISBN 978-7-305-19848-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①范… ②陈… Ⅲ. ①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 006963 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　　邮　编　210093
出 版 人　金鑫荣

丛 书 名　21 世纪应用型本科院校规划教材
书　　名　数学建模
主　　编　范新华　陈荣军
责任编辑　陈亚明　王南雁　　　编辑热线　025-83593962

照　　排　南京南琳图文制作有限公司
印　　刷　常州市武进第三印刷有限公司
开　　本　787×960　1/16　印张 18.5　字数 274 千
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-19848-9
定　　价　43.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

内容提要

数学建模是一种数学的思考方法，也是用数学语言描述实际现象的过程. 它是运用数学的语言和方法，通过抽象，简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种强有力的数学手段.

本书是作者根据多年数学建模教学与数学建模竞赛辅导工作的经验编写而成，所选案例具有代表性，注重从不同侧面反映数学思想在实际问题中的灵活应用，同时介绍Matlab、Lingo、Excel、SPSS等数学软件的应用，既注重软件与算法原理的通俗性，也注重软件与算法应用的实现性. 定位服务于应用型本科院校的教学需要.

本书题型设置丰富，内容选择得当. 具体包括数学模型概论、初等模型、微分方程模型、随机模型、运筹学模型、统计类模型、管理学模型、数学建模软件八个章节. 本书既可以作为数学建模课程教材和辅导书，也可以作为本科生、研究生学习和准备全国大学生数学建模竞赛的参考书. 每章内容有同步练习并附有习题解答.

由于水平有限，书中错误难免，望读者批评指正.

目　录

第一章 数学模型概论

近半个世纪以来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，而且以空前的广度和深度向经济、管理、金融、生物、医学、环境、地质、人口、交通等新的领域渗透，所谓数学技术已经成为当代高新技术的重要组成部分. 数学是研究现实世界数量关系和空间形式的科学，在它产生和发展的历史长河中，一直是和各种各样的应用问题紧密相关的. 数学理论与方法的扩充，使数学已经成为一种能够普遍实施的技术. 培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面. 数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，还在于它应用的广泛性.

§1.1 什么是数学模型

模型是把对象实体通过适当的过滤，用适当的表现规则描绘出的简洁的模仿品. 通过这个模仿品，人们可以了解到所研究实体的本质，而且在形式上便于人们对实体进行分析和处理.

模型是人们十分熟悉的东西，例如：玩具、照片及展览会里的电站模型、火箭模型等实物模型；地图、电路图、分子结构图等经过一定抽象的符号模型；大型水箱中的舰艇模型、风洞中的飞机模型等物理模型.

数学模型(Mathematical Model)是一种模拟，是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻画，它或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义

下的最优策略或较好策略. 数学模型一般并非现实问题的直接翻版,它的建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察和分析,又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识. 这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模(Mathematical Modeling).

不论是用数学方法在科技和生产领域解决哪类实际问题,还是与其他学科相结合形成交叉学科,首要的和关键的一步是建立研究对象的数学模型,并加以计算求解(通常借助计算机);数学建模和计算机技术在知识经济时代的作用可谓是如虎添翼.

数学建模简单的讲就是将实际问题变为用数学语言描述的数学问题的过程. 其中对应的数学问题就是数学模型,人们通过对该数学模型的求解可以获得相应实际问题的解决方案或对相应实际问题有更深入的了解. 数学建模问题不只是一个纯数学的问题. 以 2001 年全国大学生数学建模竞赛考题为例,该年出了两个赛题让参赛队在其中任选一个来做. 这两个赛题是:血管的三维重建问题和公交车调度问题. 前一个题目是生物医学方面的问题,它除了形态医学知识之外,还涉及到几何学中的包络线知识、数据处理知识、计算机图象处理知识和计算机编程等;第二个题目涉及概率统计知识、数据采集、数据处理知识、计算机仿真及计算机编程知识等. 再看看以前各届国内外数学建模试题,更是五花八门. 有动物保护、施肥方案、抓走私船的策略、应急设施的选址等等. 实际上,熟悉科学研究的人会发现数学建模正是科学研究工作者及在读研究生要完成毕业论文要做的工作. 由于数学建模具有可以培养解决实际问题能力的特点,因此,了解和学习数学建模知识对渴望提高自身科研素质的人们无疑是很有帮助的.

数学建模就是通过计算得到的结果来解释实际问题,并接受实际的检验,来建立数学模型的全过程. 当需要从定量的角度分析和研究一个实际问题时,人们就要在深入调查研究、了解对象信息、作出简化假设、分析内在规律等工作的基础上,用数学的符号和语言作表述来建立数学模型.

