普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程习题解答

韩 明 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程习题解答

韩　明　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书给出了《概率论与数理统计教程》第2版(韩明编著,同济大学出版社出版)中全部习题(407道题)的详细解答. 全书按原教材的章节编写,每节包括内容概要、习题及其解答,书末还附有"概率论与数理统计附表". 本书既可以与原教材配套应用,也可以单独使用.

本书可作为高等院校数学类、统计类等有关专业"概率论与数理统计"课程的学习辅导书,也可作为参加硕士研究生入学考试者的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程习题解答 / 韩明编著. — 上海:同济大学出版社,2018.7

ISBN 978-7-5608-7659-7

Ⅰ.①概… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①概率论—高等学校—题解②数理统计—高等学校—题解 Ⅳ.①O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第000476号

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计教程习题解答

韩 明 编著

责任编辑 张 莉 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

排 版 南京月叶图文制作有限公司

印 刷 上海同济印刷厂有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 17.5

印 数 1—2100

字 数 437 000

版 次 2018年7月第1版 2018年7月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-7659-7

定 价 46.00元

前　言

本书是为《概率论与数理统计教程》第2版(韩明编著,同济大学出版社出版)(以下简称“原教材”)编写的配套学习辅导书.它有以下特点:

(1) 按原教材的章节内容编写,每节包括内容概要、习题及其解答.

(2) 原教材中全部习题都可以在本书中找到详细解答,并标注其在原教材中的题号.

(3) 在解题过程中,对一些初学者不容易理解的地方尽量详细,对少部分题目还给出了一题多解.

(4) 原教材中一些没有展开的内容,其中的某些分部用习题的形式把它们呈现出来,通过对习题的解答,加深对相关内容的理解.从这个意义上来说,习题及其解答可以看作是对原教材内容的补充和延伸.

学习“概率论与数理统计”课程,做习题是必不可少的重要环节.尽管学习了一些定义、定理和性质等,但要达到融会贯通、正确理解和灵活应用,还需要完成一定数量的习题.初学者往往不知道如何入手,包括如何利用已知条件,如何对问题进行分析,如何表述求解过程等.编写本书的主要目的,一是为初学者在如何思考、分析和表达等方面提供学习辅导;二是为准备参加“硕士研究生入学考试”者提供复习指导.

做习题的过程本质上是一个思维的过程,希望读者在未经过独立思考之前,不要轻易去看解答.在遇到不会做的习题时,如果不是把问题弄明白,而是找到答案“一抄了之”,这样就没有达到做习题的真正目的.虽然本书对一些题目还给出了一题多解,但更希望读者能给出优于本书所提供的解答方法,进行深入的思考并举一反三.

美国著名数学家、数学教育家(美国科学院院士)波利亚(George Polya)教授在《怎样解题——数学思维的新方法》中提出,数学解题思维过程可分为四个阶段:理解题目,拟订方案,执行方案以及回顾.其中理解题目是基础,拟订方案是核心,执行方案是目的,回顾是提高.

怎样看待习题解答?著名数学家(中国科学院院士)陈希孺教授在《数理统计习题教程》的“序言”中指出:“对题解一类的书,个人一贯的观点是:善用之则有益,若对它产生依赖心理,以之代替自己的思考,则不惟无益,甚至有害.”

原教材中有一些计算和画图是用MATLAB和R软件来实现的(相关MATLAB代码见原教材的附录B,相关R代码见原教材的第9章——方差分析、第10章——回

归分析).本书中也有少部分习题中的计算和画图部分是用 MATLAB 和 R 软件来完成的,主要是数理统计部分中的一些习题的画图部分,如直方图、box 图、残差图和散点图等;还有一些繁琐的计算,如参数估计、假设检验、方差分析、回归分析中的计算等.

本书在写作过程中,曾与荆广珠教授、李春华副教授进行讨论.本书的初稿完成后,李春华副教授进行了认真审阅,在此一并致谢.

借此机会,感谢读者几年来对本书的关心和厚爱.愿本书的出版对广大师生在"概率论与数理统计"教与学的过程中有所帮助.由于作者水平所限,书中不当之处在所难免,恳请专家和读者批评指正.

韩　明

2018 年 1 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

本章主要包括：随机试验、随机事件，概率的直观意义及其计算，概率的公理化定义和概率的性质，条件概率，独立性，习题 1.1—习题 1.5 解答.

首先按原教材列出每节内容概要，然后列出每节习题并给出其解答.

1.1　随机试验、随机事件

1.1.1　本节内容概要

1. 随机现象

在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象，称为**随机现象**（或**偶然现象**）.

2. 随机试验

如果一个试验同时满足下列条件：

(1) 可以在相同的条件下重复地进行（简称“可重复性”）；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果（简称“不唯一性”）；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现（简称“不确定性”）.

称这样的试验为**随机试验**，有时把随机试验简称为**试验**（experiment），用 E 来表示.

3. 样本空间

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的元素，即试验 E 的每个结果，称为**样本点**，用 ω 来表示.

根据样本空间中样本点的特点，可以把样本空间进行分类：

只包含有限个样本点的样本空间，称为**有限样本空间**；

包含可列个样本点的样本空间，称为**可列样本空间**；

有限样本空间和可列样本空间统称为**离散样本空间**；

全部样本点可以充满某个区间（或区域）的样本空间，称为**连续样本空间**.

4. 随机事件

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**（或“随机试验的某些样本点组成的集合”），简称**事件**（event）. 在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**.

(1) 由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**.

(2) 样本空间 Ω 包含所有样本点，它是自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**.

(3) 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**.

5. 事件间的关系与运算

设试验 E 的样本空间 Ω，而 A，B，$A_i(i=1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，是指事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A=B$.

(2) 事件 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(或事件 A 与事件 B 的**并**). 当且仅当 A，B 中至少有一个事件发生时，事件 $A \cup B$ 发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的和事件.

(3) 事件 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(或事件 A 与事件 B 的**交**). 当且仅当 A，B 同时发生时，事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 简记为 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 A_1，A_2，… 的积事件.

(4) 事件 $A-B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生，B 不发生时，事件 $A-B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B=\Omega$ 且 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**(**或逆事件**). 记事件 A 的对立事件为 $\bar{A}$，$\bar{A}=\Omega-A$.

(6) 若 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**(**或互斥**). 是指事件 A 与事件 B 不能同时发生.

6. 事件的运算定律

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律.

设 A，B，C，$A_i(i=1, 2, \cdots)$ 为事件，则有

交换律 $A \cup B=B \cup A$，$A \cap B=B \cap A$.

结合律 $A \cup(B \cup C)=(A \cup B) \cup C$，$A \cap(B \cap C)=(A \cap B) \cap C$.

分配律 $A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$，

$A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$.

德·摩根(De Morgan)律 $\overline{A \cup B}=\bar{A} \cap \bar{B}$，$\overline{A \cap B}=\bar{A} \cup \bar{B}$.

可以把以上两个事件的德·摩根律推广到有限个事件、可列个事件的情形，即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

7. 在集合论、概率论中符号与意义的对照

在集合论、概率论中符号与意义的对照，见表 1-1.

表 1-1　在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与集合 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与集合 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积事件
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与集合 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件
$A \cap B = \varnothing$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容

1.1.2　习题 1.1 及其解答

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币，用 H 表示正面朝上，用 T 表示反面朝上，观察正面和反面出现的情况；

(2) 将一枚硬币抛掷两次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

(3) 将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数；

(4) 在单位圆内任意取一点，记录它的(直角)坐标；

(5) 掷两颗骰子，观察其点数.

解　以上五个随机试验的样本空间分别为

$\Omega_1 = \{H, T\}$；

$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$；

$\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$；

$\Omega_4 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$；

$\Omega_5 = \{(x, y): x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个相同的球. 若从中任取三个球，请写出这个随机试验的样本空间，并计算基本事件总数.

解　(1)随机试验的样本空间为

$\{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)\}$.

(2) 根据以上随机试验的样本空间,基本事件总数为 10.

3. 设 A, B, C 表示三个随机事件,用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:(1) A, B, C 都发生;(2) A, B, C 都不发生;(3) A, B, C 中至少有两个发生;(4) A, B, C 中恰好有两个发生.

解 (1) ABC;(2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$;(3) $ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$;(4) $\bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup AB\bar{C}$.

4. 一名射手向某个目标射击三次,事件 A_i 表示射手第 i 次射击时击中目标($i=1, 2, 3$).试用文字叙述下列事件:(1) $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$;(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;(3) $\bar{A}_1A_2$;(4) $A_2 \cup \bar{A}_3$.

