学数学，找浙大

浙大数学优辅

数学世界漫游记

SHUXUE SHIJIE MANYOUJI

于新华◎著

欧斐园探奇

中国古环世界

勾股文化寻踪

边折线的故事

次家族话古今

数学“原理”知多少

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学世界漫游记

于新华 著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学世界漫游记 / 于新华著．—杭州：浙江大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-308-18140-2

Ⅰ．①数⋯ Ⅱ．①于⋯ Ⅲ．①数学—普及读物 Ⅳ．①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第075670号

数学世界漫游记

于新华 著

策　　划	陈海权(QQ：1010892859)
责任编辑	王同裕
文字编辑	闫　亮
责任校对	陈静毅　陈　宇
封面设计	林智广告
出版发行	浙江大学出版社 (杭州市天目山路148号　邮政编码310007) (网址：http://www.zjupress.com)
排　　版	杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷	浙江新华数码印务有限公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	14.25
字　　数	239千
版 印 次	2018年7月第1版　2018年7月第1次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-18140-2
定　　价	48.00元

浙江大学出版社发行中心联系方式：0571-88925591；http://zjdxcbs.tmall.com

序

翻看着案头打印的书稿《数学世界漫游记》，一股激情掠过心头．很久以前就听说他在写一本书，现在终于完成了．

他，于新华，是我的忘年好友，江苏省常州市武进区一位优秀的数学教研员．他对教研工作很执着，只要没有会议，他总是来回穿梭于各学校间，和一线教师一起钻研教材、讨论教法．为解决教学中的问题，不惜奔波劳顿．他对数学研究也非常投入，哪怕教材中一个小小的疑问，也决不轻易放过，和老师们讨论解决之后，总要动笔整理，打印成“札记”．善思勤积，使他形成了对数学、数学教学诸多独到的见解．在这方面，我们有过很多的交流．由于深厚扎实的专业功底与务实高效的教研风格，他多年前就被评为“江苏省高中数学特级教师”．近年来，常常应邀面向全国中学数学教师作解题研究专场讲座，在全国形成较强的专业影响力．

初步阅读《数学世界漫游记》，就强烈地感受到它有如下六个特点：

第一，丰厚的文化内涵．本书寓哲学思辨、方法论的点评、传统文化（诗歌、游戏、民间算题、艺术欣赏、数学之美）、科学应用于严肃的数学内容之中，读来令人胃口大开，赏心悦目．

第二，寓严谨于轻松．本书应用数学符号系统地表述了许多繁难的、日常语言无能为力的问题（如九连环、歧中易的着法和拆装规律），充分运用数学的简而易的特点，阐明了不少问题、方法（如优选法、黄金分割、五角星之美等）．采用“对话”形式也增强了可读性．

第三，详其常略，略其常详．本书的选材详略有致，很多书刊上都有的东西，则略叙或不说，而文献上所略者，则详细阐述．如勾股定理的证明方法，一般文献都说“很多”“数百种”，可实际拿出的不过三五种，至多十来种．这里，不仅给出67种证法，还给出了仲嘉构图的系统方法（实际包含了无穷多种方法）．在“数学‘原理’

知多少”中，包含了一些从未有人系统阐述过的数学中的原理，让人大开眼界.

第四，丰硕的研究成果. 本书包含了我国近些年初等数学丰硕的研究成果，供大家赏析. 如二次函数的初等性质、中国古环拆装的数学模型、四边折线（凸、凹四边形、蝶形）的丰富性质、郭璋原理等，这是非常难能可贵的. 其中也包含了作者自己大量初数研究、解题研究的心得. 同时，我很乐意看到书中还引用了我的部分研究成果.

第五，由浅入深循序渐进. 本书既不拘泥于（初、高中）数学教材，又不脱离教材，许多是材料内容的扩展，如勾股定理、二次系统、数学原理、连分数等.

第六，知识与方法并重. 本书采用了探索式的表述方法，既注重数学知识的详尽阐释，也注重数学思想方法的点评和介绍，并分析求解了大量中高考题、历史名题、IMO试题. 因此，可作为广大读者研究性学习、数学建模、竞赛备战之用.