数学建模是一种数学的思考方法,是运用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并"解决"实际问题的一种强有力的数学手段. 数学建模

就是用数学语言描述实际现象的过程. 这里的实际现象既包涵具体的自然现象比如自由落体现象，也包含抽象的现象比如顾客对某种商品所取的价值倾向. 这里的描述不但包括外在形态、内在机制的描述，也包括预测、试验和解释实际现象等内容.

我们也可以这样理解，数学模型一般是实际事物的一种数学简化. 它常常是以某种意义上接近实际事物的抽象形式存在的，但它和真实的事物有着本质的区别. 要描述一个实际现象可以有很多种方式，比如录音，录像，比喻，传言等等. 为了使描述更具科学性，逻辑性，客观性和可重复性，人们采用一种普遍认为比较严格的语言来描述各种现象，这种语言就是数学. 使用数学语言描述的事物就称为数学模型. 有时候我们需要做一些实验，但这些实验往往用抽象出来的数学模型作为实际物体的代替而进行相应的实验，实验本身也是实际操作的一种理论替代. 应用数学去解决各类实际问题时，建立数学模型是十分关键的一步，同时也是十分困难的一步. 建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程. 要通过调查、收集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题. 这就需要深厚扎实的数学基础，敏锐的洞察力和想象力，对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面. 数学建模是联系数学与实际问题的桥梁，是数学在各个领域广泛应用的媒介，是数学科学技术转化的主要途径，数学建模在科学技术发展中的重要作用越来越受到数学界和工程界的普遍重视，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一.

今天，在国民经济和社会活动的以下诸多方面，数学建模都有着非常具体的应用.

分析与设计。例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效；建立跨音速空气流和激波的数学模型，用数值模拟设计新的飞机翼型.

预报与决策。生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报等等，都要有预报模型. 使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案，是决策模型的例子.

控制与优化。电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化，要以数学模型为前提.建立大系统控制与优化的数学模型，是迫切需要和十分棘手的课题.

规划与管理。生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度，以及排队策略、物资管理等，都可以用运筹学模型解决.

§1.2 数学建模的一般步骤

1. 模型准备

了解问题的实际背景，明确其实际意义，掌握对象的各种信息.以数学思想来包容问题的精髓，数学思路贯穿问题的全过程，进而用数学语言来描述问题.要求符合数学理论，符合数学习惯，清晰准确.

2. 模型假设

根据实际对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的简化，并用精确的语言提出一些恰当的假设.

3. 模型建立

在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻划各变量、常量、之间的数学关系，建立相应的数学结构(尽量用简单的数学工具).

4. 模型求解

利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算(或近似计算).

5. 模型分析

对所要建立模型的思路进行阐述，对所得的结果进行数学上的分析.

6. 模型检验

将模型分析结果与实际情形进行比较,以此来验证模型的准确性、合理性和适用性.如果模型与实际较吻合,则要对计算结果给出其实际含义,并进行解释.如果模型与实际吻合较差,则应该修改假设,再次重复建模过程.

7. 模型应用与推广

应用方式因问题的性质和建模的目的而异.而模型的推广就是在现有模型的基础上对模型有一个更加全面,考虑更符合现实情况的模型.

下面举个例子加以说明.

数学建模乍一听起来似乎很高深,但实际上并非如此.例如,在中学的数学课程中我们在作应用题而列出的数学式子就是简单的数学模型,而作题的过程就是在进行简单的数学建模.下面我们用一道代数应用题求解过程来说明数学建模的步骤.

例题:一个笼子里装有鸡和兔若干只,已知它们共有 8 个头和 22 只脚,问该笼子中有多少只鸡和多少只兔?

解:设笼中有鸡 x 只,有兔 y 只,由已知条件有

$$x+y=8$$

数学模型

$$2x+4y=22$$

求解以上二元方程后,得解 $x=5$,$y=3$,即该笼子中有鸡 5 只,有兔 3 只.将此结果代入原题进行验证可知所求结果正确.

根据例题可以得出如下的数学建模步骤:

(1) 根据问题的背景和建模的目的做出假设(本题隐含假设鸡兔是正常的,畸形的鸡兔除外)

(2) 用字母表示要求的未知量

(3) 根据已知的常识列出数学式子或图形(本题中常识为鸡兔都有一个头且鸡有 2 只脚,兔有 4 只脚)

(4) 求出数学式子的解

(5) 验证所得结果的正确性

如果想对某个实际问题进行数学建模,通常要先了解该问题的实际背景和建模目的,尽量弄清要建模的问题属于哪一类学科的问题,然后通过互联网或图书馆查找搜集与建模要求有关的资料和信息为接下来的数学建模做准备.这一过程称为模型准备.由于人们所掌握的专业知识是有限的,而实际问题往往是多样和复杂的,模型准备对做好数学建模问题是非常重要的.

