



普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程 习题解答

韩 明 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程 习题解答

韩 明 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书给出了《概率论与数理统计教程》第2版(韩明编著,同济大学出版社出版)中全部习题(407道题)的详细解答.全书按原教材的章节编写,每节包括内容概要、习题及其解答,书末还附有“概率论与数理统计附表”.本书既可以与原教材配套应用,也可以单独使用.

本书可作为高等院校数学类、统计类等有关专业“概率论与数理统计”课程的学习辅导书,也可作为参加硕士研究生入学考试者的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程习题解答 / 韩明编著. — 上海: 同济大学出版社, 2018. 7

ISBN 978-7-5608-7659-7

I. ①概… II. ①韩… III. ①概率论—高等学校—题解②数理统计—高等学校—题解 IV. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 000476 号

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程习题解答

韩 明 编著

责任编辑 张 莉 陈佳蔚 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

排 版 南京月叶图文制作有限公司

印 刷 上海同济印刷厂有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 17.5

印 数 1—2100

字 数 437 000

版 次 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-7659-7

定 价 46.00 元

前 言

本书是为《概率论与数理统计教程》第2版(韩明编著,同济大学出版社出版)(以下简称“原教材”)编写的配套学习辅导书.它有以下特点:

(1) 按原教材的章节内容编写,每节包括内容概要、习题及其解答.

(2) 原教材中全部习题都可以在本书中找到详细解答,并标注其在原教材中的题号.

(3) 在解题过程中,对一些初学者不容易理解的地方尽量详细,对少部分题目还给出了一题多解.

(4) 原教材中一些没有展开的内容,其中的某些分部用习题的形式把它们呈现出来,通过对习题的解答,加深对相关内容的理解.从这个意义上来说,习题及其解答可以看作是对原教材内容的补充和延伸.

学习“概率论与数理统计”课程,做习题是必不可少的重要环节.尽管学习了一些定义、定理和性质等,但要达到融会贯通、正确理解和灵活应用,还需要完成一定数量的习题.初学者往往不知道如何入手,包括如何利用已知条件,如何对问题进行分析,如何表述求解过程等.编写本书的主要目的,一是为初学者在如何思考、分析和表达等方面提供学习辅导;二是为准备参加“硕士研究生入学考试”者提供复习指导.

做习题的过程本质上是一个思维的过程,希望读者在未经过独立思考之前,不要轻易去看解答.在遇到不会做的习题时,如果不是把问题弄明白,而是找到答案“一抄了之”,这样就没有达到做习题的真正目的.虽然本书对一些题目还给出了一题多解,但更希望读者能给出优于本书所提供的解答方法,进行深入的思考并举一反三.

美国著名数学家、数学教育家(美国科学院院士)波利亚(George Polya)教授在《怎样解题——数学思维的新方法》中提出,数学解题思维过程可分为四个阶段:理解题目,拟订方案,执行方案以及回顾.其中理解题目是基础,拟订方案是核心,执行方案是目的,回顾是提高.

怎样看待习题解答?著名数学家(中国科学院院士)陈希孺教授在《数理统计习题教程》的“序言”中指出:“对题解一类的书,个人一贯的观点是:善用之则有益,若对它产生依赖心理,以之代替自己的思考,则不惟无益,甚至有害.”

原教材中有一些计算和画图是用 MATLAB 和 R 软件来实现的(相关 MATLAB 代码见原教材的附录 B,相关 R 代码见原教材的第 9 章——方差分析、第 10 章——回

归分析). 本书中也有少部分习题中的计算和画图部分是用 MATLAB 和 R 软件来完成的, 主要是数理统计部分中的一些习题的画图部分, 如直方图、box 图、残差图和散点图等; 还有一些繁琐的计算, 如参数估计、假设检验、方差分析、回归分析中的计算等.

本书在写作过程中, 曾与荆广珠教授、李春华副教授进行讨论. 本书的初稿完成后, 李春华副教授进行了认真审阅, 在此一并致谢.

借此机会, 感谢读者几年来对本书的关心和厚爱. 愿本书的出版对广大师生在“概率论与数理统计”教与学的过程中有所帮助. 由于作者水平所限, 书中不当之处在所难免, 恳请专家和读者批评指正.

韩 明

2018 年 1 月

目 录

前言

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 随机试验、随机事件	1
1.1.1 本节内容概要	1
1.1.2 习题 1.1 及其解答	3
1.2 概率的直观意义及其计算	5
1.2.1 本节内容概要	5
1.2.2 习题 1.2 及其解答	6
1.3 概率的公理化定义和概率的性质	9
1.3.1 本节内容概要	9
1.3.2 习题 1.3 及其解答	11
1.4 条件概率	15
1.4.1 本节内容概要	15
1.4.2 习题 1.4 及其解答	16
1.5 独立性	20
1.5.1 本节内容概要	20
1.5.2 习题 1.5 及其解答	21
第 2 章 随机变量及其分布	25
2.1 随机变量与离散型随机变量	25
2.1.1 本节内容概要	25
2.1.2 习题 2.1 及其解答	25
2.2 常见的离散型随机变量	28
2.2.1 本节内容概要	28
2.2.2 习题 2.2 及其解答	30
2.3 随机变量的分布函数	34
2.3.1 本节内容概要	34
2.3.2 习题 2.3 及其解答	34
2.4 连续型随机变量及其密度函数	38
2.4.1 本节内容概要	38
2.4.2 习题 2.4 及其解答	38
2.5 常见的连续型随机变量	43
2.5.1 本节内容概要	43
2.5.2 习题 2.5 及其解答	46

2.6 随机变量函数的分布	49
2.6.1 本节内容概要	49
2.6.2 习题 2.6 及其解答	49
第 3 章 多维随机变量及其分布	56
3.1 二维随机变量及其分布	56
3.1.1 本节内容概要	56
3.1.2 习题 3.1 及其解答	57
3.2 边缘分布	62
3.2.1 本节内容概要	62
3.2.2 习题 3.2 及其解答	62
3.3 随机变量的独立性	67
3.3.1 本节内容概要	67
3.3.2 习题 3.3 及其解答	68
3.4 条件分布	74
3.4.1 本节内容概要	74
3.4.2 习题 3.4 及其解答	74
3.5 随机变量函数的分布	79
3.5.1 本节内容概要	79
3.5.2 习题 3.5 及其解答	80
第 4 章 随机变量的数字特征	89
4.1 数学期望	89
4.1.1 本节内容概要	89
4.1.2 习题 4.1 及其解答	90
4.2 方差	96
4.2.1 本节内容概要	96
4.2.2 习题 4.2 及其解答	97
4.3 协方差、相关系数与矩	101
4.3.1 本节内容概要	101
4.3.2 习题 4.3 及其解答	103
4.4 变异系数、分位数	107
4.4.1 本节内容概要	107
4.4.2 习题 4.4 及其解答	109
第 5 章 特征函数与极限定理	112
5.1 随机变量序列的两种收敛性	112
5.1.1 本节内容概要	112
5.1.2 习题 5.1 及其解答	113
5.2 特征函数	115

5.2.1 本节内容概要	115
5.2.2 习题 5.2 及其解答	117
5.3 大数定律	119
5.3.1 本节内容概要	119
5.3.2 习题 5.3 及其解答	121
5.4 中心极限定理	123
5.4.1 本节内容概要	123
5.4.2 习题 5.4 及其解答	124
第 6 章 数理统计的基本概念	129
6.1 几个基本概念	129
6.1.1 本节内容概要	129
6.1.2 习题 6.1 及其解答	131
6.2 三个重要抽样分布与抽样定理	135
6.2.1 本节内容概要	135
6.2.2 习题 6.2 及其解答	139
6.3 充分统计量	143
6.3.1 本节内容概要	143
6.3.2 习题 6.3 及其解答	144
第 7 章 参数估计	148
7.1 点估计	148
7.1.1 本节内容概要	148
7.1.2 习题 7.1 及其解答	150
7.2 估计量的评选标准	156
7.2.1 本节内容概要	156
7.2.2 习题 7.2 及其解答	158
7.3 区间估计	161
7.3.1 本节内容概要	161
7.3.2 习题 7.3 及其解答	163
7.4 贝叶斯估计	168
7.4.1 本节内容概要	168
7.4.2 习题 7.4 及其解答	171
第 8 章 假设检验	174
8.1 假设检验的基本思想与步骤	174
8.1.1 本节内容概要	174
8.1.2 习题 8.1 及其解答	176
8.2 单个正态总体均值与方差的检验	179
8.2.1 本节内容概要	179

8.2.2 习题 8.2 及其解答	180
8.3 两个正态总体均值与方差的检验	187
8.3.1 本节内容概要	187
8.3.2 习题 8.3 及其解答	187
8.4 分布拟合检验	191
8.4.1 本节内容概要	191
8.4.2 习题 8.4 及其解答	192
第 9 章 方差分析	199
9.1 单因素方差分析	199
9.1.1 本节内容概要	199
9.1.2 习题 9.1 及其解答	202
9.2 双因素方差分析	211
9.2.1 本节内容概要	211
9.2.2 习题 9.2 及其解答	214
第 10 章 回归分析	220
10.1 一元线性回归	220
10.1.1 本节内容概要	220
10.1.2 习题 10.1 及其解答	224
10.2 一元非线性回归	232
10.2.1 本节内容概要	232
10.2.2 习题 10.2 及其解答	233
10.3 多元线性回归	237
10.3.1 本节内容概要	237
10.3.2 习题 10.3 及其解答	240
10.4 逐步回归	246
10.4.1 本节内容概要	246
10.4.2 习题 10.4 及其解答	247
附录 概率论与数理统计附表	253
附表 1 正态分布表	253
附表 2 泊松分布表	254
附表 3 t 分布表	256
附表 4 χ^2 分布表	258
附表 5 F 分布表	261
附表 6 相关系数临界值 r_{α} 表	269
参考文献	270

第 1 章 随机事件及其概率

本章主要包括:随机试验、随机事件,概率的直观意义及其计算,概率的公理化定义和概率的性质,条件概率,独立性,习题 1.1—习题 1.5 解答.

首先按原教材列出每节内容概要,然后列出每节习题并给出其解答.

1.1 随机试验、随机事件

1.1.1 本节内容概要

1. 随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性,在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象,称为**随机现象**(或**偶然现象**).

2. 随机试验

如果一个试验同时满足下列条件:

- (1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称“可重复性”);
- (2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果(简称“不唯一性”);
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称“不确定性”).

称这样的试验为**随机试验**,有时把随机试验简称为**试验**(experiment),用 E 来表示.

3. 样本空间

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**,用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的元素,即试验 E 的每个结果,称为**样本点**,用 ω 来表示.

根据样本空间中样本点的特点,可以把样本空间进行分类:

只包含有限个样本点的样本空间,称为**有限样本空间**;

包含可列个样本点的样本空间,称为**可列样本空间**;

有限样本空间和可列样本空间统称为**离散样本空间**;

全部样本点可以充满某个区间(或区域)的样本空间,称为**连续样本空间**.

4. 随机事件

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**(或“随机试验的某些样本点组成的集合”),简称**事件**(event). 在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

(1) 由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

(2) 样本空间 Ω 包含所有样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**.

(3) 空集 \emptyset 不包含任何样本点, 作为样本空间的子集, 它在每次试验中都不发生, 称为不可能事件.

5. 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间 Ω , 而 $A, B, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B 包含事件 A , 是指事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$.

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件(或事件 A 与事件 B 的并). 当且仅当 A, B 中至少有一个事件发生时, 事件 $A \cup B$ 发生.

类似地, 称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件, 称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件(或事件 A 与事件 B 的交). 当且仅当 A, B 同时发生时, 事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 简记为 AB .

类似地, 称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件, 称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1, A_2, \dots 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生, B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件). 记事件 A 的对立事件为 \bar{A} , $\bar{A} = \Omega - A$.

(6) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥). 是指事件 A 与事件 B 不能同时发生.

6. 事件的运算定律

在进行事件的运算时, 经常要用到下述定律.

设 $A, B, C, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 为事件, 则有

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

德·摩根(De Morgan)律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

可以把以上两个事件的德·摩根律推广到有限个事件、可列个事件的情形, 即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

7. 在集合论、概率论中符号与意义的对照

在集合论、概率论中符号与意义的对照, 见表 1-1.

表 1-1 在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间, 必然事件
\emptyset	空集	不可能事件
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与集合 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与集合 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积事件
\bar{A}	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与集合 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件
$A \cap B = \emptyset$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容

1.1.2 习题 1.1 及其解答

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币, 用 H 表示正面朝上, 用 T 表示反面朝上, 观察正面和反面出现的情况;

(2) 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面 H 、反面 T 出现的情况;

(3) 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面出现的次数;

(4) 在单位圆内任意取一点, 记录它的(直角)坐标;

(5) 掷两颗骰子, 观察其点数.

解 以上五个随机试验的样本空间分别为

$$\Omega_1 = \{H, T\};$$

$$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\};$$

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2\};$$

$$\Omega_4 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\};$$

$$\Omega_5 = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

2. 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个相同的球. 若从中任取三个球, 请写出这个随机试验的样本空间, 并计算基本事件总数.

解 (1) 随机试验的样本空间为

$\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}$.

(2) 根据以上随机试验的样本空间,基本事件总数为 10.

3. 设 A, B, C 表示三个随机事件,用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:(1) A, B, C 都发生;(2) A, B, C 都不发生;(3) A, B, C 中至少有两个发生;(4) A, B, C 中恰好有两个发生.

解 (1) ABC ; (2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; (3) $ABC \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C}$; (4) $\bar{A}BC \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}\bar{C}$.

4. 一名射手向某个目标射击三次,事件 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标($i=1, 2, 3$).试用文字叙述下列事件:(1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$; (2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; (3) $\bar{A}_1 A_2$; (4) $A_2 \cup \bar{A}_3$.

解 (1) 前两次射击中至少有一次未击中目标;

(2) 三次射击中至少有一次击中目标;

(3) 第一次射击未击中目标且第二次射击击中目标;

(4) 第二次射击击中目标或第三次射击未击中目标.

5. 一位工人生产四个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是不合格品, $i=1, 2, 3, 4$. 请用诸 A_i 表示如下事件:(1) 全是合格品;(2) 全是不合格品;(3) 至少有一个零件是不合格品;(4) 恰好有一个零件是不合格品.

解 (1) $\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4$;

(2) $A_1 A_2 A_3 A_4$;

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$;

(4) $A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4$.

6. 叙述下列事件的对立事件:(1) A = “抛掷两枚硬币,皆为正面”;(2) B = “射击三次,皆命中目标”;(3) C = “加工四个产品,至少有一个正品”.

解 (1) \bar{A} = “抛掷两枚硬币,至少出现一个反面”;

(2) \bar{B} = “射击三次,至少有一次没命中目标”;

(3) \bar{C} = “加工四个产品,皆为次品”.

7. 下列说法是否正确,为什么?

(1) 若 $A \cup B = \Omega$, 则 A, B 互为对立事件;(2) 若 $ABC = \emptyset$, 则 A, B, C 互不相容.

解 (1) 不正确. 因为 A, B 互为对立事件需要满足两个条件 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \emptyset$.

(2) 不正确. 例如在抛掷两颗骰子的随机试验中, $A = \{(1, 1), (1, 2)\}, B = \{(1, 1), (2, 2)\}, C = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$, 则有 $ABC = \emptyset$, 但 $AB = \{(1, 1)\}, BC = \{(2, 2)\}$, 所以 A, B, C 不是两两互不相容.

8. 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八张卡片中任取一张,设事件 A 为“抽得一张标号不大于 4 的卡片”;事件 B 为“抽得一张标号为偶数的卡片”;事件 C 为“抽得一张标号为奇数的卡片”. 请用样本点表示如下事件:

$$A \cup B, AB, \bar{B}, A - B, B - A, BC, \overline{B \cup C}, (A \cup B)C.$$

解 由于 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$,

$C = \{1, 3, 5, 7\}$, 则有

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}, AB = \{2, 4\}, \bar{B} = \{1, 3, 5, 7\} = C,$$

$$A - B = \{1, 3\}, B - A = \{6, 8\}, BC = \emptyset, \overline{B \cup C} = \emptyset, (A \cup B)C = \{1, 3\}.$$

9. 设 A, B 为两个事件, 证明: (1) $B = (AB) \cup (\bar{A}B)$; (2) AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

证明 (1) 根据题意, 有 $(AB) \cup (\bar{A}B) = (A \cup \bar{A})B = \Omega B = B$.

(2) 由于 $(AB)(\bar{A}B) = (A\bar{A})B = \emptyset$, 所以 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

1.2 概率的直观意义及其计算

1.2.1 本节内容概要

1. 频率

定义 1.2.1 在相同条件下, 进行了 n 次试验, 在这 n 次试验中, 事件 A 发生的次数 n_A , 称为事件 A 发生的频数, 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率 (frequency), 记作 $f_n(A)$.

频率具有下述基本性质:

(1) 对于任意事件 A , 有 $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) 对于必然事件 Ω , $f_n(\Omega) = 1$;

(3) 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, \dots, A_k , 有 $f_n(\bigcup_{i=1}^k A_i) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$.

2. 概率的统计定义

定义 1.2.2 在大量重复试验中, 若事件 A 发生的频率稳定地在某一个常数 p 附近摆动, 则称该常数 p 为事件 A 发生的概率 (probability), 记作 $P(A)$, 即 $P(A) = p$.

3. 古典型试验与古典概型

具有以下两个特点的试验, 称为古典型试验:

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点;

(2) 试验中的每一个样本点发生的可能性相等.

定义 1.2.3 设随机试验 E 为古典型试验, 它的样本空间为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 若事件 A 包含 k 个样本点, 则事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (1.2.1)$$

这里 $k =$ 事件 A 所包含样本点的个数, $n =$ 样本空间 Ω 所有样本点的个数.

称满足定义 1.2.3 的概率模型为古典型. 古典型又称为等可能概型.

4. 几何概率

定义 1.2.4 如果试验 E 的样本点有无限多个, 其样本空间 Ω 可用一个有度量的几何区域来表示, 并且样本点落在 Ω 内任意一点处都是等可能的, 其中 A 是 Ω 中的一个区域, 样

本点落在区域 A 的概率与 A 的度量(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置和形状无关,则样本点落在区域 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (1.2.2)$$

式中, $m(A)$ 为区域 A 的度量, $m(\Omega)$ 为样本空间 Ω 的度量. 称上述的概率为几何概率.

5. 排列与组合公式

(1) 从 n 个不同元素中任取 k ($k \leq n$) 个元素(被取出的元素各不相同),按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个排列(arrangement),此种排列的总数记为 A_n^k ,其计算公式为

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

当 $n = k$ 时,称为全排列,此时 $A_n^n = n!$.

(2) 从 n 个不同元素中任取 k ($k \leq n$) 个元素组成一组(不考虑元素间的先后次序),称为一个组合(combination),此种组合的总数记为 C_n^k ,其计算公式为

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

排列与组合的主要区别在于:如果不讲究取出元素间的顺序,则用组合公式,否则用排列公式. 即,排列与元素的顺序有关,组合则与其顺序无关.

1.2.2 习题 1.2 及其解答

1. 从 10 个同类产品(其中有 8 个正品,2 个次品)中任意抽取 3 个,求:(1) 抽出的 3 个产品中 3 个都是正品的概率;(2) 至少 1 个是次品的概率;(3) 仅有一个次品的概率.

解 设 $A =$ “3 个都是正品”, $B =$ “至少 1 个是次品”, $C =$ “仅有一个次品”,则有

$$(1) \text{ 抽出的 3 个产品中都是正品的概率为 } P(A) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

$$(2) \text{ 至少 1 个是次品的概率为 } P(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{8}{15}.$$

$$(3) \text{ 仅有一个次品的概率为 } P(C) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}.$$

2. 10 个球中有 3 个红球和 7 个绿球,随机地分给 10 个小朋友,每人一球,求最后三个分到球的小朋友中恰有一个得到红球的概率.

解 设 A 表示事件“最后三个分到球的小朋友中恰有一个得到红球”,该问题相当于一个从 10 个球中任取 3 个球分给最后三个小朋友,所以所求概率为 $P(A) = \frac{C_3^1 C_7^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$.

3. 5 人在第一层进入八层楼的电梯,假设每人以相同的概率走出任一层(从第二层开始),求此 5 人在不同层走出的概率是多少?

解 根据题意,所求概率为 $\frac{C_7^5 \times 5!}{7^5} = 0.1499$.

4. 袋中有红、黄、白球各一个,每次任取一个,有放回的抽三次,求下列事件的概率:(1)三个全是红色;(2)三个颜色全同;(3)三个颜色全不同;(4)三个中无红色;(5)三个中无黄色且无白色;(6)三个全红色或全黄色.

解 有放回的抽取三次,共有 $3^3 = 27$ 种情况,设本问题中所求的事件分别为 A, B, C, D, E, F , 则有(1) $P(A) = \frac{1}{27}$; (2) $P(B) = \frac{1}{9}$; (3) $P(C) = \frac{3!}{27} = \frac{2}{9}$; (4) $P(D) = \frac{2^3}{27} = \frac{8}{27}$; (5) $P(E) = P(A) = \frac{1}{27}$; (6) $P(F) = \frac{2}{27}$.

5. 一袋中装有 6 只球,其中 4 只白球,2 只红球.从袋中取球两次,每次随机取一只,取后不放回.试求:(1)取到两只球都是白球的概率;(2)取到两只球颜色相同的概率;(3)取到两只球中至少有一只是白球的概率.

解 设事件 A 为“两只球都是白球”, B 为“两只球都是红球”, C 为“两只球颜色相同”, D 为“两只球中至少有一只是白球”,则

$$(1) P(A) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{2}{5};$$

$$(2) P(B) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_6^1 C_5^1} = \frac{1}{15}, P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15};$$

$$(3) P(D) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

6. 在一本标准英语词典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词,若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列,求能排成上述单词的概率.

解 设 B 表示“能排成上述单词”,则 $P(B) = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{11}{130}$.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶,黑漆 4 桶,红漆 3 桶,在搬运中所有的标签脱落,交货人随意将这些油漆发给客户.问一个订货 4 桶白漆,3 桶黑漆,2 桶红漆的客户,能按所选定颜色如数得到订货的概率是多少?

解 设事件 A 表示“能按所选定颜色如数得到订货”,则所求概率为

$$P(A) = \frac{C_{10}^4 C_4^3 C_3^2}{C_{17}^9} = \frac{252}{2431}.$$

8. 设甲、乙两人相约于下午 2 时到 3 时之间在某地会面,先到者等候另一人 20 min,过时就离去,试求这两人能会面的概率.

解 设甲、乙两人到达某地的时间分别为 x, y . 由于两人都在下午 2 时到 3 时之间到达该地,故时间变化范围是: $2 \leq x \leq 3; 2 \leq y \leq 3$. 即样本空间 Ω 为边长为 1(h)的正方形.

又因两人到达时刻相差不超过 $20 \text{ min} \left(\frac{1}{3} \text{ h} \right)$ 才能会面,因此会面的区域 A 应满足 $|x - y|$

$\leq \frac{1}{3}$, 即样本点 (x, y) 落在两直线 $y = x + \frac{1}{3}$ 和 $y = x - \frac{1}{3}$ 之间并在正方形 Ω 之内(样

本空间 Ω 、区域 A 的图形与原教材中图 1-9 类似, 这里从略). 因此“这两人能会面”的概率

$$\text{为 } \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1 - \frac{4}{9}}{1} = \frac{5}{9}.$$

9. 已知在 10 只产品中有 2 只次品, 在其中取两次, 每次任取一只作不放回抽样. 求下列事件的概率: (1) 两只都是正品; (2) 两只都是次品; (3) 一只正品一只次品.

解 假设所求事件分别为 A, B, C , 则有

$$(1) P(A) = \frac{A_8^2}{A_{10}^2} = \frac{28}{45}; (2) P(B) = \frac{A_2^2}{A_{10}^2} = \frac{1}{45}; (3) P(C) = \frac{2 \times A_8^1 A_2^1}{A_{10}^2} = \frac{16}{45}.$$

10. 在 8 位电话号码中, 求数码 6 恰好出现四次的概率.

解 设事件 A 表示“数码 6 恰好出现四次”, 则基本事件总数为 10^8 , 事件 A 包含的基本事件数为 $C_8^4 \times 9^4$, 所以

$$P(A) = \frac{C_8^4 \times 9^4}{10^8} = \frac{459\,270}{10^8} = 4.592\,7 \times 10^{-3}.$$

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去, 求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

解 基本事件总数为 4^3 , 记事件 A_i 为“杯子中球的最大个数为 $i (i = 1, 2, 3)$ ”, 则有

$$P(A_1) = \frac{A_4^3}{4^3} = \frac{3}{8}; P(A_2) = \frac{C_3^2 \times 4 \times 3}{4^3} = \frac{9}{16}; P(A_3) = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16}.$$

12. 甲、乙两轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头, 它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲船的停泊时间是 1 h, 乙船的停泊时间是 2 h, 求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 自当天零时算起, 甲、乙两轮船到达码头的时刻分别为 x, y , 因此有 $0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24$, 即 Ω 为边长为 24 的正方形.

若要两轮船都不需要等候码头空出, 则当甲船先到时, 乙船应迟到 1 h 以上, 即有 $y - x \geq 1$, 也就是 $y \geq x + 1$; 当乙船先到时, 甲船应迟到 2 h 以上, 即有 $x - y \geq 2$, 也就是 $y \leq x - 2$. 故知区域 G 在直线 $y = x + 1$ 的上方, 在直线 $y = x - 2$ 的下方. 其面积为 $\frac{1}{2} \times 22^2 +$

$$\frac{1}{2} \times 23^2 = 506.5.$$

设事件 A 表示“它们中任何一艘都不需要等候码头空出”, 则

$$P(A) = \frac{506.5}{24^2} = 0.879\,3.$$

13. 从 $[0, 1]$ 区间中随机取得两个数, 求其积不小于 $\frac{3}{16}$, 其和不大于 1 的概率.

解 设所取的两个数为 x, y , 则 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. 把 (x, y) 看作平面 xOy 上