著名物理学家史蒂芬·霍金说过：“有人告诉我，我放在书中的每一个方程，都会使本书的销量减半，为此，我决定一个方程也不用.”这里，很明显，说的是不用高深的数学去论证宇宙规律，而是用通俗的语言去解释. 有人把这句名言用到了数学上，认为数学之难，就难在它抽象的概念、命题、符号和推理论证上，只要抽掉了这些东西，数学就变得容易了！其实，这是个大大的误解.

通过阅读《数学世界漫游记》，你会发现：首先，数学使用概念、命题、符号，都是为了使它更简洁、更容易（这一点，大家可看看本书的1.13节中，数学家斐波那契求解“兔子问题”的方法与今天的列表方法，即知此言不妄；事实上，我们用“通俗语言”叙述一个二次方程已很不易，叙述它的求根公式，更是难懂. 要叙述一个四次方程的求根公式，那实际上是不可能的）. 其次，如果去掉了概念、命题、符号和推理论证，那数学还有什么？另外，数学的繁难，一是由于它的“学术形态”，二是由于教法不当. 因此，数学之难是人为的，数学也感到冤枉！

《数学世界漫游记》用简洁的语言、精巧的构思、严谨的结构展现了数学世界精彩的一面，并通过石鸣、玉唤的带领，漫游在无边的数学世界之中. 对广大数学爱好者来说，这是一本不可多得的好书.

杨 之

2018年初于天津天宝华苑陋斋书屋

目录

2. 中国古环世界

3. 勾股文化寻踪

4. 四边折线的故事

5. 二次家族话古今

6. 数学“原理”知多少

楔　子

“数学世界”在哪里?

“数学世界”是什么样子的?

这是令人困惑却十分有趣的问题. 既然要去“漫游”, 自然不能回避诘问古人.

古希腊毕达哥拉斯(约公元前580—前500年)学派回答说:“万物皆数.”气象万千的数学世界, 就在我们身边. 我们的衣食住行, 哪一项不与数目和形状密切相关呢?

中国的数学家则说: 数学世界在“河图洛书”里, 在《周髀》《九章》《墨经》里.

数学史家们坚持说: 数学世界在埃及人的土地测量里, 在中国学者的天文观测和历法的编制里, 在欧几里得和希尔伯特的“公理体系”中, 在中国、希腊、印度、埃及的大量民歌、民谣、民间算题和数学游戏里……

相信数学早已存在, 等待我们去发现, 这样的人, 称为柏拉图主义者.

什么是“柏拉图主义”? 柏拉图是谁?

柏拉图(公元前427—前347年)是热心数学的古希腊哲学家. 他认为数学概念是抽象物, 不含任何物质性, 与具体事物不同, 不依赖于经验而自有其实在性, 它们只能为人们所发现, 并非为人们所发明或创造. 数学属于理想的观念世界, 而把它和物质世界严格区分开来. 数学史家M.克莱因在其著作《古今数学思想》中, 对此评述说:“柏拉图这个人, 特别相信唯有具体对象的完美理想才是实在, 唯有理想世界以及理想间的关系才是永恒的, 不受时代影响的, 不朽的, 而且是普遍的. 物理世界是理想世界的不完善的体现, 因而它是会枯朽的, 所以只有理想世界才值得研究.”

尽管柏拉图的“主义”还有某些欠缺, 但是直到现代, 仍有大量的数学家信奉柏拉图主义, 神往其描述的数学世界. 何以如此呢?

