《量子计算和量子信息（一）
——量子计算部分》
阅读辅导及习题解析

陈汉武 · 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

《量子计算和量子信息(一)
——量子计算部分》

阅读辅导及习题解析

陈汉武　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

内 容 提 要

本习题详解是应对当前可能出现的量子计算与量子信息的学习和研究的热潮，汇集整理我研究室多年来讨论班读书环节对 *Quantum Computation and Quantum Information* 全书主要章节习题求解与解析的结果。第一章介绍了获 2017 年度狄拉克奖的三位量子信息学奠基者，用简单易懂的代数演算解读了原著第一章内容中的一些表述和概念，例如：为什么说 H 门形似 NOT 门平方根，Deutsch-Jozsa 算法的解读，量子隐形传态如何实现的代数演算等；并用通俗易懂、图文并茂的注释解说了普通 NOT 门和量子结的实现原理，什么叫做通用逻辑门，什么叫高密度编码等 12 个知识点。第二章"阅读内容"部分对相关内容涉及的物理学、计算机科学和数学等多个学科的知识点进行重点摘录，并对原书中的 82 道习题和 3 个问题进行了解析。习题求解中严格使用其特有的量子力学符号和演算规则，是训练、养成量子计算逻辑思维能力不可或缺的基础部分。

本书可作为高等院校本科相关专业，或研究生阶段量子计算与量子信息学习者的教辅材料，也可作为对量子计算和量子信息感兴趣的研究人员和工程技术人员阅读相关书籍的辅助资料。

图书在版编目(CIP)数据

《量子计算和量子信息(一)：量子计算部分》阅读辅导及习题解析/陈汉武编著. —南京：东南大学出版社，2018.1

ISBN 978-7-5641-7613-6

Ⅰ.①量… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①量子力学—信息技术 Ⅳ.①TP387 ②O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 003950 号

《量子计算和量子信息(一)——量子计算部分》阅读辅导及习题解析

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
责任编辑	姜晓乐(joy_supe@126.com)
社　　址	南京市四牌楼 2 号
邮　　编	210096
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京玉河印刷厂
开　　本	700 mm×1000 mm 1/16
印　　张	9
字　　数	166 千字
版　　次	2018 年 1 月第 1 版
印　　次	2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5641-7613-6
定　　价	36.00 元

前　言

此题解的练习全部取自剑桥大学出版社出版的。Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang 合著的英文版原著 *Quantum Computation and Quantum Information* 翻译版的第一、第二章节的习题和问题。

Quantum Computation and Quantum Information 自 2000 年出版以来一直都是国际上公认的量子信息科学领域最经典的教材，2003 年高等教育出版社出版了该书的影印版，2004 年清华大学出版社出版了该书的翻译版。翻译版按照内容分为上下两部：《量子计算与量子信息(一)——量子计算部分》(赵千川译)和《量子计算与量子信息(二)——量子信息部分》(郑大钟，赵千川合译)。译者赵千川教授在"译者序"中写道："国外不少大学也已开设了有关课程。译者 2000 年访问美国 Carnegie Mellon 大学，他们在计算机系和物理系的研究生中开设了量子计算机课程，所采用的教材正是剑桥大学出版社出版的 Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang 的英文版原著 *Quantum Computation and Quantum Information*"，并指出："掌握量子计算能力的制高点已成为关系信息安全的重要课题"。

《量子计算与量子信息(一)——量子计算部分》包括基本概念和量子计算两个部分。基本概念部分分为三个章节：引言和概述、量子力学引论、计算机科学简介；量子计算部分包括四个章节：量子线路、量子 Fourier 变换及其应用、量子搜索算法和量子计算机的物理实现。全书内容的背后涉及物理学、计算机科学和数学等多学科的综合性交叉研究领域，对于学生(微电类：信息、电子、计算机、控制)来说，其中第二章"量子力学引论"的学习最为重要。该章节的内容不但是 *Quantum Computation and Quantum Information* 全书的代数学基础，其特有的量子力学符号系统和演算规则也是训练、养成量子

