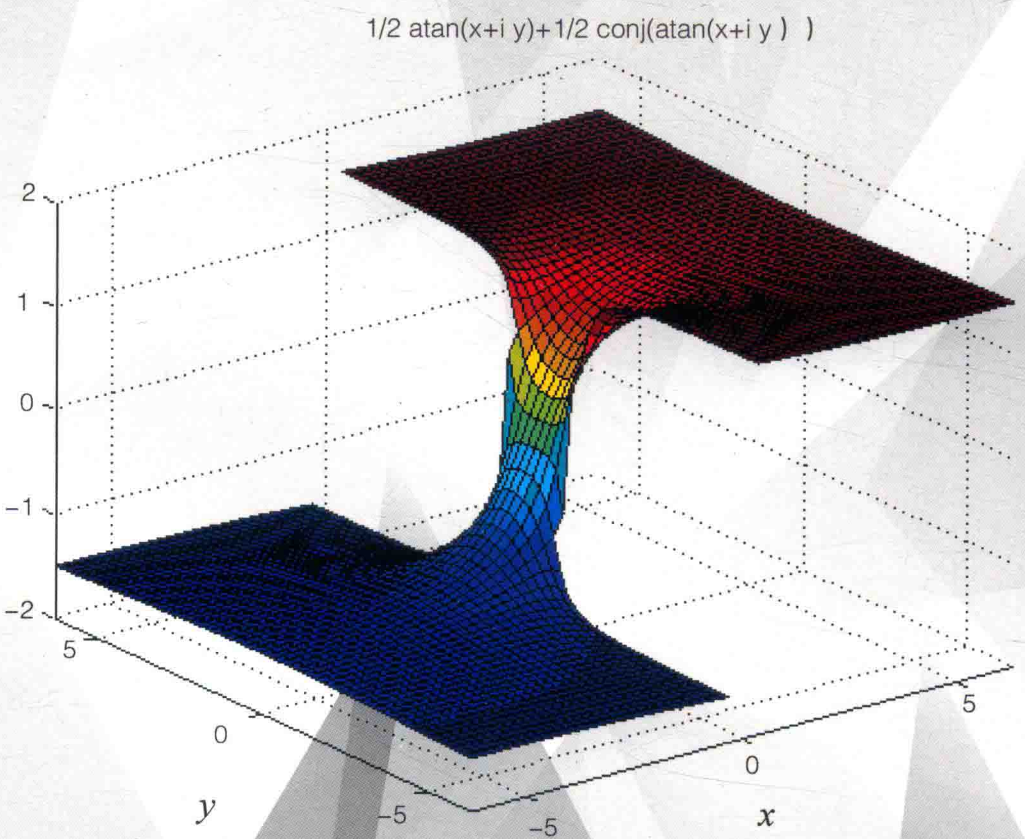
阿尔泰数学教程系列 | 普通高等教育“十三五”规划教材

数学建模实验

Mathematical Modeling Experiments

郑勋烨 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

阿尔泰数学教程系列
普通高等教育“十三五”规划教材

数学建模实验

郑勋烨　编著

西安交通大学出版社
·西 安·

图书在版编目(CIP)数据

数学建模实验 / 郑勋烨编著. —西安 ：西安交通大学出版社，2018.5
ISBN 978-7-5693-0640-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①郑… Ⅲ. ①数学模型-实验-高等学校-教材 Ⅳ. ①O141.4－33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111661 号

书　　名　数学建模实验
编　　著　郑勋烨
责任编辑　李　文

出版发行　西安交通大学出版社
（西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049）
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　陕西日报社

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 16　字数 382 千字
版次印次　2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5693-0640-8
定　　价　35.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。

前言

我从2003年起，多年在学校里担当“全国大学生数学建模与计算机应用竞赛”的辅导工作，十几年来，如履薄冰，未尝稍懈。在与学生朝夕相伴的日子里，深刻感到，学生在撰写论文时遇到的最大困难，往往不是建模的理论，而是编写程序以进行海量数据处理和算法实现，换言之即“理论的实现”，而这无疑是“数学建模实验”应当解决的任务。

对于应用数学、计算机、软件工程等专业的同学，倘若开设过“数学软件”或“数学建模实验”课程，完成上述任务往往不是难事。但更多其他院系、专业的学生，却要从头开始，从最基本的MATLAB/LINDO/LINGO命令，到应用软件编程建模，有如一个海外赤子，从学习字母ABC到与当地土著熟练地摆龙门阵唠嗑，全过程要在短短数周乃至数天之内圆满完成，殊非易事。常听学生在网上目不转睛地百度搜索之余，向我吐露衷肠：“老师，咱们要是有一本自己的讲建模编程的书就好了，简单好用，不用再上网海淘那么多不知道有用还是没用的资料啦！”

习主席教导我们说：“人民对美好生活的向往，就是我们的奋斗目标。”同样，学生向往的美好教材，也是教师们努力的所向。“简单好用”，就是本书致力实现的目标。

本书的两大特色体现在：

(1)简单：本书重在传授编程方法，而非复杂深奥的建模理论，因此在内容设计上，以实验案例为抓手，效法国内数学建模学科的奠基人之一、清华大学萧树铁教授在《数学实验》前言中倡导的：“不讲证明，基本不做笔头练习”，单刀直入，让学生迅速从基本命令过渡到建模编程。简而不浅，通而不俗，涵盖了数学建模初步、差分方程、插值与数值积分、常微分方程、线性代数方程组、非线性方程与方程组、无约束优化、约束优化、整数规划、数据统计分析、统计推断、回归分析等基本而重要的建模门类，虽非面面俱到，却可举一反三。

(2)好用：各章的前部，是数学软件MATLAB/LINDO/LINGO的常用基本命令的演示，使编程零基础的同学也能够照猫画虎，轻松入门。后部则是一些典型的建模案例，每个实验又区分难易，较简单的实验，以程序为单一主体；较复杂的，则设置模型问题、建模求解、程序设计、结果说明等段落，清晰演示一个数学模型从问题提出、模型假设到建模求解、编程实现的全过程，使得学生对基本命令有例可查，对典型方法有法可依。

本书适合大学理工、人文、经管、医学、农学等各院系各专业的师生阅读和练习，只需具备若干基本的微积分、线性代数、概率统计、最优化的常识，以及必备的安装有 MATLAB/LINDO/LINGO 等数学软件的电脑，便可动手来做建模实验，对于参加全国大学生数学建模竞赛的师生尤其适合。

2004 年，我在庐山参加“数学建模讲习班培训”，住在牯岭镇上。有一天出门散步，在漫山遍野的茫茫云海中偶遇了携孙女出游的萧树铁先生，老人家精神矍铄，风雅诙谐，略一接谈，受益匪浅。他在当年主编《数学实验》时，筚路蓝缕，与姜启源、叶其孝、谢金星、张立平、何青、高立、叶俊等诸位前辈一起开创了国内数学建模实验的先河，发轫之功，启示之德，至今泽被后学。本书的撰写，也受到了多位名家和同仁著作的深刻影响，我在书末的“参考文献”中已一一具列，谨表谢忱。

本书出版获得中国地质大学（北京）的“中央高校基本科研业务费专项基金”项目（项目编号：35932015011）和“教学研究与教学改革”项目（项目编号：JGYB201420）的资助，特此鸣谢。

此书是我的“阿尔泰数学教程系列”的第四部。有些内容，可与本系列的前两部《计算方法及 MATLAB 实现》和《概率统计导引》（国防工业出版社出版，百度可以搜索到）相互参看，有心的读者不妨留意。

郑勋烨

公元 2017 年 8 月，农历丁酉鸡年夏于北京雷雨后

目录

第1章　数学建模实验初步

实验1.1　应用指数增长模型和阻滞增长模型拟合人口数据

1.1.1　模型问题

利用表1.1给出的1790—2000年的美国实际人口资料建立下列模型：(1)分段的指数增长模型。将时间分为若干段，分别确定增长率r；(2)阻滞增长模型。换一种方法确定固有增长率r和最大容量x_m。