解 (1) 前两次射击中至少有一次未击中目标;

(2) 三次射击中至少有一次击中目标;

(3) 第一次射击未击中目标且第二次射击击中目标;

(4) 第二次射击击中目标或第三次射击未击中目标.

5. 一位工人生产四个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是不合格品,$i=1, 2, 3, 4$.请用诸 A_i 表示如下事件:(1) 全是合格品;(2) 全是不合格品;(3) 至少有一个零件是不合格品;(4) 恰好有一个零件是不合格品.

解 (1) $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4$;

(2) $A_1A_2A_3A_4$;

(3) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$;

(4) $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$.

6. 叙述下列事件的对立事件:(1)$A=$"抛掷两枚硬币,皆为正面";(2)$B=$"射击三次,皆命中目标";(3)$C=$"加工四个产品,至少有一个正品".

解(1) $\bar{A}=$"抛掷两枚硬币,至少出现一个反面";

(2) $\bar{B}=$"射击三次,至少有一次没命中目标";

(3) $\bar{C}=$"加工四个产品,皆为次品".

7. 下列说法是否正确,为什么?

(1) 若 $A \cup B=\Omega$,则 A, B 互为对立事件;(2) 若 $ABC=\varnothing$,则 A, B, C 互不相容.

解 (1) 不正确.因为 A, B 互为对立事件需要满足两个条件 $A \cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$.

(2) 不正确.例如在抛掷两颗骰子的随机试验中,$A=\{(1, 1), (1, 2)\}$,$B=\{(1, 1), (2, 2)\}$,$C=\{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$,则有 $ABC=\varnothing$,但 $AB=\{(1, 1)\}$,$BC=\{(2, 2)\}$,所以 A, B, C 不是两两互不相容.

8. 在分别标有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的八张卡片中任取一张,设事件 A 为"抽得一张标号不大于 4 的卡片";事件 B 为"抽得一张标号为偶数的卡片";事件 C 为"抽得一张标号为奇数的卡片".请用样本点表示如下事件:

$$A \cup B,\ AB,\ \bar{B},\ A-B,\ B-A,\ BC,\ \overline{B \cup C},\ (A \cup B)C.$$

解 由于 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 4, 6, 8\}$,

$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$，则有

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$AB=\{2,\ 4\}$，$\bar{B}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}=C$，

$A-B=\{1,\ 3\}$，$B-A=\{6,8\}$，$BC=\varnothing$，$\overline{B\cup C}=\varnothing$，$(A\cup B)C=\{1,\ 3\}$.

9. 设 A，B 为两个事件，证明：(1) $B=(AB)\cup(\bar{A}B)$；(2) AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

证明　(1) 根据题意，有 $(AB)\cup(\bar{A}B)=(A\cup\bar{A})B=\Omega B=B$.

(2) 由于 $(AB)(\bar{A}B)=(A\bar{A})B=\varnothing$，所以 AB 与 $\bar{A}B$ 互不相容.

1.2　概率的直观意义及其计算

1.2.1　本节内容概要

1. 频率

定义 1.2.1　在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A，称为事件 A 发生的**频数**，比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**(frequency)，记作 $f_n(A)$.

频率具有下述基本性质：

(1) 对于任意事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) 对于必然事件 Ω，$f_n(\Omega)=1$；

(3) 对于两两互不相容的事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_k，有 $f_n(\bigcup\limits_{i=1}^{k}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

2. 概率的统计定义

定义 1.2.2　在大量重复试验中，若事件 A 发生的频率稳定地在某一个常数 p 附近摆动，则称该常数 p 为事件 A 发生的**概率**(probability)，记作 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

3. 古典型试验与古典概型

具有以下两个特点的试验，称为**古典型试验**：

(1) 试验的样本空间只包含有限个样本点；

(2) 试验中的每一个样本点发生的可能性相等.

定义 1.2.3　设随机试验 E 为古典型试验，它的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\cdots,\omega_n\}$，若事件 A 包含 k 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}\tag{1.2.1}$$

这里 $k=$ 事件 A 所包含样本点的个数，$n=$ 样本空间 Ω 所有样本点的个数.

称满足定义 1.2.3 的概率模型为**古典概型**. 古典概型又称为**等可能概型**.