计算逻辑思维能力不可或缺的基础部分。

近几年,我研究室开设了“量子计算”的研究生课程,不但本研究室每年的新生参加学习,还吸引了本校其他学科的研究生以及外校计算机专业的研究生前来学习。教学互动过程中发现一些认知和学习上的问题,归纳总结起来大约有两点:一是一些学生在进入课程学习之前常常被名词“量子”给吓唬住了,二是一些学生在学习的过程中没有把书读清楚。其实量子计算的基础知识主要是线性代数,只要认真读书,养成新的思维习惯,“量子态”表象中的任何演绎过程和结果都能够用线性代数的方法推演或刻画出来。

针对当前可能出现的量子计算与量子信息的学习和研究的热潮,我研究室计划陆续出版 *Quantum Computation and Quantum Information* 全书的习题解,辅助所有对量子计算和量子信息感兴趣的学习者。由于时间的原因,此次题解的内容仅包含《量子计算与量子信息(一)——量子计算部分》的基本概念中的第一章和第二章的全部习题及问题的题解和解释。

特别说明:

1. 习题解的结果是确定的,但解的方法可能不是唯一的,所以对于每一道习题来说,本书给出的题解也可能不一定是最好的或最简单的。

2. 由于水平的原因,题解中可能有瑕疵,还可能有错误(谬误),期待读者在学习和验证的过程中批评指正,期待进一步完善。

3. 第一章的内容是引言和概述,其中有一些内容对于初学者来说是陌生的,文字背后的内容他们不了解,本书针对这种情况采用类似小贴士的方法给予额外说明,有时特别会采用线性代数解析的方式给予说明,此处的用心是为了那些真正想学习的人,通过反复细致的训练,一开始就养成良好的习惯和思维。

4. 第二章的内容是全书的重点和基础,共有 82 道习题和 3 个问题。编写思路受到日本共立出版社出版的铃木七绪等四人合著的《詳解-線形代数演習》题解启发,根据原著的赵千川教授中文翻译版

的顺序，在习题之前都有相应的定义、定理、例题、注释等文字提示，便于学习者理解题意并形成解题思路。在题解中，我们严格、细致地使用量子计算中的各种符号(符号的背后就蕴含着思维)完成题解，其目的是通过详细的求解过程，培养学生或读者良好的量子计算思维。

回顾我们学习的历程和收获

2000 年，剑桥大学出版社出版了 *Quantum Computation and Quantum Information* 英文版原著，2003 年，高等教育出版社出版了该著作的影印版。我于 2003 年 11 月获得高等教育出版社赠送的原著影印版，2005 年组建量子计算与量子信息研究室，同时购买了清华大学出版社的翻译版教材，2006 年 3 月开始在我研究室每周一次的读书讨论班上，与最初的博士和硕士研究生们就开始了第一轮的泛读。泛读的目的是了解全书的相关内容和理论，同时结合当时发表在各类期刊或会议上的有关量子计算和量子信息的论文研读，较为深入地讨论部分相关章节内容。通过这样的泛读和讨论，学生们大致有了量子计算和量子信息相关理论的基本概念，收获颇丰。记得当时的研究生们每周都期待着读书讨论班的学习和交流，人多热情高，真是难忘的景象。

通过一轮的教材泛读，研究生们对量子计算与量子信息教材内容的全貌有了宏观的了解，此时基本具备了发现问题或遇到困惑时可随手打开相关章节认真研读的能力。于是结合相关有影响力的期刊或会议论文的泛读和精读，研究生们就能够遴选出自己感兴趣的研究问题，最初的选择包括量子线路综合、量子通信协议、量子容错计算。此后，研究生们更加注重对自己感兴趣的相关章节内容的精读。经过不断的读书和解题练习的训练，学生们关于量子计算的感觉和理论知识不断地增多，自信也不断地增强。一批一批的研究生们，就这样通过阅读经典书籍、做练习、读论文、再现论文的推导过程和结论的相关解析，他们已分别在量子线路综合、量子通信协议、量子容错计算、量子图像处理等领域中做出了一些成绩，在包括 *IEEE Transactions on Information Theory*, *IEEE Communications Letters*, *Quantum Information Processing*, *Quantum Information and Computation*, *Chinese Physics Letter*, *Chinese Physics B*, *China Science: Information Sicences*, *International Journal of Theoretical Physics*, *International Journal of Quantum Information*,《计算机学报》,《软件学报》,《计算机研究与发展》,《电子学报》和《通信学报》等期刊上已累计发表

论文 124 篇，其中 SCI 收录 42 篇、EI 收录 82 篇，SCI 表现不俗 7 篇。

还有一点感觉与感兴趣的读者分享

现在回顾起来，我们最初关于量子计算与量子信息的知识积累可以这样叙述：

最初在泛读 *Quantum Computation and Quantum Information* 教材时，学生们都是"半路出家"，没有任何量子计算的基本概念和科普知识，因此即使阅读，但关于量子计算与量子信息的认知却如同看不见树干和树枝，满眼尽是离散且摇晃的树叶(知识点)，时常感觉知识信息如树影婆娑，飘忽不定。一轮泛读后，虽然能够用搬来的理论与方法解决一些问题，但心里依然时常感觉不那么踏实，因此我们开始了第二轮读书。

第二轮读书的指导思想是：把书读清楚。我们开始一边读书，一边做每一道练习并解读书中的每一个小贴士(盒子)，随着持续的学习和反复的阅读，知识的积累、讨论的深入和不断的思考，开始感觉到我们的思维中慢慢生长出了"量子计算与量子信息"知识体系的树干和树枝，把那些看似离散晃动的树叶嫁接了起来、稳定了下来，初步形成了较为完整的知识体系，遇到问题时提出的解决方案就不再是就事论事，而是可以站得高一点，从较为完整的体系看待或讨论一个局部的问题。如此一来，学生们论述问题的逻辑就会更加清晰一些，论据的可信度就会增高一些，论文的写作就会快一些，命中的概率自然就大了一些，学习也就有了收获的感觉。

学生们回顾这样的研究学习过程，认识到进入一个新的领域，我们某些知识的积累或认知体系的形成可能往往也需要经历这样的过程，先有离散的知识点，然后慢慢串联起来形成一个完整的知识体系。特别是进入研究生的学习阶段，新兴的研究领域，其知识的积累过程似乎大致如此，不同于中小学和高中阶段多数是连续的、被动学习的知识积累的过程，那个时间段大多数情况下的知识积累可以用分形几何画出一棵大树的过程来描述，通过一个基于递归的反馈系统，将最初的一片树叶画出一棵大树，随着树叶的经络演绎出树干和树枝，每一片树叶(知识点)都紧紧地生长在不同的树枝上，整个知识点的学习都与相关知识体系相关。这便是孩提时代知识积累的普遍过程，而研究生或成人的知识积累过程更像我们学习量子计算与量子信息的过程，这也是研究生们通过学习获得的收获。

在博士生的读书和练习训练中，其中的好学生阅读论文的速度会有明显的

提高，抓住问题的要点、论点论述的代数解析也有明显的提高，撰写论文的速度也有明显的提高，不但如此，练习推演好的、基本功扎实的学生还能够在阅读知名期刊论文时发现关键点的错误。实际上，以学生为第一作者发表的多篇 SCI 表现不俗的论文，其内容大多是与那些期刊论文的作者商榷有关结论的问题，非常迅速地指出错误并给出我们的结论。此类论文，估计是题目引人关注，因为内容简短，结论严谨，因此引用率会高一些，如此得来 SCI 表现不俗。

后记

写给讨论班的每一位同学，这是我们大家共同的记忆，虽然我们都很平凡，业绩也不辉煌，但那一份能够坐在一起的缘分，那一段共同学习、共同讨论、共同演算和相互"批判"的时光，陪伴着你们度过了青春中最美好的时光，却给我留下了一份弥足珍贵的记忆。

我要感谢每一位曾经参加过讨论班的学生：李志强、刘文杰、李文骞、肖芳英、许娟、王冬、刘志昊、樊继豪、阮越、谈佳宁、李熙和徐梦珂等博士生，以及张俊、李科、黄浩和崔振宇等硕士研究生，其中特别感谢刘志昊、张俊和徐梦珂同学，为完成第二章节的题解提供了很多的课堂讨论和推演的一手资料。

目　录

第1章 阅读辅导

阅读该书之前，我们向三位量子信息学奠基者 Charles H. Bennett，David Deutsch，Peter W. Shor 表示我们的敬意。

2017 年度狄拉克奖揭晓，三位量子信息学奠基者分享该奖项 *

日前，国际理论物理中心(ICTP)颁布了 2017 年度狄拉克奖。本年度的三位获奖者分别是美国 IBM T. J. Watson 研究中心的 Charles H. Bennett，英国牛津大学的 David Deutsch，以及美国麻省理工的 Peter W. Shor。三人因“将量子力学的基础概念应用于计算科学与通信科学的基本问题，结合量子力学、计算科学与信息科学从而缔造量子信息学领域”的先驱性工作而被授予这一奖项。

“ICTP 2017 年度狄拉克奖得主将他们在量子力学上的深厚学识应用于计算科学与通信科学，”ICTP 主任 Fernando Quevedo 说道，“更重要的是，此后量子信息学的发展全都是建立在他们所构建的学科基础之上的。”

时至今日，量子信息学已经成为一个广博的热点研究领域，在理论与实验两个方向上都有成果。与描述我们日常世界的经典力学不同，量子力学有着迥然相异的特性，正是这种显著的差异造就了量子信息学。传统信息科学的数据是以比特(bit)为计量单位的，每比特都有一个绝对数值：0 或 1。而量子信息学采用量子比特(qubit)为单位，其量子叠加态能同时包含 0 和 1。两个或更多量子比特的叠加则会产生一种全新特性，称为纠缠(entanglement)。在纠缠态中

* 注：张奕林，译. 2017 年度狄拉克奖揭晓，三位量子信息学奠基者分享该奖项。科研圈[2017-08-10]. http://www.keyanquan.net/info/detail/179

量子比特的值会相互关联,与经典直觉完全不同。在探索如何开发量子比特的独特性质,将其用于数据处理和传输的研究领域,2017 年度狄拉克奖的三位获奖者都做出了关键性贡献,从而开创了量子信息学这一新领域。

Charles Bennett 是量子信息学领域富有智慧的引领者。四十年前,他独自创立并仔细研究了现在被称为“可逆经典计算”的领域,证明了经典计算理论上可以零能耗的方式进行。在某种程度上,可逆经典计算正是量子计算的先驱,它涉及了可逆性与最小化杂散损耗的内容。Bennett 还与加拿大蒙特利尔大学的 Gilles Brassard 合作发明了量子密码学:两个远距离通信者能够安全地分享一个编码秘钥,由于对不相容可观测量的测量受到基本量子极限的约束,从而免于被第三方监听。此外,Bennett 与其合作者还引入了量子传输,使得纠缠与经典信号能被用于传输量子态。他与合作者证明,von Neumann 熵能够很好地用于度量纯态系统的纠缠,这是纠缠量化的早期结论,该领域的研究如今依然非常活跃。

David Deutsch 是量子计算的缔造者之一。他引入了量子图灵机、量子逻辑门、量子回路与量子计算网络模型等概念,其中量子图灵机是一种可以在任意叠加态(即量子比特)上运行的计算模型。David Deutsch 证明了一台量子计算机上的所有可能操作都可以通过一种三量子比特逻辑门的序列组合来实现(之后,Bennett, Shor 与合作者证明了由单量子比特门和一种简单的经典可逆双比特门组成的序列就足够了)。通过自己的独立工作以及与英国剑桥大学的 Richard Jozsa 合作,Deutsch 设计出了第一种量子算法,即 Deutsch 和 Deutsch-Jozsa 算法。该算法阐释了对于解决特定问题,量子计算能够比任何已知的经典计算机算法都要快。

Peter Shor 极大地推动了量子计算领域的发展。他设计了大数因数分解以及离散对数计算的高效量子算法,这两种算法都可以用来破解经典编码方案。通过这些高效算法,Peter Shor 证明了在解决实用、复杂的计算问题时,量子计算机可以指数级的速度超越所有已知的经典计算机算法。他还引入了量子纠错码以及容错量子计算,这些都为处理干扰量子比特的杂散效应(噪声)提供了方案。如果没有稳健的量子纠错机制,大规模的量子计算就会因量子态对噪声的高度敏感性而遭到破坏。因此,量子纠错理论如今已是量子信息学界一个发

展程度很高的分支,曾经艰难的大规模量子计算机发展之路如今也渐渐打开了。

国际理论物理中心 ICTP 狄拉克奖设立于 1985 年,目的是为了纪念 20 世纪伟大的物理学家,ICTP 的忠实伙伴,保罗·狄拉克(P. A. M. Dirac)。该奖项于每年 8 月 8 日(狄拉克的生日)颁发给对理论物理学做出卓越贡献的科学家。

1933 年,狄拉克与薛定谔共享诺贝尔物理学奖,时年 31 岁。

解读 1:

> page 19:
>
> $H\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$。This gate is sometimes described as being like a 'square-root of NOT' gate in that it turns a $|0\rangle$ into $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$ (first column of H), 'halfway' between $|0\rangle$ and $|1\rangle$, and turns $|1\rangle$ into $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$ (second column of H), which is also 'halfway' between $|0\rangle$ and $|1\rangle$. Note, however, that H^2 is not a NOT gate, as simple algebra shows that $H^2=I$, and thus applying H twice to a state does nothing to it.

为什么说 $H\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$门有时被描述为像似“NOT”门(即 $X\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$门)的平方根?

因为 X 把$|0\rangle$变成$|1\rangle$,把$|1\rangle$变成$|0\rangle$:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}|0\rangle=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=|1\rangle$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}|1\rangle=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=|0\rangle$$

而 H 把$|0\rangle$变成$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$,把$|1\rangle$变成$(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}$:

$$H|0\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}|0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)$$

$$H|1\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)$$

显然 X 交换量子态的 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两种极化状态，而 $H\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ 则是将两种极化状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 变化成中间状态(叠加状态)$(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$ 和 $(|0\rangle-|1\rangle)/\sqrt{2}$，因此表面上看 H 门像似将 X 门的变换做了一半，即说成：This gate $H\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ is sometimes described as being like a 'square - root of NOT' gate。但是为什么又不能说成是：H 门就是 X 门的平方根呢？

如果我们了解中文版原书 2.1.8 节“算子函数”的相关内容，我们就可以求解 NOT gate：$X\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ 的平方根，就可以深入理解“This gate $H\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ is sometimes described as being like a 'square - root of NOT' gate”的真正含义。

从线性代数的视角看问题：如果将 X 和 H 都看成矩阵 A(在向量空间中算子的代数表示就是矩阵)，矩阵的特征根和与其对应的特征向量分别用 λ 和 $|\lambda\rangle$ 表示，则线性代数告诉我们：矩阵 A 可以表示成 $A=\sum_{\lambda}\lambda|\lambda\rangle\langle\lambda|$，矩阵函数的抽象表达式就是：$f(A)=\sum_{\lambda}f(\lambda)|\lambda\rangle\langle\lambda|$。因此我们也可以通过求解矩阵 X 的特征值和特征向量给出相关叙述的大致解释：This gate is sometimes described as being like a 'square - root of NOT' gate。

首先求 X 的特征值(本征值)：$|\lambda I-X|=\begin{bmatrix}\lambda & -1\\-1 & \lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-1$，显然 X 的特征值为：$\lambda_{1,2}=\pm1$，因为矩阵 $X=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，设特征值 λ 对应的特征向量为

$|\lambda\rangle=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，则将 X 和 $|\lambda\rangle$ 代入 $A|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle$，得到 $|\lambda_1\rangle=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$|\lambda_2\rangle=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。显然

$$\begin{aligned}X&=\lambda_1|\lambda_1\rangle\langle\lambda_1|+\lambda_2|\lambda_2\rangle\langle\lambda_2|\\&=(1)\times\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}+(-1)\times\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

则根据算子函数的定义，算子 X 的平方根就是其特征值的平方根（分别为 1 和 i）乘以对应的特征向量，那么算子 X 的平方根的矩阵应该写成：

$$\begin{aligned}\sqrt{X}&=\sqrt{1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}+\sqrt{-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}+i\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&1-i\\1-i&1+i\end{bmatrix}\end{aligned}$$

因此即使算子 X 的本征向量归一化且特征值取其平方根后再运算，也不等于 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，所以说：This gate is sometimes described as being like a 'square-root of NOT' gate, Note, however, that H^2 is not a NOT gate, as simple algebra shows that $H^2=I$, and thus applying H twice to a state does nothing to it.

$$HH^{\mathrm{T}}\equiv\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I$$

阅读内容

以下文字和示意图摘录于《科学美国人》，给出了实现“非”门（X 门）和产生叠加态（H 门产生一个量子比特的叠加态）的物理实验原理。

量子比特门的物理实现举例：

(1) 普通的"非"门

为了执行最基本的运算操作"非",即将一个比特的值反转,物理学家将一束具有合适频率、时长和强度的光脉冲(被称为 π 脉冲)照射到原子上。如果电子开始处于 1 态,它将变成 1 态,反之亦然。

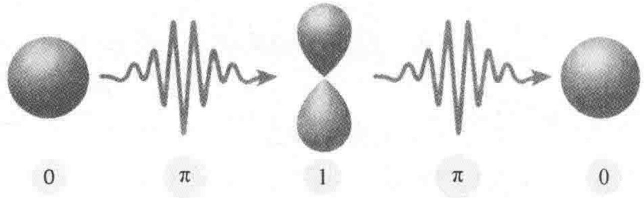

图 1-1

(2) 量子结

经过调整,同样的过程可以执行一项似乎不可能进行的运算操作:"非"的平方根。一束 π/2 脉冲(具有比 π 脉冲较小的振幅或较短的时长)能将电子从 0 或 1 态转化为两个态的组合,或称为叠加态。接着,第二束 π/2 脉冲会将这个电子转变为 1 态(如果最初是 0 态)或 0 态(如果最初是 1 态)。

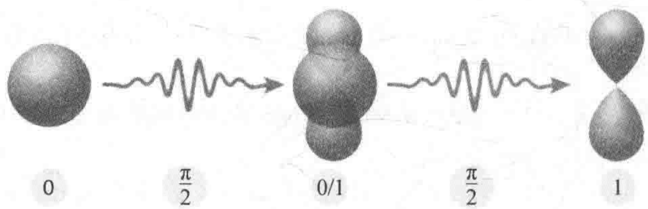

图 1-2

量子逻辑门的酉性及其相关论述:

酉量子门总是可逆的,因为酉矩阵的逆还是酉矩阵,故一个量子门的作用总可以通过另一个量子门翻转过来。

任意的多量子比特门都可由受控非门和单量子比特门复合而成,某种意义上说,受控非门和单量子比特门是所有其他门的原型。(量子门的通用性和稠密子集的概念)

Deutsch 等人已证明:几乎所有的二比特量子逻辑门都是通用的。这里"通用逻辑门"的含义是指,通过这些逻辑门的级联,可以任意精度逼近任何一个量

子(酉、幺正)操作;"几乎"的含义是指,二比特通用量子逻辑门的集合是所有二比特逻辑门的集合的一个稠密子集。

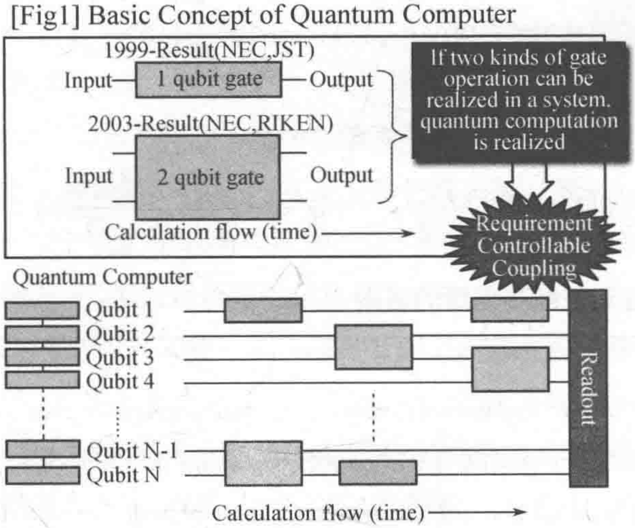

图 1-3

图 1-4 给出人类可以自由地操控量子的物理实验。1997 年诺贝尔物理学奖授予了美国加州斯坦福大学的朱棣文、法国巴黎的法兰西学院和高等师范学院的科恩·塔诺季和美国国家标准技术院的菲利普斯,以表彰他们在发展用激光冷却和陷俘原子的方法方面所作的贡献,从此人类就能够操纵和控制单个原子了。

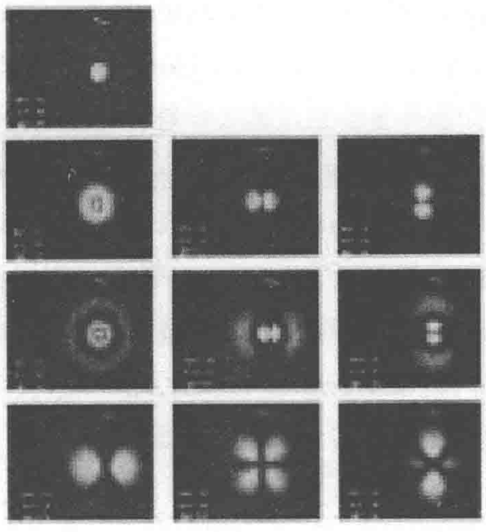

图 1-4

量子计算中最常用的两组基：

常用的两对垂直正交基：$\{|0\rangle, |1\rangle\}$和$\{|+\rangle, |-\rangle\}$。

$$|+\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),\ |-\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

所以：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} + \beta\frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle$$

解读 2　量子电路与经典电路的区别

page 23：

There are a few features allowed in classical circuits that are not usually present in quantum circuits. First of all, we don't allow 'loops', that is, feedback from one part of the quantum circuit to another; we say the circuit is acyclic. Second, classical circuits allow wires to be 'joined' together, an operation known as FANIN, with the resulting single wire containing the bitwise OR of the inputs. Obviously this operation is not reversible and therefore not unitary, so we don't allow FANIN in our quantum circuits. Third, the inverse operation, FANOUT, whereby several copies of a bit are produced is also not allowed in quantum circuits. In fact, it turns out that quantum mechanics forbids the copying of a qubit, making the FANOUT operation impossible!

经典可逆逻辑与量子可逆逻辑的区别：经典线路中的反馈、扇入和扇出连线操作在量子线路中是不允许的！

量子线路可以模拟经典线路，即量子力学可以解释所有经典逻辑线路。而量子线路不能用经典线路直接模拟，因为酉量子逻辑门具有内在可逆性，而许多经典逻辑门，如与非门，本质上是不可逆的。

【举例 1】 Bell 态。

$$|\beta_{00}\rangle \equiv \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}},\ |\beta_{01}\rangle \equiv \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}},\ |\beta_{10}\rangle \equiv \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}},\ |\beta_{11}\rangle \equiv \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$