一个实际问题会涉及到很多因素,如果把涉及的所有因素都考虑到,既不可能也没必要,而且还会使问题复杂化导致建模失败.要想把实际问题变为数学问题还要对其进行必要合理的简化和假设,这一过程称为模型假设.在明确建模目的和掌握相关资料的基础上,去除一些次要因素.以主要矛盾为主来对该实际问题进行适当的简化并提出一些合理的假设可以为数学建模带来方便使问题得到解决.一般,所得建模的结果依赖于对应的模型假设,究竟模型假设到何种程度,要根据经验和具体问题决定.在整个建模过程中,模型假设可以在模型的不断修改中逐步完善的.

有了模型假设后,就可以选择适当的数学工具并根据已知的知识和搜集的信息来描述变量之间的关系或其他数学结构(如数学公式、定理、算法等)了,这一过程称为模型构成.做模型构成时可以使用各种各样的数学理论和方法,必要时还要创造新的数学理论和方法,但要注意的是在保证精度的条件下尽量用简单的数学方法是建模时要遵循的一个原则.要求建模人对所有数学学科都精通是做不到的,但做到了解这些学科能解决哪一类问题和大体上怎样解决的方法对开阔思路是很有帮助的.此外,根据不同对象的一些相似性,借用某些学科中的数学模型,也是模型构成中常使用的方法.模型构成是数学建模的关键.

在模型构成中建立的数学模型可以采用解方程、推理、图解、计算机模拟、定理证明等各种传统的和现代的数学方法对其进行求解,其中有些可以用计算机软件来做这些工作.建模的目的是解释自然现象、寻找规律以解决实际问题.要达到此目的,还要对获得结果进行数学上的分析,如分析变量之间的依赖关系和稳定状况等,这一过程称为模型求解与分析.

把模型在数学上分析的结果与研究的实际问题做比较以检验模型的合理性称为模型检验. 模型检验对建模的成败是很重要的，如果检验结果不符合实际，应该修改补充假设或改换其他数学方法重新做模型构成. 通常，一个模型要经过如此多次反复修改才能得到满意结果.

利用建模中获得的正确模型对研究的实际问题给出预报或对类似实际问题进行分析、解释和预报，以供决策者参考称为模型应用.

上面的论述可以用如下图示说明数学建模的一般步骤

模型准备⇒模型假设⇒模型建立⇒模型求解与分析⇒模型检验⇒模型应用

要指出的是上述数学建模的一般步骤中的每个过程不必在每个建模问题中都要出现，而且有时各个过程之间没有明显的界限，因此，在建模中不必在形式上按部就班，只要反映出建模的特点即可.

§1.3　数学模型的分类

数学模型的分类方法多种多样，由不同的出发点数学模型可以有不同的分类方法.

1. 根据人们对问题的认识程度分类：分为白箱模型、灰箱模型和黑箱模型. 它们分别意味着人们对原型的内在机理了解清楚、不太清楚和不清楚.

2. 按照模型的应用领域分类：可分为人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型等. 范畴更大一些则形成许多边缘学科如生物数学、医学数学、地质数学、数量经济学、数学社会学等.

3. 按照建立模型的方法分类：可分为如初等数学模型、几何模型、微分方程模型、图论模型、马氏链模型、规划论模型等.

4. 按照模型系统是否确定分为：确定性模型和随机性模型，这取决于是

否考虑随机因素的影响.

5. 按照建模目的分类:可分为描述模型、分析模型、预报模型、优化模型、决策模型、控制模型等.

6. 按照对模型的了解程度分类:有所谓白箱模型、灰箱模型、黑箱模型等.

7. 按建模系统变量是否随时间变化分类:分为静态模型和动态模型.这取决于是否考虑时间因数引起的变化.

8. 按建模系统有无反馈分类:分为开环系统模型和闭环系统模型.开环系统指系统的输出端和输入端之间无反馈回路.闭环系统指系统的输出端和输入端之间有反馈回路.

9. 按系统中参数变化是否连续分类:分为连续系统模型与离散系统模型,连续系统指系统中状态随时间连续变化.离散系统指系统的状态变化只在离散时刻点上发生.

10. 按系统是否为线性分类;分为线性系统与非线性系统,线性系统是指用线性微分方程描述的系统.非线性系统指用非线性微分方程描述的系统.

§1.4 数学建模十大算法

1. 蒙特卡罗算法(该算法又称随机性模拟算法,是通过计算机仿真来解决问题的算法,同时可以通过模拟来检验自己模型的正确性,是比赛时必用的方法).

2. 数据拟合、参数估计、插值等数据处理算法(比赛中通常会遇到大量的数据需要处理,而处理数据的关键就在于这些算法,通常使用 Matlab 作为工具).