数学世界太美了! 艾尔德什说:“我知道数字是美的. 要是数字不美的话, 那就

没有什么是美的了．”真是情人眼里出西施，人称艾尔德什是“数字情种”，数字、数学就是他的情人．英国数学大家哈代则说：“丑陋的数学在世界上是站不住脚的．”艾尔德什说道：“上帝有一本超穷的天书，在这本天书里，有一切数学定理的最好、最漂亮、最完美的证明．”

美好的数学世界，也吸引了石鸣、玉唤，这一老一少两位数学痴情者，他们早就幻想着做“数学世界”的李时珍、徐霞客，搜尽珍稀本草，遍访名山大川．这日，两人一拍即合．初定了一个路线，择日启程．

我们的《数学世界漫游记》也同时开始．正是：

数世遨游路漫漫，非是天堂非人间．
无涯美境凭赏析，万千妙题任踏勘．
古今奇才留佳绩，芸芸众民未等闲．
洪涛巨流擎天地，浪花朵朵亦悠然．

1 欧斐园探奇

1.1 五角星为什么那样美

话说石鸣、玉唤一老一少两位数学痴迷者，入“数世”漫游，约定首站是去“欧斐园”（Euclid-Fibonacci Garden）. 这是一座用公元前3世纪几何学家欧几里得和12世纪的数学家斐波那契（这“老哥俩”相差约1500岁）名字命名的数学园地.


欧几里得


斐波那契

刚一进门，激光打出的“五角星为什么那样美”，九个巨字构成的一道彩虹，映入眼帘，下面是用于说明的秀丽文字：

正五角星很美，人皆以为然.

我们的国旗——五星红旗就很美：看到她，想到她，都使人感到自豪，受到鼓舞！一曲《闪闪的红星》，唱了几十年、几代人，依然久唱不衰. 它形象美，词曲美，越唱越甜，越唱越美.

中国如此，外国亦然. 全球有近40个国家的国旗上有五角星图案. 今人如此，古人亦然. 在幼发拉底河沿岸一个叫乌鲁克的地方，有一块制作于公元前3200年的泥版，上面就有一个正五角星. 发现勾股定理的毕达哥拉斯学派就很崇拜

五角星，用五角星作为团体的标志，也作为互相联系的暗号.

可是，五角星为什么那样美?

这一定与它的形态和结构有关. 于是，人们纷纷致力于正五角星结构的研究，以揭示"五角星之美"的奥妙. 研究的方法是几何与代数"手脚"并用. 最早研究它的是毕达哥拉斯，继之是欧几里得，得出的结论是五角星"浑身都是宝".

现代人对五角星的研究则更多、更具体、更深入. 比如，20世纪50年代，有数学家傅种孙的《从五角星谈起》一文，文中研究了五角星的拓扑性质，进而研究n边正星形的拓扑结构和计数问题，并进一步地启发了对一般折线的研究. 1980年，又有严镇军先生的《从正五边形谈起》一书出版，受到读者欢迎，可见，人们十分关注对正五边形的研究（也即关心对正五角星的研究）. 该书具体深入地研究了五角星的几何结构，揭示出它更多的奥妙.

1.2 算算、量量、猜猜、证证

看到这里，年青的数学才子玉唤，不觉心动技痒，就说："石鸣先生，不知严镇军先生研究了五角星的哪些性质，也不知是如何研究的，咱们能不能做一做呢?"

石鸣 当然可以，咱们的平面几何知识是足够用的. 至于方法嘛，无非是算算、量量、猜猜、证证.

"好，那就试试看." 玉唤一边说，一边动笔做了起来.

玉唤 进行研究之前，先要画一个正五角星. 怎样画呢? 知道它的顶角度数就可以画. 那么，先来计算它顶角度数的和.

任意画一个五角星$ABCDE$（如图1-1）:

由于$\angle 1=\angle B+\angle C$，$\angle 2=\angle A+\angle E$，

所以$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=\angle 1+\angle 2+\angle D=180°$.

（想一想，还有别的方法吗? 比如，连接BE，应用"蝶形"性质）

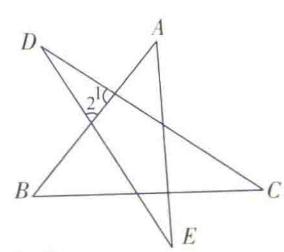

图 1-1

因为正五角星各顶角相等，因此，它的一个顶角等于$\frac{1}{5}\times 180°=36°$. 由于正五角

星五个顶点（可视为正五边形的顶点）共圆，那么相应的正五边形，一边所对应的圆心角为$36° \times 2 = 72°$. 因此，有如下画法：

如图1-2，先画$\odot O$，半径$r = 18\text{mm}$.