4. 几何概率

定义 1.2.4　如果试验 E 的样本点有无限多个，其样本空间 Ω 可用一个有度量的几何区域来表示，并且样本点落在 Ω 内任意一点处都是等可能的，其中 A 是 Ω 中的一个区域，样

本点落在区域 A 的概率与 A 的度量(长度、面积、体积等)成正比,而与 A 的位置和形状无关,则样本点落在区域 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.2.2}$$

式中,$m(A)$ 为区域 A 的度量,$m(\Omega)$ 为样本空间 Ω 的度量. 称上述的概率为**几何概率**.

5. 排列与组合公式

(1) 从 n 个不同元素中任取 $k(k\leqslant n)$ 个元素(被取出的元素各不相同),按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 k 个元素的一个**排列**(arrangement),此种排列的总数记为 A_n^k,其计算公式为

$$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

当 $n=k$ 时,称为全排列,此时 $\mathrm{A}_n^n=n!$.

(2) 从 n 个不同元素中任取 $k(k\leqslant n)$ 个元素组成一组(不考虑元素间的先后次序),称为一个**组合**(combination),此种组合的总数记为 C_n^k,其计算公式为

$$\mathrm{C}_n^k=\frac{\mathrm{A}_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

排列与组合的主要区别在于:如果不讲究取出元素间的顺序,则用组合公式,否则用排列公式. 即,排列与元素的顺序有关,组合则与其顺序无关.

1.2.2 习题 1.2 及其解答

1. 从 10 个同类产品(其中有 8 个正品,2 个次品)中任意抽取 3 个,求:(1) 抽出的 3 个产品中 3 个都是正品的概率;(2) 至少 1 个是次品的概率;(3) 仅有一个次品的概率.

解 设 $A=$"3 个都是正品",$B=$"至少 1 个是次品",$C=$"仅有一个次品",则有

(1) 抽出的 3 个产品中都是正品的概率为 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_8^3}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$.

(2) 至少 1 个是次品的概率为 $P(B)=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_8^2+\mathrm{C}_2^2\mathrm{C}_8^1}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{8}{15}$.

(3) 仅有一个次品的概率为 $P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{C}_8^2}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$.

2. 10 个球中有 3 个红球和 7 个绿球,随机地分给 10 个小朋友,每人一球,求最后三个分到球的小朋友中恰有一个得到红球的概率.

解 设 A 表示事件"最后三个分到球的小朋友中恰有一个得到红球",该问题相当于一个从 10 个球中任取 3 个球分给最后三个小朋友,所以所求概率为 $P(A)=\dfrac{\mathrm{C}_3^1\mathrm{C}_7^2}{\mathrm{C}_{10}^3}=\dfrac{21}{40}$.

3. 5 人在第一层进入八层楼的电梯,假设每人以相同的概率走出任一层(从第二层开始),求此 5 人在不同层走出的概率是多少?

解　根据题意，所求概率为 $\dfrac{C_7^5\times 5!}{7^5}=0.1499$.

4. 袋中有红、黄、白球各一个，每次任取一个，有放回的抽三次，求下列事件的概率：(1)三个全是红色；(2)三个颜色全同；(3)三个颜色全不同；(4)三个中无红色；(5)三个中无黄色且无白色；(6)三个全红色或全黄色.

解　有放回的抽取三次，共有 $3^3=27$ 种情况，设本问题中所求的事件分别为 A, B, C, D, E, F, 则有(1) $P(A)=\dfrac{1}{27}$；(2) $P(B)=\dfrac{1}{9}$；(3) $P(C)=\dfrac{3!}{27}=\dfrac{2}{9}$；(4) $P(D)=\dfrac{2^3}{27}=\dfrac{8}{27}$；(5) $P(E)=P(A)=\dfrac{1}{27}$；(6) $P(F)=\dfrac{2}{27}$.

5. 一袋中装有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球. 从袋中取球两次，每次随机取一只，取后不放回. 试求：(1)取到两只球都是白球的概率；(2)取到两只球颜色相同的概率；(3)取到两只球中至少有一只是白球的概率.

解　设事件 A 为“两只球都是白球”，B 为“两只球都是红球”，C 为“两只球颜色相同”，D 为“两只球中至少有一只是白球”，则

(1) $P(A)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\dfrac{2}{5}$；

(2) $P(B)=\dfrac{C_2^1C_1^1}{C_6^1C_5^1}=\dfrac{1}{15}$, $P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{7}{15}$；

(3) $P(D)=1-P(B)=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$.

6. 在一本标准英语词典中有 55 个由两个不相同的字母所组成的单词，若从 26 个英文字母中任取两个字母予以排列，求能排成上述单词的概率.

解　设 B 表示“能排成上述单词”，则 $P(B)=\dfrac{55}{A_{26}^2}=\dfrac{11}{130}$.

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运中所有的标签脱落，交货人随意将这些油漆发给客户. 问一个订货 4 桶白漆，3 桶黑漆，2 桶红漆的客户，能按所选定颜色如数得到订货的概率是多少？

解　设事件 A 表示“能按所选定颜色如数得到订货”，则所求概率为

$$P(A)=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}.$$

8. 设甲、乙两人相约于下午 2 时到 3 时之间在某地会面，先到者等候另一人 20 min，过时就离去，试求这两人能会面的概率.

解　设甲、乙两人到达某地的时间分别为 x, y. 由于两人都在下午 2 时到 3 时之间到达该地，故时间变化范围是：$2\leqslant x\leqslant 3$；$2\leqslant y\leqslant 3$. 即样本空间 Ω 为边长为 1(h)的正方形. 又因两人到达时刻相差不超过 20 min$\left(\dfrac{1}{3}\text{h}\right)$才能会面，因此会面的区域 A 应满足 $|x-y|\leqslant\dfrac{1}{3}$，即样本点 (x, y) 落在两直线 $y=x+\dfrac{1}{3}$ 和 $y=x-\dfrac{1}{3}$ 之间并在正方形 Ω 之内(样

本空间 Ω 、区域 A 的图形与原教材中图 1-9 类似,这里从略). 因此"这两人能会面"的概率为 $\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}=\dfrac{1-\dfrac{4}{9}}{1}=\dfrac{5}{9}$.

9. 已知在 10 只产品中有 2 只次品,在其中取两次,每次任取一只作不放回抽样. 求下列事件的概率:(1)两只都是正品;(2)两只都是次品;(3)一只是正品一只是次品.

解 假设所求事件分别为 A, B, C, 则有

(1) $P(A)=\dfrac{A_8^2}{A_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$; (2) $P(B)=\dfrac{A_2^2}{A_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$; (3) $P(C)=\dfrac{2\times A_8^1A_2^1}{A_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$.

10. 在 8 位电话号码中,求数码 6 恰好出现四次的概率.

解 设事件 A 表示"数码 6 恰好出现四次",则基本事件总数为 10^8, 事件 A 包含的基本事件数为 $C_8^4\times 9^4$, 所以

$$P(A)=\frac{C_8^4\times 9^4}{10^8}=\frac{459\,270}{10^8}=4.592\,7\times 10^{-3}.$$

11. 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

解 基本事件总数为 4^3, 记事件 A_i 为"杯子中球的最大个数为 $i(i=1,2,3)$", 则有

$$P(A_1)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{3}{8};\ P(A_2)=\frac{C_3^2\times 4\times 3}{4^3}=\frac{9}{16};\ P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

12. 甲、乙两轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲船的停泊时间是 1 h,乙船的停泊时间是 2 h,求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 自当天零时算起,甲、乙两轮船到达码头的时刻分别为 x, y, 因此有 $0\leqslant x\leqslant 24$, $0\leqslant y\leqslant 24$, 即 Ω 为边长为 24 的正方形.

若要两轮船都不需要等候码头空出,则当甲船先到时,乙船应迟到 1 h 以上,即有 $y-x\geqslant 1$, 也就是 $y\geqslant x+1$; 当乙船先到时,甲船应迟到 2 h 以上,即有 $x-y\geqslant 2$, 也就是 $y\leqslant x-2$. 故知区域 G 在直线 $y=x+1$ 的上方,在直线 $y=x-2$ 的下方. 其面积为 $\dfrac{1}{2}\times 22^2+\dfrac{1}{2}\times 23^2=506.5$.

设事件 A 表示"它们中任何一艘都不需要等候码头空出",则

$$P(A)=\frac{506.5}{24^2}=0.879\,3.$$

13. 从[0,1]区间中随机取得两个数,求其积不小于 $\dfrac{3}{16}$, 其和不大于 1 的概率.

解 设所取的两个数为 x, y, 则 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$. 把 (x, y) 看作平面 xOy 上