

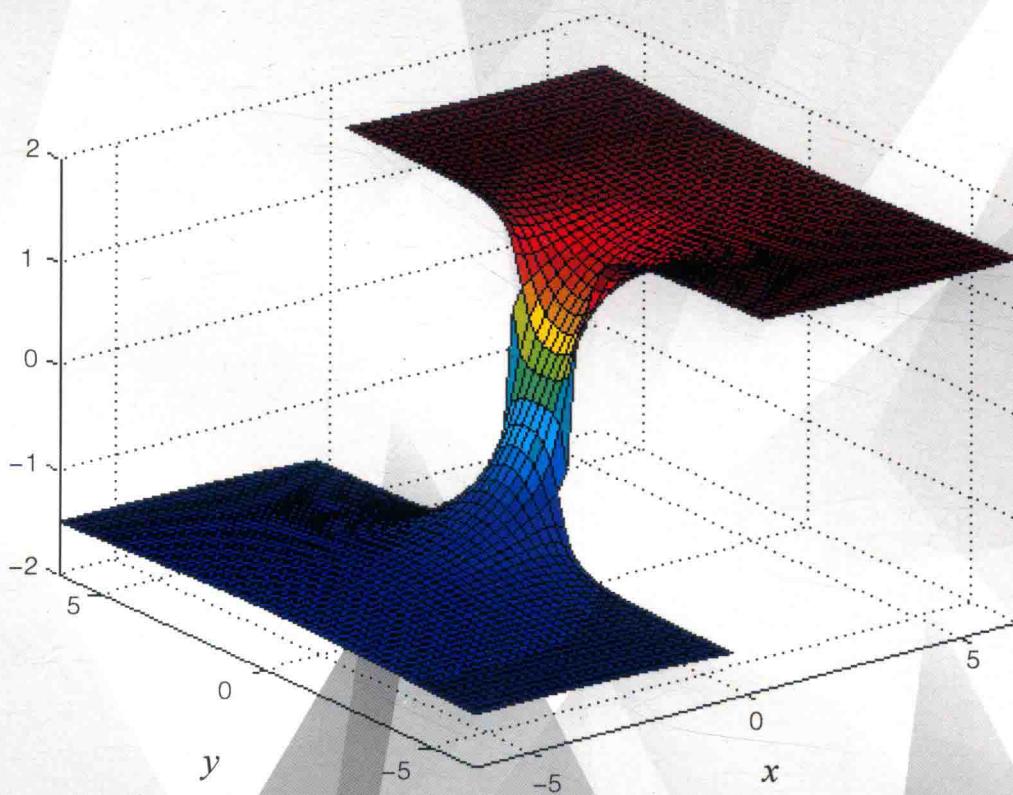
阿尔泰数学教程系列 | 普通高等教育“十三五”规划教材

# 数学建模实验

Mathematical Modeling Experiments

郑勋烨 编著

$$1/2 \operatorname{atan}(x+i y)+1/2 \operatorname{conj}(\operatorname{atan}(x+i y))$$



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

阿尔泰数学教程系列  
普通高等教育“十三五”规划教材

# 数学建模实验

郑勋烨 编著



西安交通大学出版社

• 西安 •

图书在版编目(CIP)数据

数学建模实验 / 郑勋烨编著. —西安 : 西安交通大学出版社, 2018.5  
ISBN 978-7-5693-0640-8

I. ①数… II. ①郑… III. ①数学模型—实验—高等学校—教材 IV. ①0141.4—33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111661 号

书 名 数学建模实验  
编 著 郑勋烨  
责任编辑 李 文

出版发行 西安交通大学出版社  
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)  
网 址 <http://www.xjtpress.com>  
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)  
(029)82668315(总编办)  
传 真 (029)82668280  
印 刷 陕西日报社

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16 字数 382 千字  
版次印次 2018 年 7 月第 1 版 2018 年 7 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5693-0640-8  
定 价 35.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究

## 前言

我从 2003 年起,多年在学校里担当“全国大学生数学建模与计算机应用竞赛”的辅导工作,十几年来,如履薄冰,未尝稍懈。在与学生朝夕相伴的日子里,深刻感到,学生在撰写论文时遇到的最大困难,往往不是建模的理论,而是编写程序以进行海量数据处理和算法实现,换言之即“理论的实现”,而这无疑是“数学建模实验”应当解决的任务。

对于应用数学、计算机、软件工程等专业的同学,倘若开设过“数学软件”或“数学建模实验”课程,完成上述任务往往不是难事。但更多其他院系、专业的学生,却要从头开始,从最基本的 MATLAB/LINDO/LINGO 命令,到应用软件编程建模,有如一个海外赤子,从学习字母 ABC 到与当地土著熟练地摆龙门阵唠嗑,全过程要在短短数周乃至数天之内圆满完成,殊非易事。常听学生在网上目不转睛地百度搜索之余,向我吐露衷肠:“老师,咱们要是有一本自己的讲建模编程的书就好了,简单好用,不用再上网海淘那么多不知道有用还是没用的资料啦!”

习主席教导我们说:“人民对美好生活的向往,就是我们的奋斗目标。”同样,学生向往的美好教材,也是教师们努力的所向。“简单好用”,就是本书致力实现的目标。

本书的两大特色体现在:

(1)简单:本书重在传授编程方法,而非复杂深奥的建模理论,因此在内容设计上,以实验案例为抓手,效法国内数学建模学科的奠基人之一、清华大学萧树铁教授在《数学实验》前言中倡导的:“不讲证明,基本不做笔头练习”,单刀直入,让学生迅速从基本命令过渡到建模编程。简而不浅,通而不俗,涵盖了数学建模初步、差分方程、插值与数值积分、常微分方程、线性代数方程组、非线性方程与方程组、无约束优化、约束优化、整数规划、数据统计分析、统计推断、回归分析等基本而重要的建模门类,虽非面面俱到,却可举一反三。

(2)好用:各章的前部,是数学软件 MATLAB/LINDO/LINGO 的常用基本命令的演示,使编程零基础的同学也能够照猫画虎,轻松入门。后部则是一些典型的建模案例,每个实验又区分难易,较简单的实验,以程序为单一主体;较复杂的,则设置模型问题、建模求解、程序设计、结果说明等段落,清晰演示一个数学模型从问题提出、模型假设到建模求解、编程实现的全过程,使得学生对基本命令有例可查,对典型方法有法可依。

本书适合大学理工、人文、经管、医学、农学等各院系各专业的师生阅读和练习,只需具备若干基本的微积分、线性代数、概率统计、最优化的常识,以及必备的安装有 MATLAB/LINDO/LINGO 等数学软件的电脑,便可动手来做建模实验,对于参加全国大学生数学建模竞赛的师生尤其适合。

2004 年,我在庐山参加“数学建模讲习班培训”,住在牯岭镇上。有一天出门散步,在漫山遍野的茫茫云海里偶遇了携孙女出游的萧树铁先生,老人家精神矍铄,风雅诙谐,略一接谈,受益匪浅。他在当年主编《数学实验》时,筚路蓝缕,与姜启源、叶其孝、谢金星、张立平、何青、高立、叶俊等诸位前辈一起开创了国内数学建模实验的先河,发轫之功,启示之德,至今泽被后学。本书的撰写,也受到了多位名家和同仁著作的深刻影响,我在书末的“参考文献”中已一一具列,谨表谢忱。

本书出版获得中国地质大学(北京)的“中央高校基本科研业务费专项基金”项目(项目编号:35932015011)和“教学研究与教学改革”项目(项目编号:JGYB201420)的资助,特此鸣谢。

此书是我的“阿尔泰数学教程系列”的第四部。有些内容,可与本系列的前两部《计算方法及 MATLAB 实现》和《概率统计导引》(国防工业出版社出版,百度可以搜索到)相互参看,有心的读者不妨留意。

郑勋烨

公元 2017 年 8 月,农历丁酉鸡年夏于北京雷雨后

# 目 录

## 前言

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 第 1 章 数学建模实验初步 .....                      | 1  |
| 实验 1.1 应用指数增长模型和阻滞增长模型拟合人口数据 .....        | 1  |
| 实验 1.2 包装与售价模型 .....                      | 5  |
| 实验 1.3 淋雨量模型 .....                        | 6  |
| 第 2 章 差分方程 .....                          | 8  |
| 实验 2.1 自然物种数量演变规律(一阶线性差分方程) .....         | 8  |
| 实验 2.2 自然物种数量演变规律(高阶线性差分方程) .....         | 13 |
| 实验 2.3 汽车数量的转移模型(常系数线性差分方程组) .....        | 16 |
| 实验 2.4 离散型 Logistic 阻滞增长模型(非线性差分方程) ..... | 19 |
| 实验 2.5 寄主-寄生增长模型(非线性差分方程) .....           | 23 |
| 第 3 章 插值与数值积分 .....                       | 25 |
| 实验 3.1 指数函数 $\exp(x)$ 的 Lagrange 插值 ..... | 25 |
| 实验 3.2 高次插值的龙格振荡现象 .....                  | 26 |
| 实验 3.3 高次插值的龙格振荡现象与三次样条插值的比较 .....        | 27 |
| 实验 3.4 插值曲面从粗糙到精细的绘制 .....                | 29 |
| 实验 3.5 随机数据点插值曲面 .....                    | 32 |
| 实验 3.6 删除若干随机点生成的插值曲面 .....               | 34 |
| 实验 3.7 卫星轨道长度椭圆积分计算 .....                 | 36 |
| 实验 3.8 用梯形公式和辛普森公式计算数值积分 .....            | 37 |
| 实验 3.9 机翼加工断面的面积计算 .....                  | 38 |
| 实验 3.10 国土面积计算 .....                      | 39 |
| 实验 3.11 桥梁上的车流量计算 .....                   | 41 |

|                                          |    |
|------------------------------------------|----|
| 第 4 章 常微分方程 .....                        | 43 |
| 实验 4.1 改进欧拉方法 .....                      | 43 |
| 实验 4.2 四阶龙格-库塔经典公式 .....                 | 44 |
| 实验 4.3 五级四阶龙格-库塔公式命令 ode45 的直接调用 .....   | 45 |
| 实验 4.4 五级四阶龙格-库塔公式命令 ode45 的直接调用 .....   | 46 |
| 实验 4.5 刚性方程龙格-库塔公式命令 ode23s 的直接调用 .....  | 46 |
| 实验 4.6 应用 dsolve 命令求常微分方程的符号解 .....      | 48 |
| 实验 4.7 应用 dsolve 命令求常微分方程的符号解 .....      | 48 |
| 实验 4.8 应用 dsolve 命令求常微分方程组的符号解 .....     | 49 |
| 实验 4.9 应用 dsolves 命令求常微分方程组的符号解 .....    | 50 |
| 实验 4.10 弱肉强食的伏尔泰拉(Volterra)方程 .....      | 50 |
| 实验 4.11 火箭飞行模型 .....                     | 54 |
| 第 5 章 线性代数方程组 .....                      | 63 |
| 实验 5.1 基本高斯消去法(不选主元素) .....              | 63 |
| 实验 5.2 列主元高斯消去法 .....                    | 65 |
| 实验 5.3 魔方矩阵(Magic Matrix)的 LU 分解 .....   | 67 |
| 实验 5.4 帕斯卡矩阵(Pascal Matrix)的平方根分解 .....  | 69 |
| 实验 5.5 矩阵的各种范数求法 .....                   | 69 |
| 实验 5.6 魔方矩阵的正交三角 QR 分解 .....             | 70 |
| 实验 5.7 魔方矩阵的奇异值分解(SVD) .....             | 72 |
| 实验 5.8 魔方矩阵的海森伯格(Hessenberg)分解 .....     | 74 |
| 实验 5.9 友矩阵(Companion Matrix)与多项式求根 ..... | 76 |
| 实验 5.10 矩阵对角化判别(Triangle Matrix) .....   | 77 |
| 实验 5.11 自然物种数量演变规律 .....                 | 78 |
| 实验 5.12 汽车刹车距离的超定方程组模型 .....             | 79 |
| 实验 5.13 钢架结构受力分析模型 .....                 | 81 |
| 第 6 章 非线性方程和方程组 .....                    | 84 |
| 实验 6.1 用 fzero 命令求解三次方程 .....            | 84 |
| 实验 6.2 用 fzero 命令求解三角方程 .....            | 84 |
| 实验 6.3 用二分法求解非连续函数零点 .....               | 84 |
| 实验 6.4 用 fsolve 命令求解非线性方程组 .....         | 85 |
| 实验 6.5 用 solve 命令求解标准形式的二次方程 .....       | 86 |
| 实验 6.6 用 solve 命令求非线性方程组符号解 .....        | 86 |

|                       |                                                      |     |
|-----------------------|------------------------------------------------------|-----|
| 实验 6.7                | 用 solve 命令求非线性方程组数值解 .....                           | 87  |
| 实验 6.8                | 用 solve 和 fsolve 命令求解非线性方程组的对比 .....                 | 88  |
| 实验 6.9                | 用 plot 命令绘制非线性函数草图 .....                             | 91  |
| 实验 6.10               | 路灯照明问题 .....                                         | 94  |
| 实验 6.11               | 分岔与混沌现象 .....                                        | 96  |
| 实验 6.12               | 几何计算模型 .....                                         | 97  |
| 实验 6.13               | 市场经济中的混沌模型 .....                                     | 98  |
| <br>第 7 章 无约束优化 ..... |                                                      | 103 |
| 实验 7.1                | 应用 fminbnd 求有界单变量优化问题 .....                          | 103 |
| 实验 7.2                | 应用 <i>fminunc</i> 和 <i>fminsearch</i> 求非线性优化问题 ..... | 103 |
| 实验 7.3                | 应用 lsqcurvefit 拟合非线性最小二乘优化系数 .....                   | 104 |
| 实验 7.4                | 应用 <i>lsqnonlin</i> 拟合非线性最小二乘优化系数 .....              | 104 |
| 实验 7.5                | 应用 optimset 求双变量优化问题 .....                           | 105 |
| 实验 7.6                | 应用 mesh 和 contour 命令画网格图和等高线图 .....                  | 106 |
| 实验 7.7                | 应用 optimset 和 fminunc 命令计算目标函数的梯度 .....              | 108 |
| 实验 7.8                | 最佳产销量安排 .....                                        | 109 |
| 实验 7.9                | 飞机的精确定位 .....                                        | 111 |
| 实验 7.10               | 可调电阻电路模型 .....                                       | 114 |
| 实验 7.11               | 海岛服务站选址模型 .....                                      | 115 |
| <br>第 8 章 约束优化 .....  |                                                      | 117 |
| 实验 8.1                | 应用 linprog 命令求解线性规划问题 .....                          | 117 |
| 实验 8.2                | 应用 linprog 命令求解线性规划问题 .....                          | 118 |
| 实验 8.3                | 应用 quadprog 命令求解二次规划问题 .....                         | 120 |
| 实验 8.4                | 生产销售的线性规划问题 .....                                    | 122 |
| 实验 8.5                | 投资组合问题的二次规划 .....                                    | 126 |
| 实验 8.6                | 水库供水方案模型 .....                                       | 130 |
| 实验 8.7                | 开发商圈地模型 .....                                        | 135 |
| 实验 8.8                | 利润最大化模型 .....                                        | 137 |
| <br>第 9 章 整数规划 .....  |                                                      | 140 |
| 实验 9.1                | 应用 LINDO 求解线性规划 .....                                | 140 |
| 实验 9.2                | 应用 LINDO 求解整数规划 .....                                | 142 |
| 实验 9.3                | 最短行驶路线的动态规划 .....                                    | 143 |

|                                           |     |
|-------------------------------------------|-----|
| 实验 9.4 选课方案模型 .....                       | 146 |
| 实验 9.5 钢管下料模型 .....                       | 150 |
| 实验 9.6 原油采购与加工方案 .....                    | 159 |
| <br>                                      |     |
| 第 10 章 数据统计分析 .....                       | 163 |
| 实验 10.1 成绩统计模型 .....                      | 163 |
| 实验 10.2 应用 dlmread 命令剥离数据 .....           | 164 |
| 实验 10.3 概率分布与数字特征分析模型 .....               | 165 |
| 实验 10.4 $3\sigma(3\sigma)$ 法则的验证 .....    | 166 |
| 实验 10.5 正态分布模型 .....                      | 167 |
| 实验 10.6 蒙特卡罗随机模拟投点法计算二重积分 .....           | 168 |
| 实验 10.7 蒙特卡罗投点法和均值法计算圆周率 $\pi$ 的近似值 ..... | 170 |
| 实验 10.8 我是卖报小行家(报童的收入问题) .....            | 172 |
| 实验 10.9 路灯更换方案 .....                      | 174 |
| 实验 10.10 冰淇淋的体积计算模型 .....                 | 177 |
| <br>                                      |     |
| 第 11 章 统计推断 .....                         | 179 |
| 实验 11.1 假设检验(双边置信区间) .....                | 179 |
| 实验 11.2 假设检验(单边置信区间) .....                | 180 |
| 实验 11.3 双正态总体均值相等的 $z$ 检验 .....           | 181 |
| 实验 11.4 少年身高增长模型 .....                    | 183 |
| 实验 11.5 吸烟对血压的影响 .....                    | 187 |
| 实验 11.6 汽油供货质量检验模型 .....                  | 189 |
| 实验 11.7 医疗化验诊断模型 .....                    | 192 |
| <br>                                      |     |
| 第 12 章 回归分析 .....                         | 194 |
| 实验 12.1 一元线性回归(血压与年龄) .....               | 194 |
| 实验 12.2 多元线性回归(血压与年龄、体重和吸烟) .....         | 196 |
| 实验 12.3 多项式回归(商品销量与价格) .....              | 198 |
| 实验 12.4 逐步回归(儿童体重与身高和年龄之关系) .....         | 202 |
| 实验 12.5 非线性回归(酶促反应) .....                 | 205 |
| 实验 12.6 广告费回归模型 .....                     | 209 |
| <br>                                      |     |
| 习题 .....                                  | 212 |
| 参考文献 .....                                | 244 |

# 第 1 章 数学建模实验初步

## 实验 1.1 应用指数增长模型和阻滞增长模型拟合人口数据

### 1.1.1 模型问题

利用表 1.1 给出的 1790—2000 年的美国实际人口资料建立下列模型：(1)分段的指数增长模型。将时间分为若干段,分别确定增长率  $r$ ;(2)阻滞增长模型。换一种方法确定固有增长率  $r$  和最大容量  $x_m$ 。

表 1.1 美国人口数据

| 年    | 实际人口/百万 | 计算人口 $x_1$ /百万<br>(指数增长模型) | 计算人口 $x_2$ /百万<br>(指数增长模型) | 计算人口 $x$ /百万<br>(阻滞增长模型) |
|------|---------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1790 | 3.9     | 4.2                        | 6                          | 3.9                      |
| 1800 | 5.3     | 5.5                        | 7.4                        | 5                        |
| 1810 | 7.2     | 7.2                        | 9.1                        | 6.5                      |
| 1820 | 9.6     | 9.5                        | 11.1                       | 8.3                      |
| 1830 | 12.9    | 12.5                       | 13.6                       | 10.7                     |
| 1840 | 17.1    | 16.5                       | 16.6                       | 13.7                     |
| 1850 | 23.2    | 21.7                       | 20.3                       | 17.5                     |
| 1860 | 31.4    | 28.6                       | 24.9                       | 22.3                     |
| 1870 | 38.6    | 37.6                       | 30.5                       | 28.3                     |
| 1880 | 50.2    | 49.5                       | 37.3                       | 35.8                     |
| 1890 | 62.9    | 65.1                       | 45.7                       | 45                       |
| 1900 | 76      | 85.6                       | 55.9                       | 56.2                     |
| 1910 | 92      |                            | 68.4                       | 69.7                     |
| 1920 | 106.5   |                            | 83.7                       | 85.5                     |
| 1930 | 123.2   |                            | 102.5                      | 103.9                    |
| 1940 | 131.7   |                            | 125.5                      | 124.5                    |
| 1950 | 150.7   |                            | 153.6                      | 147.2                    |
| 1960 | 179.3   |                            | 188                        | 171.3                    |
| 1970 | 204     |                            | 230.1                      | 196.2                    |

续表

| 年    | 实际人口/百万 | 计算人口 x1/百万<br>(指数增长模型) | 计算人口 x2/百万<br>(指数增长模型) | 计算人口 x/百万<br>(阻滞增长模型) |
|------|---------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| 1980 | 226.5   |                        | 281.7                  | 221.2                 |
| 1990 | 251.4   |                        | 344.8                  | 245.3                 |
| 2000 | 281.4   |                        | 422.1                  |                       |

1.1.2 建模求解和程序设计

%实验目的:应用指数增长模型和阻滞增长模型对美国人口数据拟合

(1)分成四组,每组 6 个数据,最后一组用上第三组的后两个数据。

先用前六组数据拟合得到结果如下

General model Expl:

$$f(x)=a*\exp(b*x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a=8.135e-023\ (-1.367e-023,\ 1.764e-022)$$

$$b=0.02919\ (0.02855,\ 0.02983)$$

Goodness of fit:

SSE: 0.02324

R-square: 0.9998

Adjusted R-square: 0.9998

RMSE: 0.07622

拟合效果较好,画图如图 1.1 所示。

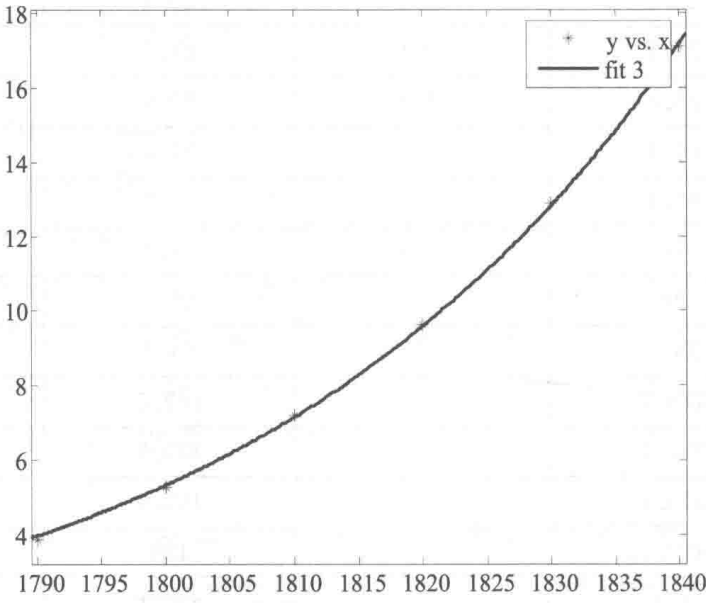


图 1.1 数据拟合曲线(1~6 组)

## 第 7~12 组结果

General model Expl:

$$f(x) = a * \exp(b * x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a = 1.259e-017 \quad (-3.865e-017, 6.383e-017)$$

$$b = 0.02277 \quad (0.02061, 0.02493)$$

Goodness of fit:

SSE: 7.591

R-square: 0.9962

Adjusted R-square: 0.9952

RMSE: 1.378

拟合效果如图 1.2 所示。

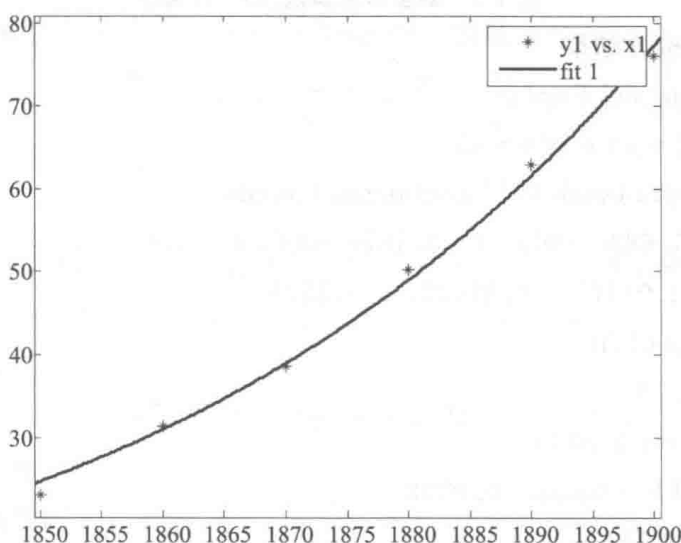


图 1.2 数据拟合曲线(7~12 组)

## 第 13~18 组拟合结果

General model Expl:

$$f(x) = a * \exp(b * x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a = 1.964e-009 \quad (-5.877e-009, 9.805e-009)$$

$$b = 0.01287 \quad (0.01081, 0.01492)$$

Goodness of fit:

SSE: 60.86

R-square: 0.9876

Adjusted R-square: 0.9845

RMSE: 3.901

拟合效果如图 1.3 所示。

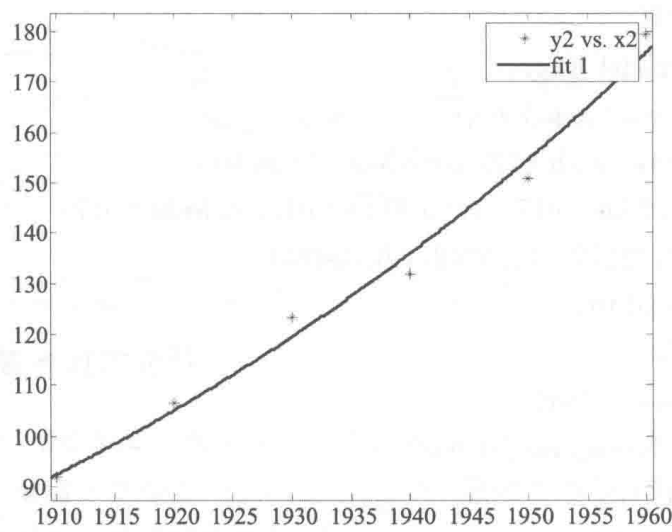


图 1.3 数据拟合曲线(13~18 组)

第 17~22 组拟合结果

General model Exp1:

$$f(x)=a * \exp(b * x)$$

Coefficients (with 95% confidence bounds):

$$a=1.683e-008 \quad (-3.167e-008, 6.533e-008)$$

$$b=0.01177 \quad (0.01032, 0.01323)$$

Goodness of fit:

SSE: 84.04

R-square: 0.9926

Adjusted R-square: 0.9908

RMSE: 4.584

拟合效果如图 1.4 所示。

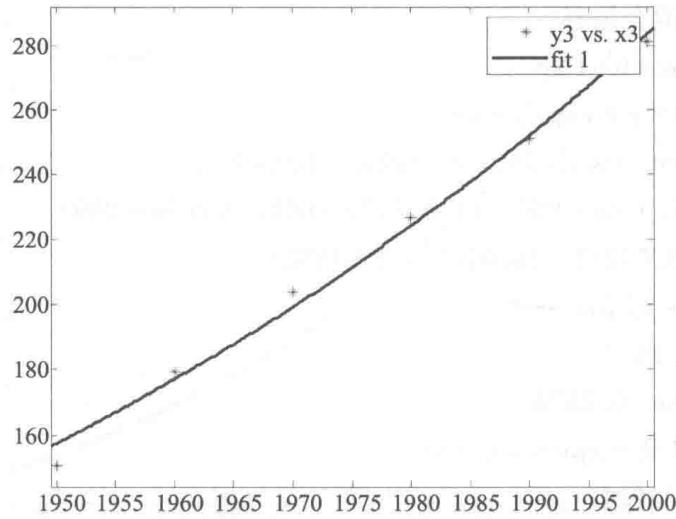


图 1.4 数据拟合曲线(17~22 组)

## 实验 1.2 包装与售价模型

### 1.2.1 模型问题

在超市购物时,大包装商品单位重量价格通常比小包装商品便宜。比如某品牌牙膏,50 克装的每支 1.50 元,120 克装的每支 3.00 元,二者单位重量的价格比是 1.2:1。试构造模型解释这个现象。

### 1.2.2 建模求解和程序设计

(1)假设商品外包装的形状为正方体(边长为  $a$ ),商品的密度为  $\rho$ ,商品的单位成本为  $c_1$ ,包装成本与产品包装的表面积成正比(比例系数为  $k$ ),其他成本为常数  $m$ ,则可以建立模型,商品价格为  $P=c_1w+6ka^2+m$ ,其中  $a$  满足  $w=\rho a^3$ 。

(2)单位重量价格  $c=\frac{P}{w}=\frac{c_1w+6k(w/\rho)^{2/3}+m}{w}$ 。令  $m=0.2$ ,由已知数据计算可得  $c_1=0.0155, k=0.0096$ 。

编程如下:

```
fun=inline('[(x(1)*50+6*x(2)*(50/1.8)^(2/3)+0.2)/50-1.5/50,(x(1)*120+6*x(2)*(120/1.8)^(2/3)+0.2)/120-3.0/120]','x');
```

```
[x,f,h]=fsolve(fun,[0,0]);
```

```
fun=inline('(0.0155*w+6*0.0096*(w/1.8)^(2/3)+0.2)/w','w');
```

```
fplot(fun,[0,300]);
```

由此生成图像如图 1.5 所示。

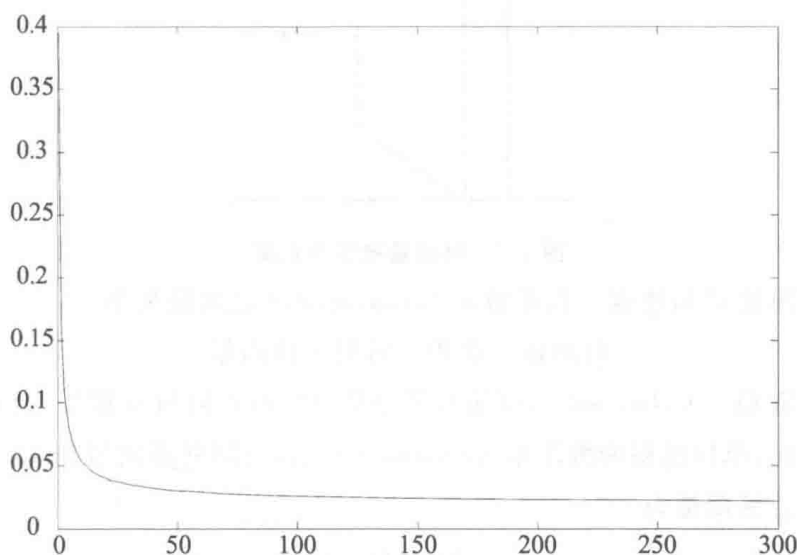


图 1.5 包装价格曲线

由图 1.5 可知,随着体积的扩大,单位重量的价格变化微小,趋近于极限 0.0155。符合实际情况,实际生活中,单位重量的价格随着体积的不断扩大,趋近于商品的生产成本。

## 实验 1.3 淋雨量模型

### 1.3.1 模型问题

要在雨中从一处走到另一处,假设雨的方向和大小都不变,试建立一个模型讨论是否走得越快,淋雨量越小。设人体为长方柱,表面积之比为前:侧:顶=1: $a$ : $b$ 。人沿  $x$  方向以速度  $v$  前进,而雨速在  $x, y, z$  方向的分量为  $u_x, u_y, u_z$ 。写出淋雨量的表达式,画出淋雨量随  $v$  变化的曲线,从而确定在什么情况下走得越快,淋雨量越小,在什么情况下不是这样。

### 1.3.2 建模求解

(1)假设雨从迎面吹来,雨线与跑步方向在同一平面内,且与人体的夹角为  $\theta$ ,人的前、侧、顶表面积分别为  $s, as, bs$ ,雨速为  $u$ ,降雨量为  $w$  cm/h,  $d$  为两地之间的距离,如图 1.6 所示。

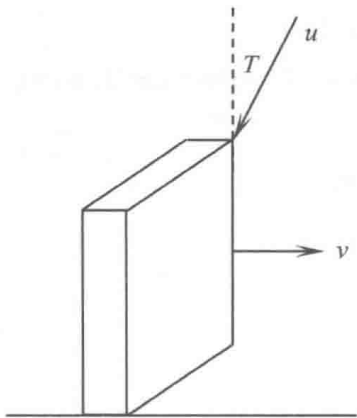


图 1.6 淋雨量模型示意图

建立总淋雨量  $V$  与速度  $v$  及参数  $a, b, s, u, w, d, \theta$  之间的关系:

淋雨量=面积 $\times$ 时间 $\times$ 降雨量

顶部淋雨量  $Q_1 = bsdw \cos \theta / v$ , 雨速水平分量  $u \sin \theta$ , 方向与  $v$  相反, 合速度  $u \sin \theta + v$ , 迎面单位时间、单位面积的淋雨量  $w(u \sin \theta + v) / u$ , 故迎面淋雨量为  $Q_2 = sdw(u \sin \theta + v) / uv$ , 所以总淋雨量为

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{sdw}{u} \cdot \frac{bu \cos \theta + (u \sin \theta + v)}{v}$$

易知  $Q$  为  $v$  的单调递减函数,故人的速度越大,淋雨量越小。

(2)假设雨从背后吹来,雨线与跑步方向在同一平面内,且与人体的夹角为  $\alpha$ ,此时与(1)不同的是合速度为  $|u\sin\alpha - v|$ ,于是总淋雨量为

$$Q = \begin{cases} \frac{sdw}{u} \cdot \frac{bu\cos\alpha + (u\sin\alpha - v)}{v} = \frac{sdw}{u} \cdot \frac{u(b\cos\alpha + \sin\alpha) - v}{v}, & v < u\sin\alpha \\ \frac{sdw}{u} \cdot \frac{bu\cos\alpha + (v - u\sin\alpha)}{v} = \frac{sdw}{u} \cdot \frac{u(b\cos\alpha - \sin\alpha) + v}{v}, & v \geq u\sin\alpha \end{cases}$$

若  $b\cos\alpha - \sin\alpha < 0$ ,即  $b < \tan\alpha$  时,则  $v = u\sin\alpha$  时  $Q$  最小。否则,  $v = v_m$  时  $Q$  最小。

## 第 2 章 差分方程

### 实验 2.1 自然物种数量演变规律(一阶线性差分方程)

#### 2.1.1 模型问题

仙鹤在良好自然环境下(如新疆天鹅湖或齐齐哈尔仙鹤故乡)的“鹤口”自然增长率为 1.94%,在中等和下等自然环境下(如上海外滩或蒙古戈壁)则为负增长,增长率分别为-3.24%和-3.82%。若在某自然保护区内有 100 只仙鹤,建立描述其变化规律的模型,并作数值计算。若每年人工孵化 5 只仙鹤放还保护区,则在中等环境下仙鹤数量将如何变化?

%实验目的:应用一阶差分方程  $x(k+1) = (1+r) * x(k)$ ;  $c(k+1) = (1-q) * c(k)$ 。求自然物种数量演变规律曲线。

#### 2.1.2 建模求解

(1) 标记第  $k$  年的仙鹤数量为  $x_k$ ,自然环境下的自然增长率为  $r$ ,且  $a=1+r$ ,则第  $k+1$  年的仙鹤数量为  $x_{k+1}$ ,其中

$$x_{k+1} = ax_k, a = 1 + r, k = 1, 2, \dots$$

其解为  $x_k = a^k x_0$ ,显然,当自然增长率为  $r < 0$ ,即  $a = 1 + r < 1$  时,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a^k x_0 = 0$ ,这意味着在中等和下等环境下,仙鹤数量趋向于零,即濒临灭绝。

%主要命令:round, plot gtext

%首先建立 M 文件:

function y=exfl1(x0,n,r) % x0,n,r 可调节更改

a=1+r;

x(1)=x0; %赋初始值

for k=1:n-1

x(k+1)=a \* x(k);

end

y=x';

%调用建立好的 m 文件

%源程序: