

ONE-DIMENSIONAL FINITE  
ELEMENT METHOD

# 一维有限单元法

左文杰 编著



科学出版社

# 一维有限单元法

左文杰 编著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书以一维杆单元为例,系统地阐述了有限单元法的基本原理、数值方法、程序实现和固体力学领域各类问题中的应用。

全书共 13 章。前 6 章为有限单元法的理论基础,包括直接刚度法,一维杆的“强”形式与“弱”形式,单元和插值函数的构造,加权余量法与虚功原理建立有限元格式,变分原理建立有限元格式。后 7 章为专题部分,包括线性静态有限元分析,线性动态有限元分析,几何非线性有限元分析,材料非线性有限元分析,复合材料多尺度分析,结构灵敏度分析,桁架结构有限元教学软件 EFESTS。本书通过一维杆单元详尽地展示了有限单元法的细节,使读者更容易地学习有限元理论,这是作者的基本出发点,也是本书的特色。

本书适用于力学专业本科生、硕士生教学,可作为机械、土木、航空航天、材料工程和交通运输等理工科专业的研究生教材,也可作为相关专业高等学校教师和工程技术人员的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

—维有限单元法/左文杰编著. —北京: 科学出版社, 2018.7

ISBN 978-7-03-058088-7

I. ①—… II. ①左… III. ①有限元法 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 132773 号

责任编辑: 赵敬伟 / 责任校对: 邹慧卿  
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 耕者工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2018 年 7 月第一次印刷 印张: 15 3/8

字数: 300 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

# 前 言

有限单元法是工程分析中应用最广泛的微分方程数值解法，不仅被普遍地列为工科专业本科生和研究生的学位课程，而且也是相关工程技术人员和教师继续学习的重要内容。自 20 世纪 50 年代有限单元法问世以来，相关专著和教材层出不穷，涵盖的基本内容有：有限元一般原理和表达格式、单元和插值函数、等参元和数值积分、线性问题及其解法、非线性问题及其解法。由于有限元是一种数值方法，对自由度超过 3 个的问题，就不容易在纸面上展开详细推导，所以这些专著和教材基本上都重点关注有限元表达格式的推导，而对有限元理论结合具体单元的推导，以及有限元理论对具体案例的应用过程，细节展示不够。因此给大多数读者的感觉是有限元理论过于抽象和复杂，即使其本身是非常具体的数值方法。作者自 2004 年学习有限单元法以来，也有类似的感受，相关书籍很多，但是容易上手、容易看懂、适合自学的并不多，尤其是非线性有限元，需要很多书籍结合着阅读才能有所理解。

鉴于这些原因，作者选择最简单的一维轴力杆单元来详细地展示有限单元法的基本原理与求解方法。本书首先通过直接刚度法感性地展示有限元的基本过程；接着针对杆单元的“强”形式，构造了各种“弱”形式以及各种变分形式；其次采用杆单元给出了线性静态分析、线性动态分析、几何非线性分析、材料非线性分析、复合材料多尺度分析的有限元格式、解法以及案例的详细步骤；然后推导了有限元方程的导数，也即灵敏度分析；最后给出了作者开发的开源 EFESTS 软件和部分 Matlab 代码。此外，结构灵敏度分析本应是属于结构优化的内容，但是对有限元方程求其导数是个很自然的过程，所以将结构灵敏度分析列在本书中也是一个新的尝试。EFESTS 是个完全面向有限元教学的软件，具有友好的图形用户界面、快速的二维桁架结构有限元建模、详细的有限元分析过程与数据导出、求解过程与结果的可视化，比如单元刚度矩阵的组装过程就是动态可视化的。对于有限元的每种分析方法，书中都通过一个小规模的桁架结构，详细地展示了求解的每一步骤，有助于读者深入理解其基本理论。总之，通过杆单元这只“五脏俱全”的“小麻雀”，较为具体地展示了有限单元法的细节，使读者能够容易地学习有限单元法。同时，建议读者结合其他较为抽象的有限元书籍，互为补充，一起学习有限单元法，避免杆单元“一叶障目”带来的不足。

本书编写得到了多方面的支持、鼓励和帮助。本书列入吉林大学本科“十三五”规划教材、吉林大学机械学院核心课程建设并得到国家自然科学基金项目(51575226)

的资助。研究生黄科、白建涛、方家昕为本书部分章节的整理和 EFESTS 软件部分功能的编写做了卓有成效的工作。在成书过程中,本人妻子金红梅女士和儿子左晋吉为我腾出了本应陪伴他们的大量时间,在此向他们致以衷心的感谢。

本书适用于力学专业本科生、硕士生教学,可作为机械、土木、航空航天、材料工程和交通运输等理工科专业的研究生教材,也可作为相关专业高等学校教师和工程技术人员的参考书。如需要本书配套的 EFESTS 教学软件,以及 Matlab 代码,请写信给作者,信箱 zuowenjie@jlu.edu.cn。

由于水平所限,不妥之处在所难免,敬请读者和同行专家不吝赐教。

作 者

2018 年 3 月于长春

# 符 号 表

## 拉丁字母 (大写)

$A^e$	杆单元的横截面积
$B$	矩阵最大半带宽
$B^e$	单元应变矩阵
$C$	声波传递速度
$D$	出发点的联结度
$D$	对角矩阵
$D_{ep}$	弹塑性矩阵
$E$	弹性模量
$E^H$	等效均质弹性模量
$F^e$	单元载荷列阵
$\bar{F}^e$	扩维后的单元载荷列阵
$\bar{F}^e$	全局坐标系下的单元载荷列阵
$F$	总体载荷列阵
$G$	剪切模量; 后继屈服应力
$H_i$	积分权系数
$J$	Jacobi 矩阵行列式 (Jacobi 系数)
$J$	Jacobi 矩阵
$J_2$	应力偏量的第二不变量
$K^e$	单元刚度矩阵
$\tilde{K}^e$	扩维后的单元刚度矩阵
$\bar{K}^e$	全局坐标系下的单元刚度矩阵
$K$	总体刚度矩阵
$K_M$	材料刚度矩阵
$K_G$	几何刚度矩阵
$K_T^e$	单元切线刚度矩阵
$K_T$	结构切线刚度矩阵

$K_{ep}^e$	单元弹塑性刚度矩阵
$K_{ep}$	结构弹塑性刚度矩阵
$K$	线性强化模型的材料参数
$L$	当前构型下的杆长
$L^e$	集成矩阵
$L$	单位下三角矩阵
$M$	质量矩阵
$M^e$	单元协调质量矩阵
$M_i^e$	单元集中质量矩阵
$\hat{M}$	有效质量矩阵
$N_i$	插值函数
$N_{\max}$	单元节点编号差值的最大值
$N^e$	单元形函数矩阵
$Q_j$	伴随载荷
$R^e$	单元变换矩阵
$T$	下三角矩阵
$T$	系统动能
$T_n$	系统最小固有振动周期
$U$	应变能
$V$	系统势能; 外力势能
$V_n$	$n$ 阶范德蒙德矩阵
$W$	外力虚功
$W_{\text{外}}$	真实外力功
$Y$	特征尺度

### 拉丁字母 (小写)

$b$	单位长度的体力
$f^e$	单元等效节点力列阵
$f$	外力向量
$k$	刚度
$l^e$	杆单元长度
$l_i^{(n-1)}$	$n-1$ 次拉格朗日插值多项式

$m$	单元轴线与全局坐标轴的夹角余弦
$n$	单元轴线与全局坐标轴的夹角余弦
$p$	杆的内力; 拉格朗日乘子
$p^e$	单元内部力向量
$r$	约束反力列阵, 也叫不平衡力列阵
$s_{ij}$	应力偏张量
$s$	单元轴线与全局坐标轴的夹角余弦
$\bar{t}$	端面均布力
$t$	时间
$\Delta t_{cr}$	中心差分法临界步长
$u^e$	局部坐标系下的单元节点位移向量
$\bar{u}^e$	全局坐标系下的单元节点位移向量
$u$	总体节点位移向量
$\dot{u}$	总体节点速度向量
$\ddot{u}$	总体节点加速度向量
$u$	位移
$\bar{u}$	约束位移
$v$	速度
$w$	权函数
$x$	空间直角坐标
$y$	空间直角坐标
$z$	空间直角坐标

## 希腊字母 (大写)

$\Gamma$	域的边界
$\Pi_p$	系统总势能
$\Phi$	模态矩阵
$\Omega$	体积域
$\Gamma_t$	力的边界
$\Gamma_u$	位移边界
$\Pi_c$	系统总余能

## 希腊字母 (小写)



$\alpha$	Newmark 方法的参数
$\beta$	乘大数法中的大数
$\bar{\gamma}$	单胞上的平均体力
$\delta$	变分符号; Newmark 方法的参数
$\delta_{ij}$	Kronecker 符号
$\varepsilon$	应变
$\varepsilon_E$	Cauchy 应变 (工程应变)
$\varepsilon_G$	Green 应变
$\varepsilon_H$	Hencky 应变
$\varepsilon_A$	Almansi 应变
$\varepsilon_M$	中点应变
$\varepsilon_{ij}$	应变张量
$\varepsilon^e$	弹性应变
$\varepsilon^p$	塑性应变
$\bar{\varepsilon}^p$	等效塑性应变
$\zeta$	介电系数
$\theta$	Wilson- $\theta$ 方法中的参数
$\lambda$	特征值; 拉格朗日乘子
$d\lambda$	塑性力学中的一致性参数
$\xi$	自然坐标 ( $-1 \leq \xi \leq 1$ )
$\rho$	材料密度; 移频值
$\sigma$	应力
$\sigma_{ij}$	应力张量
$\sigma_p$	比例极限
$\sigma_E$	工程应力
$\sigma_C$	Cauchy 应力
$\sigma_P$	PK2 应力
$\sigma_A$	Almansi 应力
$\sigma_e$	弹性极限
$\sigma_s$	屈服应力
$\sigma_b$	强度极限
$\tau$	Wilson- $\theta$ 方法中的时间变量

$\phi^e$	单元上的场函数
$\phi$	后继屈服函数
$\phi$	固有振型
$\omega$	固有振动频率
$\omega_n$	最高阶固有振动频率

### 数学运算符号

$[\dots]^T$	转置
$[\dots]^{-1}$	逆
$[\dots]^*$	伴随矩阵
$ \dots $	行列式; 模; 绝对值
$\text{sgn}(\dots)$	符号函数
$\text{Im}(\dots)$	取虚部

# 目 录

前言	
符号表	
第 1 章 绪论	1
1.1 有限单元法的发展史	1
1.2 有限元软件的发展史	3
1.3 本书的写作目的	6
1.4 关于学习本书的建议	6
第 2 章 直接刚度法	8
2.1 一维杆单元	9
2.2 结构平衡方程的组装	11
2.3 边界条件施加与方程求解	15
2.4 二维杆单元	17
2.5 三维杆单元	19
第 3 章 一维杆的“强”形式与“弱”形式	21
3.1 一维杆的微分方程“强”形式	21
3.2 一维杆的积分方程“弱”形式	24
3.3 近似函数的连续性	25
3.4 “强”“弱”形式的等价性	26
3.5 算例	27
第 4 章 单元和插值函数的构造	30
4.1 近似函数的插值	30
4.2 2 节点线性单元	31
4.3 3 节点 2 次单元	33
4.4 直接构造形函数	34
4.4.1 总体坐标内的插值函数	34
4.4.2 自然坐标内的插值函数	35
第 5 章 加权余量法与虚功原理建立有限元格式	37
5.1 伽辽金加权余量法建立有限元格式	37
5.2 虚位移原理建立有限元格式	40
5.2.1 一维杆弹性力学基本方程	40

5.2.2	平衡方程的等效积分“弱”形式——虚位移原理	41
5.2.3	虚位移原理推导平衡方程和面力边界条件	42
<b>第 6 章</b>	<b>变分原理建立有限元格式</b>	<b>45</b>
6.1	最小势能原理	45
6.2	最小势能原理推导杆单元平衡方程和面力边界条件	48
6.3	H-W 变分原理	50
6.4	H-R 变分原理	52
6.5	加权余量法与能量解法的源流关系	53
<b>第 7 章</b>	<b>线性静态有限元分析</b>	<b>55</b>
7.1	数值积分方法	55
7.2	单元刚度矩阵与载荷列阵的解析积分和数值积分	56
7.3	等参数单元	62
7.3.1	等参变换	62
7.3.2	等参变换与换元积分的关系	66
7.4	组装总体刚度矩阵与载荷列阵	67
7.5	矩阵压缩存储	70
7.6	优化结构的最小半带宽	72
7.6.1	基本概念	73
7.6.2	节点编号步骤	73
7.7	引入位移边界条件	75
7.8	求解线性方程组	77
7.9	杆单元节点位移、轴力、轴向应变、结构约束反力的求解	79
7.10	算例	80
7.10.1	2 杆桁架解析算例	80
7.10.2	10 杆桁架数值算例	81
<b>第 8 章</b>	<b>线性动态有限元分析</b>	<b>82</b>
8.1	基本方程	82
8.1.1	弹性动力学的基本方程	82
8.1.2	杆件离散化	83
8.1.3	有限元格式	84
8.2	质量矩阵	85
8.2.1	协调质量矩阵	85
8.2.2	集中质量矩阵	86
8.3	直接积分法	86
8.3.1	中心差分法	87

8.3.2	Wilson- $\theta$ 方法	89
8.3.3	Newmark 方法	90
8.3.4	数值算例	92
8.4	振型叠加法	94
8.4.1	求解固有频率和固有振型	95
8.4.2	求解模态坐标下的动力响应	97
8.4.3	2 杆桁架模态分析的解析算例	98
8.5	大型特征值问题的解法	101
8.5.1	子空间迭代法	101
8.5.2	化广义特征值问题为标准特征值问题	102
8.5.3	Jacobi 旋转法求解标准特征值问题	103
8.5.4	自由模态问题的移频	105
8.5.5	子空间迭代法的数值算例	106
<b>第 9 章</b>	<b>几何非线性有限元分析</b>	<b>112</b>
9.1	应变与应力的度量	112
9.2	完全拉格朗日格式	116
9.2.1	最小势能原理推导平衡方程	120
9.2.2	切线刚度矩阵	121
9.3	非线性方程组的解法	122
9.4	解析算例	124
9.4.1	求解单元切线刚度矩阵	125
9.4.2	组装切线刚度矩阵	126
9.4.3	求解内部力并组装	126
9.4.4	求解平衡方程	127
9.5	数值算例	129
9.5.1	2 杆桁架结构	129
9.5.2	19 杆桁架结构	138
<b>第 10 章</b>	<b>材料非线性有限元分析</b>	<b>140</b>
10.1	各向同性强化模型与随动强化模型	141
10.2	单向应力状态的弹塑性本构方程	142
10.2.1	屈服准则	142
10.2.2	强化法则	143
10.2.3	流动法则	143
10.2.4	一致性准则	143
10.3	弹塑性状态的确定	144

10.4	弹塑性分析的增量有限元格式	146
10.5	弹塑性有限元分析的基本流程	148
10.6	几种常见的等向强化模型	149
10.6.1	线性强化模型	149
10.6.2	二次强化模型	150
10.6.3	指数强化模型	150
10.6.4	Ramberg-Osgood 强化模型	151
10.7	算例	151
10.7.1	3 杆桁架解析算例	151
10.7.2	3 杆桁架数值算例	154
10.7.3	10 杆桁架循环加载算例	164
10.7.4	桁架桥梁结构算例	167
<b>第 11 章</b>	<b>复合材料多尺度分析</b>	<b>170</b>
11.1	摄动法	171
11.2	均匀化方法	173
11.3	算例	177
<b>第 12 章</b>	<b>结构灵敏度分析</b>	<b>180</b>
12.1	静态位移灵敏度分析	181
12.1.1	差分法	181
12.1.2	解析法	182
12.1.3	伴随变量法	182
12.1.4	半解析法	183
12.1.5	复数法	183
12.1.6	算例	184
12.1.7	各种算法的综合比较	184
12.2	应力灵敏度分析	185
12.3	模态灵敏度分析	186
12.4	应变能灵敏度分析	187
12.5	单元层次灵敏度分析	188
12.5.1	尺寸变量灵敏度分析	188
12.5.2	形状变量灵敏度分析	189
12.5.3	材料拓扑灵敏度分析	191
12.6	灵敏度分析算例	192
12.6.1	静态位移灵敏度分析	192
12.6.2	频率灵敏度分析	195

---

<b>第 13 章 桁架结构有限元教学软件 EFESTS</b> .....	197
13.1 软件介绍 .....	197
13.2 前处理 .....	197
13.3 求解器 .....	200
13.3.1 线性静态分析 .....	201
13.3.2 几何非线性静态分析 .....	202
13.3.3 材料非线性静态分析 .....	203
13.3.4 模态分析 .....	205
13.3.5 动力响应分析 .....	206
13.4 位移灵敏度分析 .....	208
13.4.1 解析法 .....	208
13.4.2 伴随变量法 .....	209
13.5 应力灵敏度分析 .....	210
13.6 模态灵敏度分析 .....	211
<b>参考文献</b> .....	212
<b>附录 1 算例数据</b> .....	215
<b>附录 2 桁架结构有限元分析 Matlab 代码与实例</b> .....	220

# 第1章 绪 论

## 1.1 有限单元法的发展史

从应用数学的角度讲,有限单元法的基本思想可以追溯到纽约大学 R. Courant 在 1943 年的工作<sup>[1]</sup>。他首先尝试在一系列三角形区域上定义分片连续函数,并采用最小势能原理求解 St. Venant 扭转问题,但当时无计算机,因此未在工程中应用,也未得到重视和发展。

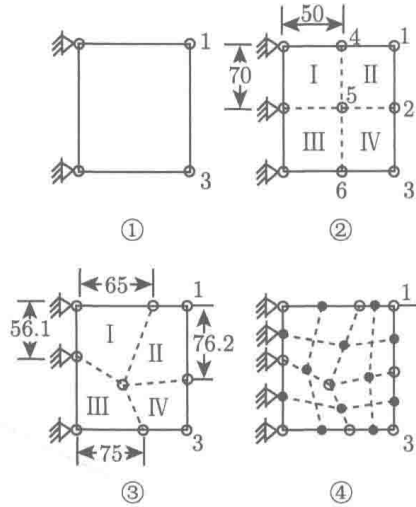
20 世纪 40~50 年代,有限单元法的实际应用是随着电子计算机的出现而开始的。同时,英、美等国家的飞机制造业大幅发展,要求能准确求解飞机的静态和动态性能,由于传统设计分析方法不能满足工程需求,所以逐渐产生了矩阵力学分析方法。1956 年,波音公司的 M. J. Turner, 加州大学伯克利分校的 R. W. Clough, 华盛顿大学的 H. C. Martin 和波音公司的 L. J. Topp 在分析飞机结构的时候研究了离散杆、梁、三角形单元的刚度表达式,三角形单元的刚度矩阵和结构的求解方程是由弹性理论的方程通过直接刚度法确定的<sup>[2]</sup>,他们的研究工作开创了利用电子计算机求解复杂弹性力学问题的新阶段,该工作发表于 *AIAA Journal* 的前身 *Journal of the Aerospace Sciences*。1954 年,斯图加特大学的 J. H. Argyris 提出了结构分析的能量原理<sup>[3]</sup>,并出版了相关书籍<sup>[4]</sup>,为后续有限单元法的研究奠定了重要基础。1960 年,R. W. Clough 进一步求解了平面弹性应力问题,第一次提出并使用“有限单元法”(finite element method)这一术语<sup>[5]</sup>,见图 1-1。1967 年,O. C. Zienkiewicz 与 Y. K. Cheung(张佑启)出版了第一本关于有限单元法的专著<sup>[6]</sup>,此后该书经过前后 6 版的不断更新、多次修订、再版和翻译,从结构、固体扩展到流体,从一卷本扩展到三卷本,凝聚了作者近 40 年的研究成果,荟萃了近千篇文献的精华,培养了全世界几代计算固体力学的人才,深受力学界和工程界科技人员的欢迎,成为有限单元法领域的经典之作,为有限单元法的推广、普及做出了杰出贡献。O. C. Zienkiewicz 对等参数单元<sup>[7]</sup>与缩减积分解决梁、板、壳的剪切锁死问题<sup>[8]</sup>也有突出贡献。此外,O. C. Zienkiewicz 与 D. Gallagher 在 1969 年创建了 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 期刊,大量关于有限单元法的论文在该期刊发表。R. W. Clough, J. H. Argyris 和 O. C. Zienkiewicz 也被公认为有限单元法的世界三大先驱,见图 1-2。关于国外有限元的经典著作还有很多,比如 K. J. Bathe 的 *Finite Element Procedures*; J.



N. Reddy 的 *An Introduction to the Finite Element Method*; D. L. Logan 的 *A First Course in the Finite Element Method*; J. Fish 与 T. Belytschko 的 *A First Course in Finite Elements*, 该书通俗易懂, 适合有限元的入门学习, 写作风格对本人启发很大。



(a) R.W. Clough



(b) 有限单元法, 1956

图 1-1 Clough 及其提出的有限单元法



图 1-2 有限单元法三位大师的最后一面

左: 斯图加特大学 J. H. Argyris; 中: 加州大学伯克利分校 R. W. Clough; 右: 斯旺西大学 O. C.

Zienkiewicz