再在$\odot O$上任取一点B，作圆心角

$$\angle BOE = \angle EOC = \cdots = \angle DOB = 72°,$$

则$ABCDE$就是正五角星.

由于正五角星各边长相等，不妨量一量AB的长度，则

$$AB \approx 34.5\text{mm}.$$

然后量一量像AF，EF这样的线段，得$AF \approx 21.3\text{mm}$.

最后算一算：

$$\frac{AF}{AB} \approx \frac{21.3}{34.5} \approx 0.617\cdots,$$

$$\frac{BF}{AF} \approx \frac{34.5 - 21.3}{21.3} \approx 0.619\cdots.$$

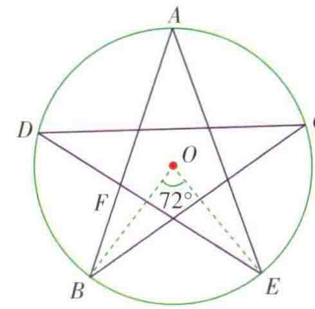

图1-2

再画几个图形，进行量量、算算，发现$\frac{AF}{AB}$，$\frac{BF}{AF}$的值都在$0.61 \sim 0.62$. 于是，有如下猜想：

正五角星各边交点（非顶点），分各边所得的较短线段与较长线段之比等于较长线段与整条边之比. 以图1-2中边AB和交点F为例，即为：$\frac{BF}{AF} = \frac{AF}{AB}$.

石鸣 是不是这样的呢？我们应该通过严格的尺规作图，进行推理论证，来证实或证伪这一猜想. 该猜想的起源，要追溯到欧几里得.

1.3 “黄金分割”溯源

石鸣 通过画图和测量，可以帮助我们观察五角星的结构，验证1.2节中的猜想，但这很难给出猜想的严格证明，也不能算出这个比值的精确值.

玉唤 欧几里得老夫子，也是这个看法，为了教学的需要，他撰写了《原本》

(Elements，因其前6卷为几何内容，利玛窦、徐光启译出的前6卷，出版时所用书名为《几何原本》．第7—10卷为整数论和无理数，第11—13卷为立体几何)．在《原本》第2卷的命题11中，列出了他的同胞欧多克萨斯（约公元前408—前355年）的如下作图题：

分割已知线段，使它和其中一条较短线段所构成的矩形面积等于由另一条小线段构成的正方形面积．

用符号语言表示为：已知线段AB，求其上一点C，使得$AB\cdot CB=AC^2$或$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$（本书称其为线段$AB$的中末比）．

将《原本》上的作图方法，作简单表述，即得如下“正规”的尺规作图法：

如图1-3，作$BD\perp AB$于点B，取$BD=\dfrac{1}{2}AB$．

连接AD，作$\odot D$（DB），交AD于点E；

再作$\odot A$（AE），交AB于点C，则点C即为所求．

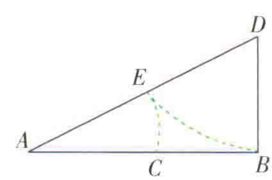

图1-3

石鸣 你用的符号“作$\odot D$（DB）”，应当解释一下．

玉唤 噢，作$\odot D$（DB）表示：以D为圆心，DB为半径作圆（弧）；$\odot A$（AE）也是如此．下面证明C就是所求的点．

事实上，有

$$AC^2=AE^2=(AD-DB)^2=(\sqrt{AB^2+DB^2}-DB)^2=\left(\sqrt{AB^2+\frac{1}{4}AB^2}-\frac{1}{2}AB\right)^2$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB\right)^2.$$

所以

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB.$$

又$CB=AB-AC=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}AC-AC=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}-1\right)AC=\left[\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1}-1\right]AC$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AC,$$

所以

$$\frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

看到玉唤通过计算，巧妙地证明了猜想，并且算出了这个比值的精确值，石鸣高兴地说："这个分割线段成中末比的作图方法，被历代几何学家所珍视．M.欧姆（德国物理学家G.S.欧姆之弟）在《纯粹初等数学》一书中，称之为'黄金分割'，以示其贵如黄金．天文学家开普勒则称'勾股定理和中末比是几何中的双宝'"．

玉唤灵机一动，把话题接过来说：事实上，"黄金分割"也可以"折"出来．

取一个正方形纸片ABC_1D_1（如图1-4）．先折出BC_1的中点D，连接AD；

将DB上折，使点B落在AD上的点E处，折出DF；

再折出EF，展开，再将AB折起来，使点B落在AD上，折出AL，它与EF交于点K，过点K折出$CG\perp AB$，则点C即为所求．

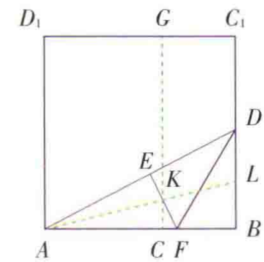

图1-4

以后称$h=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$为（第一）黄金比（数）．

石 鸣 把图1-4与图1-3加以对比，不难发现，折纸法可根据作图法进行设计．讲到折纸，我想到两道折纸题，写在这里，供以后的漫游者研究赏析：

（1）一个矩形裁掉一个最大的正方形后，所剩下的小矩形的长宽比不变，这样的矩形称为黄金矩形．求黄金矩形的长宽比．

（2）我们常用的矩形复印纸有一个性质：对折（折痕平行于较短边）后，所得小矩形的长宽比不变，这种纸叫标准规格纸．求标准规格纸的长宽比．

1.4 金五星的几何结构

玉 唤 应用计算器，可以算出1.3节求出的黄金比h（的近似值）：

$$h=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2.236067\cdots-1}{2}=0.6180339\cdots.$$

数值确实在0.61～0.62，这对证实我们在1.2节中的猜想是很有利的．我们通过尺规作图和计算求出了这个比值（即无理数h），但要证明猜想，还需用尺规作图法，作出正五角星．

受到黄金分割作图法的启发，得到如下的作图方法：

如图1-5，作⊙O，半径CO垂直直径AB．D为OB的中点，作⊙D（CD），交OA于点E．再作⊙C（CE），交⊙O于点F，G．再作⊙F（CE），交⊙O于点H，⊙G（CE）交⊙O于点I．连接$CHGFIC$，即得正五角星$CHGFI$．

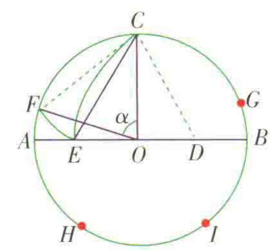

图1-5

要证这个结论，只需证$\angle COF=72°$．

不妨设$OC=1$，则$CD=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$OE=DE-OD=CD-OD=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=h$，$CF=CE=\sqrt{1+h^2}$（如图1-5）．

记$\angle COF=\alpha$，在$\triangle COF$中，由余弦定理得：

$$CF^2=OC^2+OF^2-2OC\cdot OF\cdot\cos\alpha,$$

代入数据，可得

$$\cos\alpha=\frac{1-h^2}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

欲证$\alpha=72°$，由于$\cos72°=\sin18°$，所以如能算出$\sin18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，就算成功．

首先，$\sin36°=\cos54°$，即$\sin(2\times18°)=\cos(3\times18°)$．而$\sin2x=2\sin x\cos x$，$\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$，上式化为：

$$2\sin18°\cos18°=4\cos^3 18°-3\cos18°.$$

但$\cos18°\neq0$，故得$2\sin18°=4\cos^2 18°-3$，即

$$2\sin18°=4(1-\sin^2 18°)-3,$$

$$4\sin^2 18°+2\sin18°-1=0.$$

但$\sin18°>0$，故