

形状可调的 参数曲线曲面造型 方法研究

XINGZHUANG KETIAO DE
CANSHU QUXIAN QUMIAN ZAOXING FANGFA YANJIU

李军成 ● 著



西南交通大学出版社

湖南人文科技学院优秀学术著作出版资助

形状可调的参数曲线曲面 造型方法研究

李军成 © 著

西南交通大学出版社

· 成都 ·

图书在版编目 (C I P) 数据

形状可调的参数曲线曲面造型方法研究 / 李军成著.

—成都: 西南交通大学出版社, 2018.5

ISBN 978-7-5643-6162-4

I. ①形… II. ①李… III. ①曲线②曲面 IV.

①O123.3②O186.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 084989 号

形状可调的参数曲线曲面造型方法研究

李军成 著

责任编辑 张宝华

封面设计 何东琳设计工作室

印张 12.5 字数 240千

成品尺寸 170 mm × 230 mm

版次 2018 年 5 月第 1 版

印次 2018 年 5 月第 1 次

印刷 四川森林印务有限责任公司

书号 ISBN 978-7-5643-6162-4

出版发行 西南交通大学出版社

网址 <http://www.xnjdcbs.com>

地址 四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼

邮政编码 610031

发行部电话 028-87600564 028-87600533

定价 68.00元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

作者简介

李军成，博士，副教授。现为湖南人文科技学院专任教师、中国工业与应用数学学会几何设计与计算专业委员会委员、湖南省普通高校青年骨干教师、湖南省数学会理事。主要研究方向为计算机辅助几何设计及其应用、数学建模等。主持湖南省自然科学基金项目2项、湖南省教育厅资助科研项目2项，在国内外学术刊物上发表论文近40篇，其中SCI、EI收录16篇、CSCD期刊论文17篇。

前 言

参数曲线曲面造型作为计算机辅助几何设计 (CAGD) 中最为活跃, 同时也是最为关键的学科分支之一, 长期以来都是重要的研究课题. 在参数曲线曲面造型中, 传统的 Ferguson 曲线、Coons 曲面、Bézier 曲线曲面和 B 样条曲线曲面等方法在表示曲线曲面时存在以下两点不足: 一是在给定边界条件或控制顶点时曲线曲面的形状不能修改或调整, 二是在表示工程中一些常见的圆锥曲线曲面或超越曲线曲面时显得无能为力. 虽然非均匀有理 B 样条 (NURBS) 曲线曲面能精确表示圆锥曲线曲面, 且其形状可通过权因子进行适当调整, 但 NURBS 方法采用了有理形式表示曲线曲面, 而且每个控制顶点都需要一个权因子, 在定义曲线曲面时需要较多的存储空间, 而且其权因子与参数化问题至今仍未完全解决, 这使得 NURBS 在曲线曲面造型中的应用优势难以充分发挥.

近年来, 为了克服传统参数曲线曲面造型方法的不足, 国内外许多学者开始建立较为实用的参数曲线曲面造型方法, 其中带形状参数的曲线曲面造型方法成为研究的热点之一. 目前, 带形状参数的曲线曲面造型方法主要有带形状参数的多项式曲线曲面、带形状参数的非多项式曲线曲面、带形状参数的奇异混合曲线曲面等类型. 相对于传统的参数曲线曲面造型方法, 这些带形状参数的曲线曲面在形状修改或调整方面具有独特的优势, 有些曲线曲面还能精确表示工程中一些常见的圆锥曲线曲面或超越曲线曲面, 因此在实际工程中具有广阔的应用前景.

自 2007 年以来, 笔者一直从事带形状参数的曲线曲面造型方法及其应用的研究. 为了与国内外同行分享研究成果, 笔者总结了近十年来的研究工作, 整理成此书以奉献给读者.

本书共分五章, 内容主要包括:

(1) 经典的参数曲线曲面造型方法. 主要对 Ferguson 方法、Coons 方法、Bézier 方法、B 样条方法以及非均匀有理 B 样条 (NURBS) 方法等经典的参数曲线曲面造型方法进行了简要介绍.

(2) 基于区间扩展法的形状可调多项式曲线. 通过将一些经典多项式参数

曲线的定义区间扩展为动态区间,构造了多种带形状参数的同次多项式曲线,主要包括带形状参数的三次 Ferguson 曲线、带形状参数的同次 Bézier 曲线、带形状参数的三次均匀 B 样条曲线以及带形状参数的三次 Catmull-Rom 样条曲线。

(3) 基于升次法的形状可调多项式曲线曲面. 通过提高经典多项式曲线曲面的次数构造了多种带形状参数的多项式曲线曲面, 主要包括带形状参数的四次 Hermite 样条曲线曲面、自动满足 C^2 连续的带形状参数五次 Hermite 样条曲线曲面、带形状参数的拟二次与拟三次 Bézier 曲线、形状可调的五次组合样条曲线曲面以及带形状因子的 C^2 连续五次 Cardinal 样条曲线曲面与 Catmull-Rom 样条曲线曲面。

(4) 基于重新参数化的形状可调有理曲线曲面. 通过对三次有理 Bézier 曲线和双三次 Coons 曲面进行重新参数化, 构造了带形状参数的拟三次有理 Bézier 曲线和双三次有理 Coons 曲面。

(5) 形状可调的三角与双曲曲线曲面. 通过改变传统多项式参数曲线曲面的基空间, 在带三角与双曲函数的空间中构造了多种形状可调的参数曲线曲面, 主要包括形状可调的三次三角 Hermite 插值样条、自动满足 C^2 连续的形状可调三次三角 Hermite 插值样条、形状可调的类三次三角 Bézier 曲线、形状可调的 C^2 连续类三次三角样条曲线曲面、形状可调的三次三角伪 B 样条以及形状可调的 Coons 型非多项式曲面。

这些年来本人所取得的研究成果, 离不开硕士导师——三峡大学宋来忠教授与博士导师——南京航空航天大学赵东标教授的帮助与指导, 也离不开湖南人文科技学院的刘成志、杨炼两位主要合作者的辛苦付出, 更离不开家人的理解与支持, 在此对他(她)们表示衷心的感谢。

在研究过程中, 得到了湖南省自然科学基金资助项目(13JJ6081, 2017JJ3124)、湖南省教育厅资助科研项目(11C0707, 14B099)的资助, 在此表示感谢。

湖南人文科技学院优秀学术著作出版经费、湖南省自然科学基金资助项目(2017JJ3124)资助了本书的出版, 为本书的面市提供了强有力的支持。

最后还要说明的是, 虽然我尽了最大努力, 但限于水平, 书中难免存在缺点甚至是错误, 恳请广大读者批评指正。

李军成

2017年12月

文軌車書
交通天下

<http://www.xnjdcbs.com>

目 录

第 1 章 经典的参数曲线曲面造型方法	001
1.1 Ferguson 方法	001
1.2 Coons 方法	002
1.3 Bézier 方法	003
1.3.1 Bézier 曲线	003
1.3.2 有理 Bézier 曲线	005
1.4 B 样条方法	006
1.5 NURBS 方法	009
1.6 三次 Cardinal 样条与 Catmull-Rom 样条	009
1.7 小 结	011
参考文献	011
第 2 章 基于区间扩展法的形状可调多项式曲线	013
2.1 三次经典参数曲线的区间扩展	013
2.1.1 Ferguson 曲线的区间扩展	013
2.1.2 三次 Bézier 曲线的区间扩展	016
2.1.3 三次均匀 B 样条曲线的区间扩展	019
2.1.4 三次 α -曲线之间的关系	025
2.2 带两个形状参数的同次 Bézier 曲线	026
2.2.1 $\alpha\beta$ -Bernstein 基函数	026
2.2.2 $\alpha\beta$ -Bézier 曲线定义及其性质	030
2.2.3 形状参数对 $\alpha\beta$ -Bézier 曲线的影响	032
2.2.4 $\alpha\beta$ -Bézier 曲线的拼接	037
2.3 三次 Catmull-Rom 样条曲线的区间扩展	040
2.3.1 三次 α -Catmull-Rom 样条基函数	040
2.3.2 三次 α -Catmull-Rom 样条曲线	043
2.3.3 三次 α -Catmull-Rom 样条插值函数	047

2.4 小 结	051
参考文献	051
第 3 章 基于升次法的形状可调多项式曲线曲面	054
3.1 带形状参数的四次 Hermite 参数曲线曲面与插值样条	054
3.1.1 带形状参数的四次 Hermite 基函数	055
3.1.2 四次 Hermite 参数曲线	056
3.1.3 四次 Hermite 参数曲面	060
3.1.4 带形状参数的四次 Hermite 插值样条	062
3.1.5 四次 Hermite 插值样条曲面	066
3.2 自动满足 C^2 连续的带形状参数五次 Hermite 插值样条	067
3.2.1 带形状参数的五次 Hermite 基函数	067
3.2.2 带形状参数的五次 Hermite 插值样条曲线	069
3.2.3 样条曲线形状参数的最优取值	071
3.2.4 带形状参数的五次 Hermite 插值样条曲面	074
3.3 带参数的 C^3 连续分段七次 Hermite 插值样条	075
3.3.1 七次 Hermite 基函数	076
3.3.2 分段七次 Hermite 参数样条曲线	077
3.3.3 分段七次 Hermite 样条插值函数	086
3.4 带形状参数的拟二次与拟三次 Bézier 曲线	090
3.4.1 拟二次 Bézier 曲线	090
3.4.2 拟三次 Bézier 曲线	095
3.5 带形状参数的五次组合样条及其参数选择	100
3.5.1 带形状参数的基函数	100
3.5.2 带参数的五次组合样条曲线	101
3.5.3 五次组合样条曲线的参数选择	105
3.5.4 带参数的五次组合样条曲面	107
3.6 带形状参数的五次 Cardinal 样条与 Catmull-Rom 样条	110
3.6.1 五次 Cardinal 样条基函数	110
3.6.2 五次 Cardinal 样条曲线	111
3.6.3 五次 Cardinal 样条曲面	115
3.6.4 五次 Catmull-Rom 样条插值函数	116
3.6.5 二元五次 Catmull-Rom 样条插值函数	120
3.7 小 结	123

参考文献	123
第 4 章 基于重新参数化法的形状可调有理曲线曲面	126
4.1 带形状参数的拟有理 Bézier 曲线	126
4.1.1 拟二次有理 Bézier 曲线的定义及其性质	126
4.1.2 拟三次有理 Bézier 曲线的定义及其性质	128
4.2 带形状参数的双三次有理 Coons 曲面	130
4.2.1 三次有理 Hermite 基函数的构造及其性质	130
4.2.2 双三次有理 Coons 曲面的定义及其性质	132
4.3 小 结	134
参考文献	135
第 5 章 形状可调的三角与双曲曲线曲面	136
5.1 形状可调的 Hermite 型三角样条	137
5.1.1 形状可调的三次三角 Hermite 插值样条	137
5.1.2 自动满足 C^2 连续的形状可调三次三角 Hermite 插值样条	144
5.2 形状可调的类三次三角 Bézier 曲线	155
5.2.1 QCT-Bézier 曲线的构造	156
5.2.2 QCT-Bézier 曲线的性质	157
5.2.3 QCT-Bézier 曲线的拼接	158
5.2.4 形状参数对整条 QCT-Bézier 曲线的调节	160
5.2.5 QCT-Bézier 曲线的应用	161
5.3 形状可调的 B 样条型三角样条曲线	161
5.3.1 形状可调的 C^2 连续类三次三角样条曲线	161
5.3.2 形状可调的三次三角伪 B 样条	168
5.4 形状可调的 Coons 型非多项式曲面	180
5.4.1 H-Hermite 函数的构造及其性质	181
5.4.2 H-Coons 曲面片的构造及其特性	183
5.4.3 HC-Coons 曲面片的构造及其特性	185
5.4.4 曲面片的应用实例	186
5.5 小 结	188
参考文献	189

第 1 章 经典的参数曲线曲面造型方法

经典的参数曲线曲面造型方法主要包括 Ferguson 方法、Coons 方法、Bézier 方法、B 样条方法以及非均匀有理 B 样条 (NURBS) 方法, 本章将对这些经典方法逐一进行简要介绍.

1.1 Ferguson 方法

Ferguson 方法是一种构造分段三次参数曲线的造型方法, 由美国波音飞机公司的工程师 Ferguson 于 20 世纪 60 年代初提出^[1]. 组合之后的 Ferguson 曲线^[2]又可称为三次 Hermite 参数样条曲线.

定义 1.1 给定 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中一系列点 p_i 及其切矢 p'_i ($i=0,1,\dots,n$), 对于 $0 \leq t \leq 1$, 称

$$r_i(t) = f_0(t)p_i + f_1(t)p_{i+1} + g_0(t)p'_i + g_1(t)p'_{i+1} \quad (i=0,1,\dots,n-1) \quad (1.1)$$

为三次 Hermite 参数样条曲线, 其中 $f_i(t)$ 与 $g_i(t)$ ($i=0,1$) 称为三次 Hermite 基函数, 满足:

$$\begin{cases} f_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \\ f_1(t) = -2t^3 + 3t^2, \\ g_0(t) = t(1-t)^2, \\ g_1(t) = -t^2(1-t). \end{cases} \quad (1.2)$$

三次 Hermite 基函数具有如下端点性质:

$$\begin{cases} f_i(j) = g'_i(j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \\ f'_i(j) = g_i(j) = 0, & i, j = 0, 1, \end{cases} \quad (1.3)$$

且有 $f_0(t) + f_1(t) = 1$, $g_0(t) = -g_1(1-t)$.

由三次 Hermite 基函数的端点性质, 可得三次 Hermite 参数样条曲线具有如下性质:

(1) 插值性: 曲线插值于点 p_i 及其切矢 p'_i ($i=0,1,\cdots,n$), 即有

$$\begin{cases} r_i(0) = p_i, & r_i(1) = p_{i+1}, \\ r'_i(0) = p'_i, & r'_i(1) = p'_{i+1}. \end{cases}$$

(2) 连续性: 曲线满足 C^1 连续, 即有

$$r_i^{(k)}(1) = r_{i+1}^{(k)}(0) \quad (k=0,1).$$

图 1.1 为插值于点 p_i 及其切矢 p'_i ($i=0,1,2,3,4$) 的一条三次 Hermite 参数样条曲线.

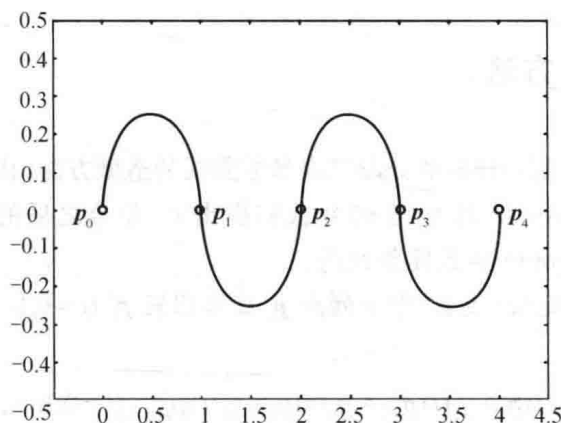


图 1.1 三次 Hermite 参数样条曲线

三次 Hermite 参数样条曲线是工程中较为常见的一种构造插值曲线的方法. 然而, 当插值条件 (即点及其切矢) 给定时, 三次 Hermite 参数样条曲线存在如下方面的不足:

- (1) 插值曲线的形状无法修改.
- (2) 插值曲线仅满足 C^1 连续.
- (3) 无法精确表示一些常见的工程曲线.

1.2 Coons 方法

Coons 方法^[3]是一种曲面分片与拼合的曲面造型方法, 最早由麻省理工学院 M. I. T. 于 20 世纪 60 年代提出, 其基本思想是首先给定边界约束条件, 然

后构造出一张由若干曲面片拼合且插值于边界的完整曲面。

在 Coons 方法中, 以双三次 Coons 曲面应用最为广泛。对于 $0 \leq u, v \leq 1$, 若给定曲面片的 4 个角点处的点矢 $P(i, j)$ 、 u 向切矢 $P_u(i, j)$ 、 v 向切矢 $P_v(i, j)$ 和混合偏导矢 $P_{uv}(i, j)$ ($i, j = 0, 1$), 则双三次 Coons 曲面的方程可表示为^[2]

$$Q(u, v) = [f_0(u) \ f_1(u) \ g_0(u) \ g_1(u)] \times \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_v(0,0) & P_v(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_v(1,0) & P_v(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{uv}(0,0) & P_{uv}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{uv}(1,0) & P_{uv}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(v) \\ f_1(v) \\ g_0(v) \\ g_1(v) \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

式中 $f_i(t)$ 与 $g_i(t)$ ($i = 0, 1$) 为式 (1.2) 表示的 4 个三次多项式 Hermite 基函数。

由式 (1.3) 可得, 由式 (1.4) 定义的双三次 Coons 曲面满足如下性质:

- (1) 曲面片插值于给定的 4 个角点及角点处的切矢和混合偏导矢。
- (2) 整张曲面满足 C^1 连续。

1.3 Bézier 方法

Bézier 方法以逼近原理为基础, 最早由法国雷诺 (Renault) 汽车公司的 Bézier 于 20 世纪 60 年代提出^[4], 其基本思想是先构造由若干逼近于给定控制多边形 (网格) 的曲线段 (曲面片), 再拼接成整条曲线 (曲面)。有关 Bézier 方法的详细讨论, 可参考文献 [2, 5, 6]。下面仅简要介绍 Bézier 曲线与有理 Bézier 曲线。

1.3.1 Bézier 曲线

定义 1.2 给定 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中 $n+1$ 个控制顶点 V_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), 对于 $0 \leq t \leq 1$, 称

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) V_i \quad (1.5)$$

为 n 次 Bézier 曲线, 其中 $B_{n,i}(t) = \frac{n!}{(n-i)!i!} (1-t)^{n-i} t^i$ 称为 n 次 Bernstein 基函数。

特别地, 在式 (1.5) 中取 $n=3$, 则三次 Bézier 曲线的方程为

$$P_3(t) = B_{3,0}(t)V_0 + B_{3,1}(t)V_1 + B_{3,2}(t)V_2 + B_{3,3}(t)V_3, \quad (1.6)$$

其中三次 Bernstein 基函数 $B_{3,i}(t)$ ($i=0,1,2,3$) 的表达式为

$$\begin{cases} B_{3,0}(t) = (1-t)^3, \\ B_{3,1}(t) = 3(1-t)^2t, \\ B_{3,2}(t) = 3(1-t)t^2, \\ B_{3,3}(t) = t^3. \end{cases} \quad (1.7)$$

由式 (1.7) 定义的三次 Bernstein 基函数满足如下性质:

- (1) 非负性: $B_{3,i}(t) \geq 0$ ($i=0,1,2,3$).
- (2) 权性: $B_{3,0}(t) + B_{3,1}(t) + B_{3,2}(t) + B_{3,3}(t) \equiv 1$.
- (3) 对称性: $B_{3,i}(1-t) = B_{3,3-i}(t)$ ($i=0,1,2,3$).
- (4) 端点性质:

$$\begin{cases} B_{3,0}(0)=1, & B_{3,1}(0)=0, & B_{3,2}(0)=0, & B_{3,3}(0)=0, \\ B_{3,0}(1)=0, & B_{3,1}(1)=0, & B_{3,2}(1)=0, & B_{3,3}(1)=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'_{3,0}(0)=-3, & B'_{3,1}(0)=3, & B'_{3,2}(0)=0, & B'_{3,3}(0)=0, \\ B'_{3,0}(1)=0, & B'_{3,1}(1)=0, & B'_{3,2}(1)=-3, & B'_{3,3}(1)=3. \end{cases}$$

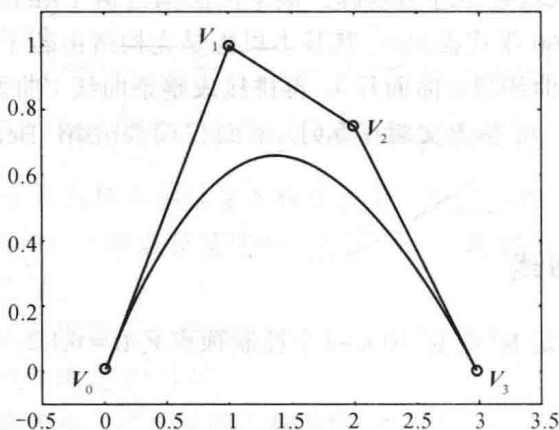


图 1.2 三次 Bézier 曲线

由三次 Bernstein 基函数的性质及式 (1.6) 可得, 三次 Bézier 曲线 (见图 1.2) 具有如下性质:

- (1) 端点性质: 曲线插值于控制多边形的首、末端点且与首、末边相切, 即有

$$P(0)=V_0, \quad P(1)=V_3; \quad P'(0)=3(V_1-V_0), \quad P'(1)=3(V_3-V_2).$$

(2) 对称性: 由控制顶点 V_i ($i=0,1,2,3$) 与控制顶点 V_{3-i} ($i=0,1,2,3$) 构造的曲线完全相同, 但参数化相反.

(3) 凸包性: 曲线落在由控制顶点 V_i ($i=0,1,2,3$) 张成的控制多边形所形成的凸包内.

(4) 几何不变性: 曲线的形状仅取决于 4 个控制顶点, 而与坐标系的选取无关.

Bézier 方法在表示曲线时虽然简单有效, 但也存在不足之处:

(1) 当控制顶点固定时, 曲线的形状无法修改.

(2) 无法精确表示一些常见的工程曲线.

1.3.2 有理 Bézier 曲线

定义 1.3 给定 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中 $n+1$ 个控制顶点 V_i ($i=0,1,2,\dots,n$), ω_i ($\omega_i>0$) 为对应控制顶点的权因子, 对于 $0\leq t\leq 1$, 称

$$P_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)\omega_i V_i}{\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t)\omega_i} \quad (1.8)$$

为 n 次有理 Bézier 曲线, 其中 $B_{n,i}(t)$ 为 n 次 Bernstein 基函数.

特别地, 在式 (1.8) 中分别取 $n=2$ 与 $n=3$, 则二次有理 Bézier 曲线与三次有理 Bézier 曲线的方程可分别写为

$$P_2(t) = \frac{(1-t)^2\omega_0 V_0 + 2t(1-t)\omega_1 V_1 + t^2\omega_2 V_2}{(1-t)^2\omega_0 + 2t(1-t)\omega_1 + t^2\omega_2}, \quad (1.9)$$

$$P_3(t) = \frac{(1-t)^3\omega_0 V_0 + 3t(1-t)^2\omega_1 V_1 + 3t^2(1-t)\omega_2 V_2 + t^3\omega_3 V_3}{(1-t)^3\omega_0 + 3t(1-t)^2\omega_1 + 3t^2(1-t)\omega_2 + t^3\omega_3}. \quad (1.10)$$

有理 Bézier 曲线除了具有传统 Bézier 曲线的诸多性质外, 其形状还可通过修改权因子的取值进行调整, 从而为曲线的造型提供了便利. 当权因子取不同值时, 有理三次 Bézier 曲线如图 1.3 所示, 其中长虚线对应的权因子为 $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (2, 4, 3, 1)$, 短虚线对应的权因子为 $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (1, 2, 3, 4)$, 实线对应的权因子为 $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = (3, 2, 1, 4)$.

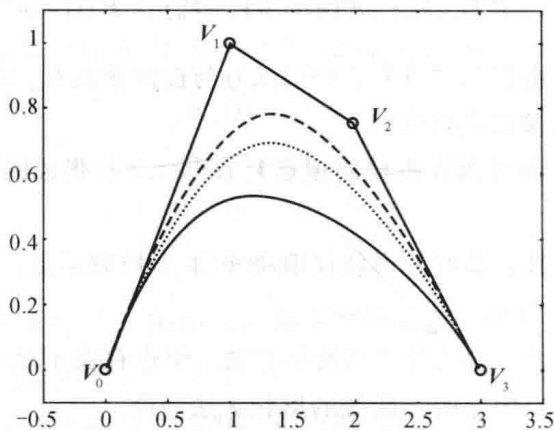


图 1.3 权因子不同值时的有理三次 Bézier 曲线

虽然有理 Bézier 曲线可通过所带的权因子实现对曲线形状的调控, 但无法精确表示一些常见的工程曲线. 另外, 由于采用了有理形式表示曲线, 故有理 Bézier 方法的计算复杂度要大于 Bézier 方法.

1.4 B 样条方法

B 样条方法是 Bézier 方法的一种一般化, 最早由 de Boor、Gordon 等人于 20 世纪 70 年代提出并发展^[7]. B 样条方法不仅保留了 Bézier 方法的全部优点, 而且还克服了 Bézier 方法的弱点, 因此成为一种广泛流行的曲线曲面表示方法. 有关 B 样条方法的详细讨论, 可参考文献[2,5,6,8]. 下面仅对 B 样条曲线进行简要介绍.

定义 1.4 给定 $\mathbb{R}^2$ 或 $\mathbb{R}^3$ 中 $n+1$ 个控制顶点 V_i ($i=0,1,2,\dots,n$), 对于 $0 \leq t \leq 1$, 称

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,k}(t) V_i \quad (1.11)$$

为 n 次 B 样条曲线, 其中 $N_{i,k}(t)$ 为 k 阶 ($k-1$ 次) B 样条基函数, 其递推定义为

$$N_{j,0}(t) = \begin{cases} 1, & t_j \leq t \leq t_{j+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \quad \left(\text{约定 } \frac{0}{0} = 0 \right),$$

其中 $\{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+k}, t_{n+k+1}\}$ 为节点矢量.

B 样条曲线按其节点矢量中节点的分布情况可划分为如下三类:

- (1) 均匀 B 样条曲线: 节点矢量中的节点为均匀分布或等距分布.
- (2) 准均匀 B 样条曲线: 与均匀 B 样条曲线的差别在于两端节点为重节点.
- (3) 非均匀 B 样条曲线: 节点矢量中的节点为任意分布.

特别地, 给定 $n+1$ 个控制顶点 $V_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 时, 由式 (1.9) 可得三次均匀 B 样条曲线的方程

$$Q_i(t) = N_{0,3}(t)V_i + N_{1,3}(t)V_{i+1} + N_{2,3}(t)V_{i+2} + N_{3,3}(t)V_{i+3}, \quad i=0, 1, 2, \dots, n-3, \quad (1.12)$$

其中 $N_{j,3}(t) (j=0, 1, 2, 3)$ 为三次均匀 B 样条基函数, 其表达式为

$$\begin{cases} N_{0,3}(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \\ N_{1,3}(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4), \\ N_{2,3}(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \\ N_{3,3}(t) = \frac{1}{6}t^3. \end{cases} \quad (1.13)$$

不难验证, 由式 (1.13) 定义的三次均匀 B 样条基函数满足如下性质:

- (1) 非负性: $N_{j,3}(t) \geq 0 (j=0, 1, 2, 3)$.
- (2) 权性: $N_{0,3}(t) + N_{1,3}(t) + N_{2,3}(t) + N_{3,3}(t) \equiv 1$.
- (3) 对称性: $N_{j,3}(1-t) = N_{3-j,3}(t) (j=0, 1, 2, 3)$.
- (4) 端点性: 三次均匀 B 样条基函数在端点处满足:

$$\begin{cases} N_{0,3}(0) = \frac{1}{6}, & N_{1,3}(0) = \frac{2}{3}, & N_{2,3}(0) = \frac{1}{6}, & N_{3,3}(0) = 0, \\ N_{0,3}(1) = 0, & N_{1,3}(1) = \frac{1}{6}, & N_{2,3}(1) = \frac{2}{3}, & N_{3,3}(1) = \frac{1}{6}, \\ N'_{0,3}(0) = -\frac{1}{2}, & N'_{1,3}(0) = 0, & N'_{2,3}(0) = \frac{1}{2}, & N'_{3,3}(0) = 0, \\ N'_{0,3}(1) = 0, & N'_{1,3}(1) = -\frac{1}{2}, & N'_{2,3}(1) = 0, & N'_{3,3}(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

由三次均匀 B 样条基函数的性质及式 (1.12) 可得, 三次均匀 B 样条曲线具有如下性质:

- (1) 端点性质: 曲线段 $Q_i(t) (i=0, 1, 2, \dots, n-3)$ 的两端位置为