GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

# 高等数学

## 练习与提高（二）

魏周超 邹敏 主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

# 高等数学练习与提高

（二）

GAODENG SHUXUE LIANXI YU TIGAO

魏周超　邹　敏　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学练习与提高.二/魏周超,邹敏主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.2
ISBN 978-7-5625-4226-1

Ⅰ.①高…
Ⅱ.①魏…②邹…
Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 020539 号

| 高等数学练习与提高(二) | | 魏周超　邹　敏　主编 |
|---|---|---|
| 责任编辑:郑济飞　龙昭月 | | 责任校对:周　旭 |
| 出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号) | | 邮政编码:430074 |
| 电　　话:(027)67883511 | 传真:67883580 | E-mail:cbb@cug.edu.cn |
| 经　　销:全国新华书店 | | http://cugp.cug.edu.cn |
| 开本:787 毫米×1092 毫米 1/16 | | 字数:96 千字　印张:3.75 |
| 版次:2018 年 2 月第 1 版 | | 印次:2018 年 2 月第 1 次印刷 |
| 印刷:武汉市籍缘印刷厂 | | |
| ISBN 978-7-5625-4226-1 | | 定价:9.00 元 |

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

# 目　录

# 第二章 导数与微分

## 第一节 导数概念

本节要求掌握函数在一点处的导数及导函数的定义，会用定义求导数；掌握单侧导数的定义及可导的充要条件；能熟练应用单侧导数及导数的定义判断函数在某点是否可导；掌握导数的几何和物理意义，会求曲线的切线及法线方程；正确掌握可导性与连续性之间的关系.

### 知识要点

1. 导数及导函数的定义，用定义求导数；
2. 左、右导数的定义，可导的充分必要条件；
3. 导数的几何意义，根据导数的几何意义求直线的切线、法线方程；
4. 可导性与连续性的关系.

### 典型例题

**例 1** 设 $f'(x)$存在，求极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$.

**分析**：所求极限式分子分母都是增量形式，很显然需要适当整理变形以后用到极限定义.

**解**：按导数的定义，将原式改写为：

原式$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[2\cdot\dfrac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}-(-1)\cdot\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}\right]$

因为 $f'(x)$存在，

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+2\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}=\lim_{s\to 0}\frac{f(x+s)-f(x)}{s}(s=2\Delta x),$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}(t=-\Delta x),$$

所以原式$=2f'(x)+f'(x)=3f'(x)$.

**例 2** 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

**分析**：讨论分段函数在定义域分段点处的连续性和可导性需要用定义来处理。考虑到指数函数 $e^{\frac{1}{x}}0$,当 $x\to 0$ 时左右极限不相等,需要求 $f(x)$在 $x=0$ 处的左右极限及左右导数.

**解**：因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$, $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$,

即 $f(0^-)=f(0^+)=0=f(0)$,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续;

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0$,

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$,因此 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导.

**例 3** 设 $g(0)=g'(0)=0$, $f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

**分析**：分段函数分段点处的导数要用定义来求. 写出定义的表达式以后需要讨论 $\dfrac{g(x)}{x}$的极限,则根据已知条件求得. 在求极限的过程中会多次用到可导必连续的思想.

**解**：因为 $g(0)=g'(0)=0$,即 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=0$,因此不妨设 $\dfrac{g(x)}{x}=\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$,即当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$为无穷小量,于是有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)\sin\dfrac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)\sin\dfrac{1}{x}$,而当 $x\to 0$ 时,$\sin\dfrac{1}{x}$是有界函数,所以 $f'(0)=0$.

**例 4** 确定 $a,b$ 的值,使曲线 $y=x^2+ax+b$ 与直线 $y=2x$ 相切于点(2,4).

**分析**：看到相切就该想到导数的几何意义. 切点和切线斜率都已知,于是我们可以求出曲线在切点处的导数值,从而确定 $a$ 的值,继而确定 $b$ 的值.

**解**：将 $y=x^2+ax+b$ 求导,得 $y'=2x+a$, $y'|_{x=2}=4+a$. 由导数的几何意义知,$y'=2$,所以,$a=-2$. 又点(2,4)在该曲线上,所以 $4=4-4+b$, $b=4$.

## A 类题

1. 填空题:

(1) 已知 $f'(1)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-2h)-f(1)}{2h}=$ ____________________;

(2) 若 $f(x)$为偶函数，$f'(-2)=2$，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h-2)-f(2)]=$ ________；

(3) 若 $f'(a)$存在，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+\alpha h)-f(a-\beta h)}{h}=$ ________；

(4) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+5)$，则 $f'(0)=$ ________.

2. 选择题：

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^2, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$在 $x=1$ 处(　　).

A. 左、右导数都存在　　B. 左导数都存在，右导数不存在

C. 左导数不存在，右导数存在　　D. 左、右导数都不存在

(2) 设函数 $f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 处可导的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

3. 一质点作直线运动，它所经过的路程$(S)$和时间$(t)$的关系是 $S=3t^3+1$，求 $t=2$ 的瞬时速度.

4. 如果 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，证明 $f'(0)=0$.

5. 求曲线 $y=\cos x$ 上点$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$处的切线方程和法线方程.

## B 类题

1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ x, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的导数.

2. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性并说明理由.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ x, & x=0; \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} -x, & x>0, \\ x^2, & x\leqslant 0; \end{cases}$

(3) $f(x)=|\sin x|$.

## C 类题

1. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义,且 $f'(1)=a(a\neq 0)$,又对任意 $x$, $y$ 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$,求 $f(x)$.

2. (1) 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$,又对于任意的 $x$,有 $f(3+x)=3f(x)$,求 $f'(3)$.

(2) 已知 $f(x)$在 $x=a$ 处连续且 $f(a)\neq 0$, $F(x)=[f(x)]^2$ 在 $x=a$ 处可导且 $F'(a)=2f(a)$,证明 $f(x)$在 $a$ 点可导,并求 $f'(a)$.

## 第二节 函数的求导法则

本节要求熟练掌握常数和基本初等函数的导数公式、函数的四则运算求导法则、反函数的求导法则以及复合函数的求导法则，能综合运用这些法则和导数公式.

### 知识要点

1. 函数的和、差、积、商求导法则；
2. 反函数和复合函数的求导法则；
3. 常数和基本初等函数的导数公式.

### 典型例题

**例 1** 求下列函数的导数：

(1) $y=\dfrac{x^5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$；

(2) $y=\dfrac{a^x\sin x}{1+x}$；

(3) $y=x\sec x-\dfrac{e^x}{x^2}$；

(4) $y=x^{\sin\frac{1}{x}}$.

分析：简单的初等函数求导直接用导数公式即可.

**解**：(1) $y'=\left(\dfrac{x^5\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}\right)'=(x^{\frac{19}{6}})'=\dfrac{19}{6}x^{\frac{13}{6}}$；

(2) $$y'=\frac{a^x[\ln a\cdot\sin x+\cos x](1+x)-a^x\sin x}{(1+x)^2}$$
$$=\frac{a^x[(\ln a\cdot\sin x+\cos x)(1+x)-\sin x]}{(1+x)^2}；$$

(3) $$y'=(x\sec x)'-\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'=\sec x+x\sec x\tan x-\frac{e^x x^2-e^x\cdot 2x}{x^4}$$
$$=\sec x(1+x\tan x)-\frac{x-2}{x^3}e^x；$$

(4) $y'=(x^{\sin\frac{1}{x}})'=(\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}\cdot\ln x})'=\mathrm{e}^{\sin x\cdot\ln x}\cdot[\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})\cdot\ln x+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}]$

$$=x^{\sin\frac{1}{x}}(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x^2}\cos\frac{1}{x}).$$

**例 2** 设 $y=\mathrm{e}^x+\ln x(x>0)$，求其反函数 $x=x(y)$的导数.

**分析：** 求反函数直接用反函数求导法则.

**解：** 因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$，故其反函数的导数为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x\mathrm{e}^x+1}$$

**例 3** 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$，$\varphi(x)$在 $x=a$ 连续但不可导，又 $g'(x)$存在，则 $g(a)=0$ 是 $F(x)$在 $x=a$ 可导的(　　)条件.

A. 充分必要　　　　B. 充分但非必要

C. 必要非充分　　　　D. 既非充分又非必要

**分析：** 因为 $\varphi'(a)$不存在，所以不能对 $g(x)\varphi(x)$用乘积的求导法则；

若 $g(a)=0$，按定义考察$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\varphi(x)$，则$\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=g'(a)\varphi(a)$，即 $F'(a)=g'(a)\varphi(a)$. 再用反证法证明：若 $F'(a)$存在，则必有 $g(a)=0$. 若 $g(a)\neq 0$，由商的求导法则可知 $\varphi(x)=\frac{F(x)}{g(x)}$在 $x=a$ 可导，与假设条件矛盾. 因此应选 A.

## A 类题

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=a^x+\mathrm{e}^x$；

(2) $y=2\tan x+\sec x-\sin\frac{\pi}{2}$；

(3) $y=x^2(2+\sqrt{x})$；

(4) $y=(2+\sec t)\sin t$；

(5) $y=3e^x\cos x$；

(6) $f(v)=(v+1)^2(v-1)$；

(7) $y=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$；

(8) $y=\dfrac{2\csc x}{1+x^2}$；

(9) $y=(\sqrt{x}-a)(\sqrt{x}-b)(\sqrt{x}-c)$，$a,b,c$ 均为常数.

2. 以初速 $v_0$ 竖直上抛的物体，其上升高度 $S$ 与时间 $t$ 的关系 $S=v_0t-\dfrac{1}{2}gt^2$，求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$；

(2) 该物体到达最高点的时刻.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；

(2) $y=\cos(4-3x)$；

(3) $y=e^{-3x^2}$;

(4) $y=\ln(1+x^2)$;

(5) $y=\sin^2 x$;

(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(7) $y=\tan x^2$;

(8) $y=\arctan(e^x)$.

## B 类题

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(2) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;

(4) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$;

(5) $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

(6) $y=\sin^n x\cos nx$;

(7) $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$;

(8) $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$.

2. 设 $f(x)$,$g(x)$可导,且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$,求 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

3. 设 $f(x)$在 $x=1$ 处一阶导数连续,且 $f'(1)=2$,求 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x-1})$.

4. 证明下列命题:

(1) 可导的奇函数,其导函数为偶函数;

(2) 可导的偶函数,其导函数为奇函数;

(3) 可导的周期函数,其导函数仍为周期函数.

## C 类题

1. 设 $F(x)=\max\{x,x^2\}$,$0<x<2$,求 $F'(x)$.

2. 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,其中 $\varphi(x)$在 $x=a$ 处可导,求 $f'(0)$.

## 第三节　高阶导数

本节要求掌握高阶导数的定义和求法以及几个初等函数的 $n$ 阶导数公式；能熟练利用莱布尼兹公式计算两个函数乘积的 $n$ 阶导数.

### 知识要点

1. 函数的二阶、三阶导数的求法；
2. 几个初等函数的 $n$ 阶导数；
3. 莱布尼兹公式.

### 典型例题

**例 1**　求二阶导数：

(1) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　　(2) $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$.

**分析**：要求二阶导数先求一阶导数再对一阶导数求导. 利用导数的四则运算法则以及三角函数积化和差公式.

**解**：(1) $y'=\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}$，

$$y''=\left(\frac{e^x x-e^x}{x^2}\right)'=\frac{(e^x x+e^x-e^x)x^2-2x(e^x x-e^x)}{x^4}=e^x\cdot\frac{x^2-2x+2}{x^3}.$$

(2) $y=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\dfrac{1}{4}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 6x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$，

利用公式 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$，

于是 $y''=\dfrac{1}{4}\cdot 4^2\sin\left(4x+\dfrac{2}{2}\pi\right)-\dfrac{1}{4}\cdot 6^2\sin\left(6x+\dfrac{2}{2}\pi\right)+\dfrac{1}{4}\cdot 2^2\sin\left(2x+\dfrac{2}{2}\pi\right)$

$=9\sin 6x-4\sin 4x-\sin 2x$.

**例 2**　设 $P(x)=\dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^m)^n$，其中 $m,n$ 为正整数，求 $P(1)$.

**分析**：题目中涉及到两个函数乘积的 $n$ 阶导数，所以要用到莱布尼兹公式.

**解**：因为 $(1-x^m)^n=(1-x)^n\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$，

令 $u(x)=(1-x)^n$，$v(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n$，应用莱布尼兹公式，

因为 $u(1)=u'(1)=\cdots=u^{(n-1)}(1)=0$，$u^{(n)}(1)=(-1)^n n!$，所以

$P(1)=v^{(n)}(1)u(1)+nv^{(n-1)}(1)u'(1)+\cdots+v(1)u^{(n)}(1)=(-1)^n m^n n!$.

**例 3**　设函数 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，求 $y^{(n)}$.

**分析**：两个函数商的 $n$ 阶导数没有公式直接对应，于是我们需要将函数适当变形，然后利用已知函数的 $n$ 阶导数公式得到所求导数.

**解**：由于 $y=\dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$，于是

$$y^{(n)}=[2(1-x)^{-\frac{1}{2}}]^{(n)}-[(1-x)^{\frac{1}{2}}]^{(n)}$$

$$=2\cdot(-1)^n(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}-(-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{1}{2}-n}+\frac{(2n-3)!!}{2^n}(1-x)^{\frac{1}{2}-n}.$$

## A 类题

1. 设 $f''(x)$存在，求下列函数的二阶导数 $y''$.

(1) $y=f(x^2)$；

(2) $y=x\ln f(-x)$；

(3) $y=f(ax^2+b)$.

2. 求下列所给函数指定阶数的导数：

(1) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $y''$；

(2) $y=(3x^2+50)^{20}(x^9-7x^2+1)$，求 $y^{(50)}$；

(3) 设函数 $f(x)=(x-a)^2\cdot\varphi(x)$，其中函数 $\varphi(x)$ 在点 $a$ 处有一阶连续导数，求 $f''(a)$；

(4) $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+\cos 2x$，求 $f^{(28)}(\pi)$.

## B 类题

1. 用莱布尼兹公式求下列函数的指定阶数的导数：

(1) $y=(x^2-1)e^{2x}$，求 $y^{(20)}$；

(2) $y=x^2\sin 2x$，求 $y^{(50)}$.

2. 求下列函数的 $n$ 阶导数：

(1) $y=\dfrac{x^3}{1-x}$；

（2）$y=x\ln x$；

（3）$y=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$；

（4）$y=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x$，求 $f^{(n)}(x)$；

（5）$y=\sin^2 x$ ；

（6）$y=xe^x$.

## C 类题

试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出：

（1）$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；