表1.1　美国人口数据

年	实际人口/百万	计算人口 x1/百万（指数增长模型）	计算人口 x2/百万（指数增长模型）	计算人口 x/百万（阻滞增长模型）
1790	3.9	4.2	6	3.9
1800	5.3	5.5	7.4	5
1810	7.2	7.2	9.1	6.5
1820	9.6	9.5	11.1	8.3
1830	12.9	12.5	13.6	10.7
1840	17.1	16.5	16.6	13.7
1850	23.2	21.7	20.3	17.5
1860	31.4	28.6	24.9	22.3
1870	38.6	37.6	30.5	28.3
1880	50.2	49.5	37.3	35.8
1890	62.9	65.1	45.7	45
1900	76	85.6	55.9	56.2
1910	92		68.4	69.7
1920	106.5		83.7	85.5
1930	123.2		102.5	103.9
1940	131.7		125.5	124.5
1950	150.7		153.6	147.2
1960	179.3		188	171.3
1970	204		230.1	196.2

续表

年	实际人口/百万	计算人口 x1/百万（指数增长模型）	计算人口 x2/百万（指数增长模型）	计算人口 x/百万（阻滞增长模型）
1980	226.5		281.7	221.2
1990	251.4		344.8	245.3
2000	281.4		422.1	

1.1.2 建模求解和程序设计

%实验目的：应用指数增长模型和阻滞增长模型对美国人口数据拟合

(1)分成四组，每组 6 个数据，最后一组用上第三组的后两个数据。

先用前六组数据拟合得到结果如下

General model Exp1：

f(x)＝a＊exp(b＊x)

Coefficients (with 95% confidence bounds)：

a＝8.135e－023 (－1.367e－023，1.764e－022)

b＝0.02919 (0.02855，0.02983)

Goodness of fit：

SSE：0.02324

R－square：0.9998

Adjusted R－square：0.9998

RMSE：0.07622

拟合效果较好，画图如图 1.1 所示。

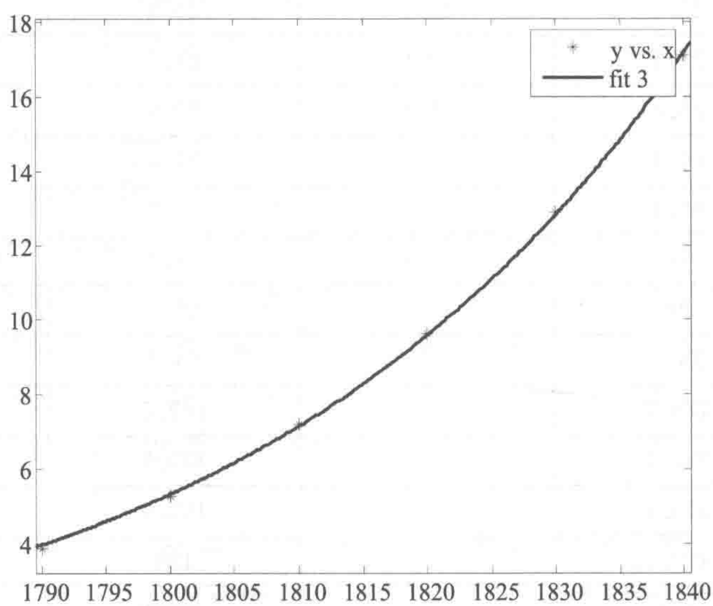


图 1.1 数据拟合曲线(1～6 组)

第 7～12 组结果

General model Exp1：

f(x)=a * exp(b * x)

Coefficients (with 95% confidence bounds)：

a=1.259e−017　(−3.865e−017，6.383e−017)

b=0.02277　(0.02061，0.02493)

Goodness of fit：

SSE：7.591

R−square：0.9962

Adjusted R−square：0.9952

RMSE：1.378

拟合效果如图 1.2 所示。

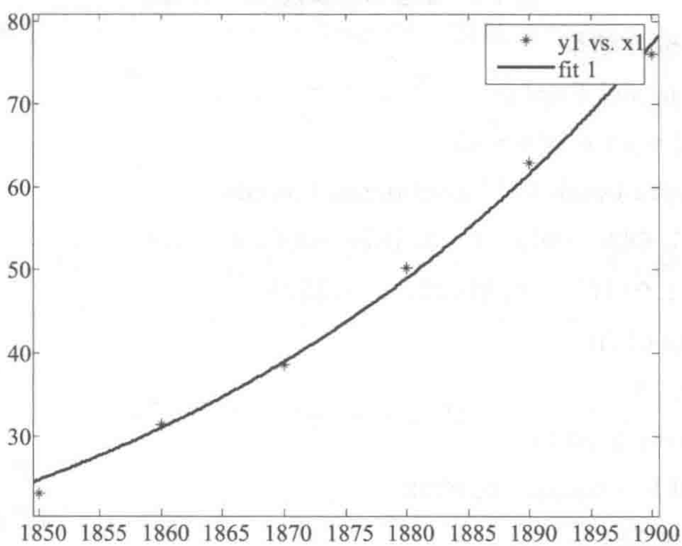


图 1.2　数据拟合曲线(7～12 组)

第 13～18 组拟合结果

General model Exp1：

f(x)=a * exp(b * x)

Coefficients (with 95% confidence bounds)：

a=1.964e−009　(−5.877e−009，9.805e−009)

b=0.01287　(0.01081，0.01492)

Goodness of fit：

SSE：60.86

R−square：0.9876

Adjusted R−square：0.9845

RMSE：3.901

拟合效果如图 1.3 所示。

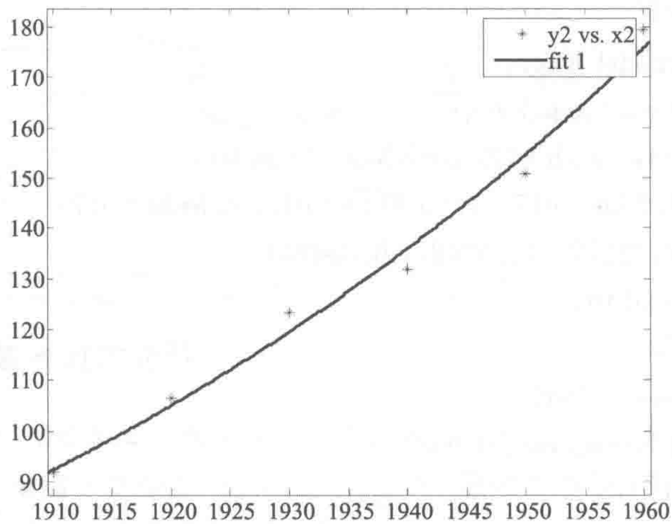


图 1.3 数据拟合曲线(13～18 组)

第 17～22 组拟合结果

General model Exp1：

f(x)＝a＊exp(b＊x)

Coefficients (with 95％ confidence bounds)：

a＝1.683e－008 (－3.167e－008，6.533e－008)

b＝0.01177 (0.01032，0.01323)

Goodness of fit：

SSE：84.04

R－square：0.9926

Adjusted R－square：0.9908

RMSE：4.584

拟合效果如图 1.4 所示。

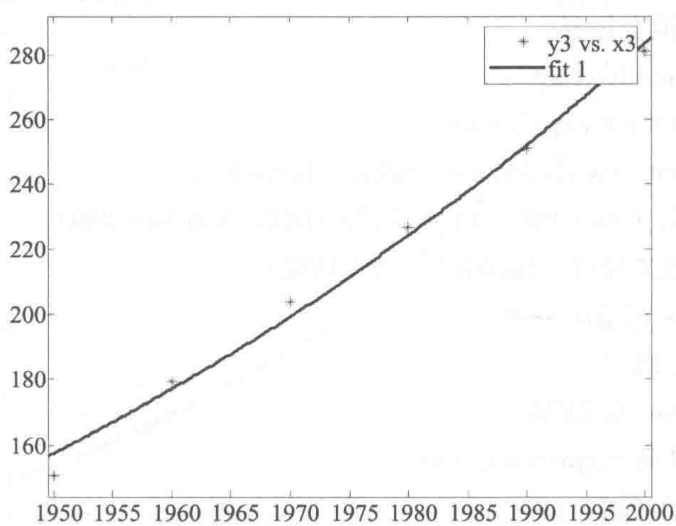


图 1.4 数据拟合曲线(17～22 组)

实验 1.2　包装与售价模型

1.2.1　模型问题

在超市购物时,大包装商品单位重量价格通常比小包装商品便宜。比如某品牌牙膏,50 克装的每支 1.50 元,120 克装的每支 3.00 元,二者单位重量的价格比是 1.2:1。试构造模型解释这个现象。

1.2.2　建模求解和程序设计

(1)假设商品外包装的形状为正方体(边长为 a),商品的密度为 ρ,商品的单位成本为 c_1,包装成本与产品包装的表面积成正比(比例系数为 k),其他成本为常数 m,则可以建立模型,商品价格为 $P=c_1w+6ka^2+m$,其中 a 满足 $w=\rho a^3$。

(2)单位重量价格 $c=\dfrac{P}{w}=\dfrac{c_1w+6k\,(w/\rho)^{2/3}+m}{w}$。令 $m=0.2$,由已知数据计算可得 $c_1=0.0155$,$k=0.0096$。

编程如下:

```
fun=inline('[(x(1)*50+6*x(2)*(50/1.8)^(2/3)+0.2)/50-1.5/50,(x(1)*120+6*x(2)*(120/1.8)^(2/3)+0.2)/120-3.0/120]','x');
[x,f,h]=fsolve(fun,[0,0]);
fun=inline('(0.0155*w+6*0.0096*(w/1.8)^(2/3)+0.2)/w','w');
fplot(fun,[0,300]);
```

由此生成图像如图 1.5 所示。

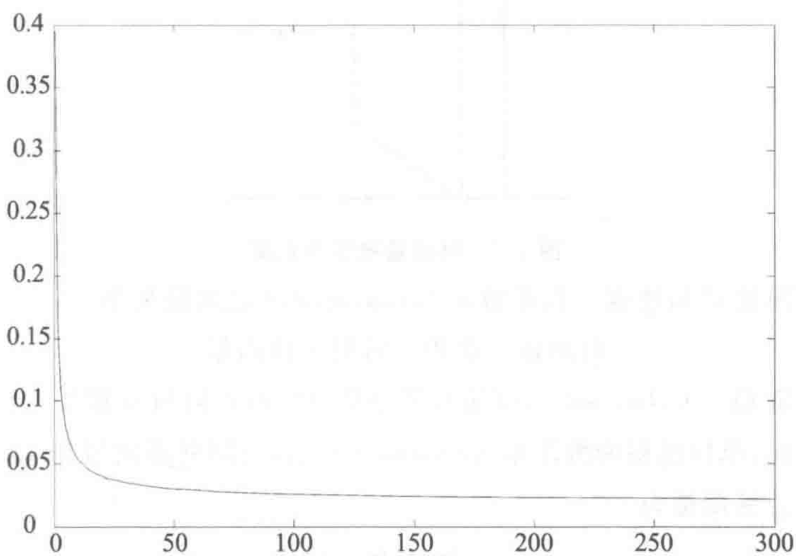


图 1.5　包装价格曲线

由图 1.5 可知，随着体积的扩大，单位重量的价格变化微小，趋近于极限 0.0155。符合实际情况，实际生活中，单位重量的价格随着体积的不断扩大，趋近于商品的生产成本。

实验 1.3 淋雨量模型

1.3.1 模型问题

要在雨中从一处走到另一处，假设雨的方向和大小都不变，试建立一个模型讨论是否走得越快，淋雨量越小。设人体为长方柱，表面积之比为前∶侧∶顶＝1∶a∶b。人沿 x 方向以速度 v 前进，而雨速在 x,y,z 方向的分量为 u_x,u_y,u_z。写出淋雨量的表达式，画出淋雨量随 v 变化的曲线，从而确定在什么情况下走得越快，淋雨量越小，在什么情况下不是这样。

1.3.2 建模求解

(1)假设雨从迎面吹来，雨线与跑步方向在同一平面内，且与人体的夹角为 θ，人的前、侧、顶表面积分别为 s,as,bs，雨速为 u，降雨量为 w cm/h，d 为两地之间的距离，如图 1.6 所示。

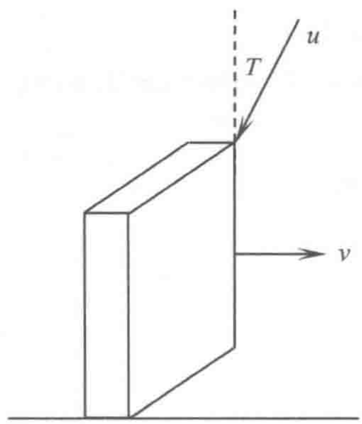


图 1.6 淋雨量模型示意图

建立总淋雨量 V 与速度 v 及参数 a,b,s,u,w,d,θ 之间的关系：

淋雨量＝面积×时间×降雨量

顶部淋雨量 $Q_1=bsdw\cos\theta/v$，雨速水平分量 $u\sin\theta$，方向与 v 相反，合速度 $u\sin\theta+v$，迎面单位时间、单位面积的淋雨量 $w(u\sin\theta+v)/u$，故迎面淋雨量为 $Q_2=sdw(u\sin\theta+v)/uv$，所以总淋雨量为

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{sdw}{u}\cdot\frac{bu\cos\theta+(u\sin\theta+v)}{v}$$

易知 Q 为 v 的单调递减函数，故人的速度越大，淋雨量越小。

(2)假设雨从背后吹来，雨线与跑步方向在同一平面内，且与人体的夹角为 α，此时与(1)不同的是合速度为 $|u\sin\alpha - v|$，于是总淋雨量为

$$Q=\begin{cases}\dfrac{sdw}{u}\cdot\dfrac{bu\cos\alpha+(u\sin\alpha-v)}{v}=\dfrac{sdw}{u}\cdot\dfrac{u(b\cos\alpha+\sin\alpha)-v}{v}, & v<u\sin\alpha\\[2ex] \dfrac{sdw}{u}\cdot\dfrac{bu\cos\alpha+(v-u\sin\alpha)}{v}=\dfrac{sdw}{u}\cdot\dfrac{u(b\cos\alpha-\sin\alpha)+v}{v}, & v\geqslant u\sin\alpha\end{cases}$$

若 $b\cos\alpha-\sin\alpha<0$，即 $b<\tan\alpha$ 时，则 $v=u\sin\alpha$ 时 Q 最小。否则，$v=v_m$ 时 Q 最小。

第2章 差分方程

实验 2.1 自然物种数量演变规律(一阶线性差分方程)

2.1.1 模型问题

仙鹤在良好自然环境下(如新疆天鹅湖或齐齐哈尔仙鹤故乡)的“鹤口”自然增长率为 1.94%,在中等和下等自然环境下(如上海外滩或蒙古戈壁)则为负增长,增长率分别为−3.24%和−3.82%。若在某自然保护区内有 100 只仙鹤,建立描述其变化规律的模型,并作数值计算。若每年人工孵化 5 只仙鹤放还保护区,则在中等环境下仙鹤数量将如何变化?

%实验目的:应用一阶差分方程 $x(k+1)=(1+r)*x(k)$;$c(k+1)=(1-q)*c(k)$。求自然物种数量演变规律曲线。

2.1.2 建模求解

(1) 标记第 k 年的仙鹤数量为 x_k,自然环境下的自然增长率为 r,且 $a=1+r$,则第 $k+1$ 年的仙鹤数量为 x_{k+1},其中

$$x_{k+1} = ax_k, a = 1+r, k = 1,2,\cdots$$

其解为 $x_k=a^k x_0$,显然,当自然增长率为 $r<0$,即 $a=1+r<1$ 时,$\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\lim\limits_{k\to\infty} a^k x_0=0$,这意味着在中等和下等环境下,仙鹤数量趋向于零,即濒临灭绝。

%主要命令:round, plot gtext

%首先建立 M 文件:

```
function y=exf11(x0,n,r) % x0,n,r 可调节更改
a=1+r;
x(1)=x0; %赋初始值
for k=1:n-1
x(k+1)=a*x(k);
end
y=x';
%调用建立好的 m 文件
%源程序:
```