3. 线性规划、整数规划、多元规划、二次规划等规划类问题(建模竞赛大多数问题属于最优化问题,很多时候这些问题可以用数学规划算法来描述,通常使用 Lindo、Lingo 进行处理).

4. 图论算法(这类算法可以分为很多种,包括最短路、网络流、二分图等算法,涉及到图论的问题可以用这些方法解决,需要认真准备).

5. 动态规划、回溯搜索、分治算法、分支定界等计算机算法(这些算法是算法设计中比较常用的方法,很多场合可以用到竞赛中).

6. 最优化理论的三大非经典算法:模拟退火法、神经网络、遗传算法(这些问题是用来解决一些较困难的最优化问题的算法,对于有些问题非常有帮助,但是算法的实现比较困难,需慎重使用).

7. 网格算法和穷举法(网格算法和穷举法都是暴力搜索最优的算法,在很多竞赛题中有应用,当重点讨论模型本身而轻视算法的时候,可以使用这种暴力方案,最好使用一些高级语言作为编程工具).

8. 一些连续离散化方法(很多问题都是实际来的,数据可以是连续的,而计算机只认的是离散的数据,因此将其离散化后进行差分代替微分、求和代替积分等思想是非常重要的).

9. 数值分析算法(如果在比赛中采用较低级语言进行编程的话,那一些数值分析中常用的算法比如方程组求解、矩阵运算、函数积分等算法就需要额外编写库函数进行调用).

10. 图象处理算法(赛题中有一类问题与图形有关)这些图形如何展示以及如何处理就是需要解决的问题,通常使用 Matlab 进行处理).

习题一

1. 数学建模的一般步骤是什么?
2. 数学建模有几种分类方法? 怎么分类?
3. 数学建模的算法有哪些?

第二章　初等模型

本章将研究如何用简单的方法建立数学模型，解决某些实际问题。采用简单的初等方法建模，容易被人们理解、接受和采用，也有更广泛的应用价值.初等模型可以用初等数学方法加以求解，对所述问题进行定性或定量分析，常用方法有图解法、比例法、初等代数法与量纲分析法等.

§2.1　椅子摆放问题

椅子能在不平的地面上放稳吗？下面用数学建模的方法解决此问题.把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而，只需要稍微挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了，可用数学工具证实吗？

1. 模型准备

仔细分析本问题的实质，发现本问题与椅子腿、地面及椅子腿和地面是否接触有关.如果把椅子腿看成平面上的点，并引入椅子腿和地面距离的函数关系就可以将问题 1 与平面几何和连续函数联系起来，从而可以用几何知识和连续函数知识来进行数学建模.为讨论问题方便，我们对问题进行简化，先做出如下 3 个假设：

2. 模型假设

(1) 椅子的四条腿一样长，椅子脚与地面接触可以视为一个点，四脚连线是正方形(对椅子的假设).

(2) 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不出现间断(对地面的假设).

(3) 椅子放在地面上至少有三只脚同时着地(对椅子和地面之间关系的假设).

根据上述假设结论本问题的模型构成:

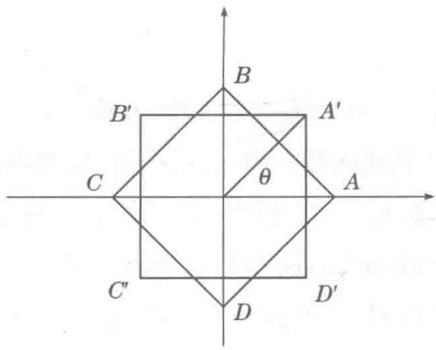


图 2-1　椅子旋转示意图

3. 模型构成

用变量表示椅子的位置,引入平面图形及坐标系如图 2-1. 图中 A、B、C、D 为椅子的四只脚,坐标系原点选为椅子中心,坐标轴选为椅子的四只脚的对角线. 于是由假设 2,椅子的移动位置可以由正方形沿坐标原点旋转的角度 θ 来唯一表示,而且椅子脚与地面的垂直距离就成为 θ 的函数. 注意到正方形的中心对称性,可以用椅子的相对两个脚与地面的距离之和来表示这对应两个脚与地面的距离关系,这样,用一个函数就可以描述椅子两个脚是否着地情况. 本题引入两个函数即可以描述椅子四个脚是否着地情况. 记函数 $f(\theta)$ 为椅脚 A 和 C 与地面的垂直距离之和. 函数 $g(\theta)$ 为椅脚 B 和 D 与地面的垂直距离之和. 则显然有 $f(\theta)\geqslant 0$、$g(\theta)\geqslant 0$,且它们都是 θ 的连续函数(假设 2). 由假设 3,对任意的 θ,有 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 至少有一个为 0,不妨设当 $\theta=0$ 时,$f(0)>0$、$g(0)=0$,故问题 1 可以归为证明如下数学命题: