

高等教育“十三五”规划教材

微积分

(下册)

许东亮 孙艳波 主编 / 蔡高玉 孙蕾 张慧 副主编

清华大学出版社

微积分 (下册)

许东亮 孙艳波 主编

蔡高玉 孙蕾 张慧 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书为普通高等教育应用型本科教材,是以培养高级应用型人才为目标,依据高等院校经管类本科教学基础课程的教学要求,在编者多年教学经验的基础上,结合独立学院和民办高等院校的培养定位而编写的。编写过程中力求做到体系结构严谨,内容难度适宜,通俗易懂。

本书为下册,内容包括空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,二重积分,无穷级数和微分方程。各章节后面配有各种类型的习题,书末附有习题参考答案,便于学习者学习。

本书科学、系统地介绍微积分的基本内容、基本思想和基本方法,还侧重微积分知识方法在经济管理学科的应用。本书以直观的方式引入概念,由浅及深地介绍知识点;从提高学生素养的角度加强数学思维和应用能力的培养以达到学以致用为目的,为后续经济管理专业知识的学习及工作打下良好基础。

本书可作为普通高等院校经管类专业微积分课程教材、大学理工类教学参考书,也可供成人教育或立志专转本的学生参考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

微积分.下册/许东亮,孙艳波主编. —北京:清华大学出版社,2017

ISBN 978-7-302-49583-3

I. ①微… II. ①许… ②孙… III. ①微积分—高等学校—教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 027344 号

责任编辑:佟丽霞

封面设计:常雪影

责任校对:赵丽敏

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:清华大学印刷厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:12.25

字 数:299 千字

版 次:2017 年 12 月第 1 版

印 次:2017 年 12 月第 1 次印刷

印 数:1~2500

定 价:32.00 元

产品编号:077320-01

前言

经过多年的教学改革实践,随着高等院校本科教学质量工程的推进,民办高校和独立学院对微积分的教学提出了更高的目标.为满足新形势下培养高素质专门人才所必须具有的微积分知识的实际需要,迫切需要编写新的微积分教材以适应分类教学的要求.本书是编者在多年本科教学的基础上,在经典教材的理论框架下按照突出数学思想和数学方法、淡化运算技巧、强调应用实例的原则编写而成的.

微积分课程的教学与教材改革,一直是学院各级领导与教师们的工作重点.为了更好地满足当前经管类各专业对微积分的实际需求及配合其专业课程教学,提高学生应用数学知识解决实际问题的能力,本书融入了经管类各专业的相关应用实例.本书体现了以下特色:

首先,适当降低了部分内容的深度和广度的要求,特别是淡化了各种运算技巧,但提高了数学思想和数学应用方面的要求,这样既能面对高等教育大众化的现实,又能兼顾学生的可接受性以及中学数学教学的衔接.

其次,加强基本能力的培养,本书例题习题较多,每章最后还有总复习题,书末附有部分习题答案与提示,以帮助读者加强训练与检测学习效果,从而巩固相关知识.

《微积分》分上、下两册,均由具有丰富教学经验的一线教师编写完成.本书的编写者在多年的本科教学中积累了丰富的经验,了解学生在学习微积分中的困难与需求,所以尽最大努力从严密的数学语言描述中,保留反映数学思想本质的内容,摒弃非本质的内容,以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题的能力.

本书为下册,内容包括:第1章空间解析几何与向量代数;第2章多元函数微分学;第3章二重积分;第4章无穷级数;第5章微分方程.下册由许东亮、孙艳波、蔡高玉、孙蕾、张慧负责编写,许东亮、孙艳波负责全书的统稿及修改定稿.

本书的编写采纳了同行们提出的一些宝贵意见和建议,本书的出版也得到了出版社的大力支持,在此表示衷心的感谢!

由于时间仓促,加之编者水平有限,书中缺点和错误在所难免,恳请广大同行、读者批评指正.

编者

2017年7月

目 录

第 1 章 空间解析几何与向量代数	1
1.1 向量及其线性运算	1
1.1.1 向量的概念	1
1.1.2 向量的线性运算	2
习题 1-1	5
1.2 空间直角坐标系 向量的坐标	5
1.2.1 空间直角坐标系	5
1.2.2 向量的坐标表示	6
1.2.3 向量的代数运算	7
1.2.4 向量的模与方向余弦	8
1.2.5 向量在轴上的投影	10
习题 1-2	11
1.3 数量积与向量积	11
1.3.1 两向量的数量积	11
1.3.2 两向量的向量积	13
习题 1-3	16
1.4 曲面及其方程	16
1.4.1 曲面方程的概念	16
1.4.2 旋转曲面	17
1.4.3 柱面	19
习题 1-4	20
1.5 空间曲线及其方程	20
1.5.1 空间曲线的一般方程	20
1.5.2 空间曲线的参数方程	21
1.5.3 空间曲线在坐标面上的投影	22
习题 1-5	24
1.6 平面及其方程	24
1.6.1 平面的点法式方程	24
1.6.2 平面的一般方程	25
1.6.3 平面的截距式方程	26
1.6.4 两平面的夹角	27

1.6.5 点到平面的距离	28
习题 1-6	29
1.7 空间直线及其方程	30
1.7.1 空间直线的一般方程	30
1.7.2 空间直线的对称式方程与参数方程	30
1.7.3 两直线的夹角	32
1.7.4 直线与平面的夹角	33
1.7.5 平面束	34
习题 1-7	34
总习题 1	35
第 2 章 多元函数微分学	37
2.1 多元函数的基本概念	37
2.1.1 平面区域的概念	37
2.1.2 n 维空间的概念	39
2.1.3 二元函数的概念	39
2.1.4 二元函数的极限	40
2.1.5 二元函数的连续性	42
习题 2-1	43
2.2 偏导数	44
2.2.1 偏导数定义	44
2.2.2 高阶偏导数	46
习题 2-2	48
2.3 全微分及其应用	49
2.3.1 全微分的概念	49
2.3.2 函数可微分的条件	50
2.3.3 二元函数的线性化	52
习题 2-3	54
2.4 多元复合函数的求导法则	54
2.4.1 复合函数的中间变量为一元函数的情形	54
2.4.2 复合函数的中间变量为多元函数的情形	55
2.4.3 复合函数的中间变量既有一元函数也有多元函数的情形	56
2.4.4 全微分形式的不变性	58
习题 2-4	59
2.5 隐函数的求导法则	59
2.5.1 一个方程的情形	59
2.5.2 方程组的情形	63
习题 2-5	65
2.6 多元函数的极值	66

2.6.1 二元函数极值的概念	66
2.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法	69
2.6.3 最小二乘法	72
习题 2-6	74
总习题 2	75
第 3 章 二重积分	77
3.1 二重积分的概念与性质	77
3.1.1 二重积分的概念	77
3.1.2 二重积分的性质	79
习题 3-1	81
3.2 二重积分的计算(一)	81
3.2.1 利用直角坐标计算二重积分	82
习题 3-2	86
3.3 二重积分的计算(二)	87
3.3.1 在极坐标系下计算二重积分	87
3.3.2 一般曲线坐标系中二重积分的计算	90
习题 3-3	92
3.4 二重积分的应用	93
3.4.1 曲面面积	93
3.4.2 质心	93
习题 3-4	94
总习题 3	94
第 4 章 无穷级数	96
4.1 常数项级数的概念和性质	96
4.1.1 常数项级数的概念	96
4.1.2 常数项级数的基本性质	99
习题 4-1	102
4.2 正项级数的判别法	103
4.2.1 正项级数的概念	103
4.2.2 正项级数敛散性的判别法	105
习题 4-2	111
4.3 交错级数	112
4.3.1 交错级数定义	112
4.3.2 绝对收敛与条件收敛	114
4.3.3 绝对收敛级数的性质	116
习题 4-3	116
4.4 幂级数	117

4.4.1	函数项级数的概念	117
4.4.2	幂级数及其收敛性	118
4.4.3	幂级数的运算	123
	习题 4-4	127
4.5	函数的幂级数展开	127
4.5.1	泰勒级数	127
4.5.2	函数的幂级数展开	130
	习题 4-5	136
4.6	幂级数的应用	136
4.6.1	函数值的近似计算	136
4.6.2	定积分的近似计算	137
	习题 4-6	138
	总习题 4	138
第 5 章	微分方程	141
5.1	微分方程的基本概念	141
	习题 5-1	144
5.2	可分离变量的微分方程及齐次方程	145
5.2.1	可分离变量的微分方程	145
5.2.2	齐次方程	148
5.2.3	可化为齐次方程的微分方程	150
	习题 5-2	152
5.3	一阶线性微分方程及伯努利方程	153
5.3.1	一阶线性微分方程	153
5.3.2	伯努利方程	156
	习题 5-3	157
5.4	可降阶的微分方程	158
5.4.1	$y''=f(x)$ 型	158
5.4.2	$y''=f(x,y')$ 型	159
5.4.3	$y''=f(y,y')$ 型	160
	习题 5-4	161
5.5	二阶线性微分方程解的结构	161
	习题 5-5	164
5.6	二阶常系数齐次线性微分方程	164
5.6.1	二阶常系数齐次线性微分方程及其解法	164
5.6.2	n 阶常系数齐次线性微分方程的解法	166
	习题 5-6	167
5.7	二阶常系数非齐次线性微分方程	168
5.7.1	$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	168

5.7.2 $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$ 或 $P_m(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$ 型	170
习题 5-7	172
*5.8 欧拉方程	172
习题 5-8	174
总习题 5	174
习题答案与提示	176

空间解析几何与向量代数

第 1 章

微
积
分
(下
册)

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题. 在平面解析几何中, 平面上的点与数一一对应起来, 把平面上的图形和方程对应起来, 从而可以用代数方法来研究几何问题, 这对一元函数微积分学习十分重要. 同样, 空间解析几何的建立对学习多元函数微积分也是必要的.

本章首先引进向量的概念以及向量的线性运算, 在此基础上建立空间直角坐标系, 然后利用坐标讨论向量的运算, 并介绍空间解析几何的有关内容, 其主要内容包括平面和直线方程、一些常用的空间曲线和曲面的方程以及关于它们的某些应用.

1.1 向量及其线性运算

1.1.1 向量的概念

在日常生活和生产实践中, 通常遇到这样两类量: 一类是只有大小没有方向的量, 如温度、距离、体积、质量等, 我们称之为**数量**(或**标量**); 另一类量如力、力矩、位移、速度、加速度等, 它们不仅有大小而且还有方向, 这种既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**). 在数学上, 往往用空间中的一条有方向的线段, 即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 如图 1-1-1 所示, 以 M_1 为起点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 有时也用一个黑体字母或书写时用一个上面加箭头的字母来表示向量, 例如, $\mathbf{a}, \mathbf{i}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{i}, \vec{v}, \vec{F}$ 等.

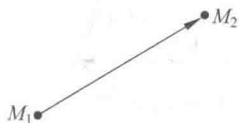


图 1-1-1

注 向量的大小和方向是组成向量不可分割的部分, 也是向量与数量的根本区别所在. 因此, 在讨论向量运算时, 必须将它的大小和方向统一起来考虑.

向量的大小叫做向量的**模**. 例如, 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}, \mathbf{a}, \vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|, |\mathbf{a}|, |\vec{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**. 模等于零的向量称为**零向量**, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

在实际问题中, 有些向量与其起点有关(例如质点运动的速度与该质点

的位置有关、一个力与该力的作用点的位置有关),有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,因此在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**(以后简称**向量**),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方.因此,我们可以把一个向量自由平移,使它的起点位置为任意点.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 a 和 b 的模相等,且方向相同,我们就称向量 a 和 b 相等,记作 $a=b$.这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.如果两个非零向量 a 与 b 的方向相同或者相反,就称这两个向量平行,记作 $a \parallel b$.由于零向量的方向可以看作是任意的,因此可以认为零向量平行于任何向量.

1.1.2 向量的线性运算

向量加减及数乘向量统称为向量的**线性运算**.下面我们分别介绍.

1. 向量的加减法

定义 1 设有两个向量 a 与 b ,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB}=a$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=b$,连接 AC (图 1-1-2),则向量 $\overrightarrow{AC}=c$ 称为向量 a 与 b 的和,记作 $a+b$,即

$$c = a + b.$$

上述作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

类似地,我们也有向量相加的**平行四边形法则**,即:当向量 a 与 b 不平行时,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AD}=b$,以 AB, AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC (图 1-1-3),显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 即等于向量 a 与 b 的和 $a+b$.

向量的加法满足下列运算规律:

- (1) 交换律 $a+b=b+a$;
- (2) 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

对于(1),按向量加法的三角形法则,从图 1-1-3 可见

$$a+b = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad b+a = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC},$$

所以向量的加法满足交换律.

对于(2),如图 1-1-4 所示,先作 $a+b$,再将其与 c 相加,即得和 $(a+b)+c$,如以 a 与 $(b+c)$ 相加,则得同一结果,所以向量的加法满足结合律.

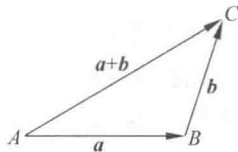


图 1-1-2

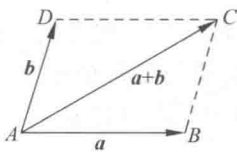


图 1-1-3

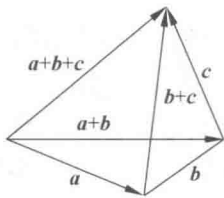


图 1-1-4

由向量加法的交换律与结合律,得 $n(n \geq 3)$ 个向量相加的法则如下:以前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.如图 1-1-5 所示,有

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

设 a 为一向量, 与 a 的模相等而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记作 $-a$. 由此, 我们规定两个向量 b 与 a 的差

$$b - a = b + (-a).$$

即向量 b 与 $-a$ 的和就是向量 b 与 a 的差 $b - a$ (图 1-1-6). 特别地, 当 $a = b$ 时, 有 $a - a = a + (-a) = 0$.

显然, 任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O , 有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

因此, 若把向量 a 与 b 移到同一起点 O , 则从 a 的终点 A 向 b 的终点 B 所引的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 b 与 a 的差 $b - a$ (图 1-1-7).

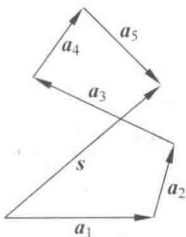


图 1-1-5

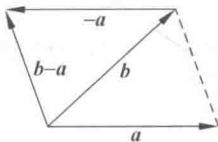


图 1-1-6

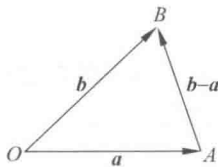


图 1-1-7

2. 向量与数的乘法

定义 2 实数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量, 记作 λa , λa 的模是 a 的模的 $|\lambda|$ 倍, 即

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|.$$

当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 的方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 的方向相反; 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 $\lambda a = 0$.

从几何上看, 当 $\lambda > 0$ 时, λa 的大小是 a 的大小的 λ 倍, 方向不变; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 的大小是 a 的大小的 $|\lambda|$ 倍, 方向相反 (图 1-1-8).

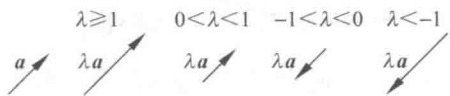


图 1-1-8

数与向量的乘积满足下列运算规律:

(1) 结合律 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.

事实上, 由数与向量的乘积的定义可知, 向量 $\lambda(\mu a)$, $\mu(\lambda a)$, $(\lambda\mu)a$ 都是平行的向量, 它们的方向也是相同的, 而且

$$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|,$$

所以

$$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a.$$

(2) 分配律 $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

类似地, 这个规律同样可以按数与向量的乘积的定义来证明.

例 1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$

和 $\overrightarrow{MD}$, 这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 1-1-9).

解 由于平行四边形的对角线互相平分, 所以

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}, \quad \text{即} \quad -(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\overrightarrow{MA},$$

故

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}); \quad \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

又 $\mathbf{b} - \mathbf{a} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$, 故

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \quad \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

通常将与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量称为 $\mathbf{a}$ 的单位向量, 记作 $\mathbf{a}^\circ$ (图 1-1-10). 由数与向量的乘积的定义, 有

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^\circ, \quad \mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量, 这一过程又称为将向量单位化.

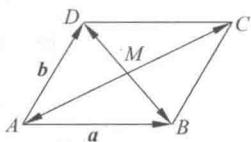


图 1-1-9

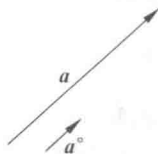


图 1-1-10

根据数与向量的乘积的定义, $\lambda \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行. 因此, 我们常用数与向量的乘积来说明两个向量的平行关系, 即有

定理 1 设向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 那么, 向量 $\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$, 取 $\lambda = \pm \left| \frac{b}{a} \right|$, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时 λ 取正值, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向时 λ 取负值, 即有 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$. 这是因为此时 $\mathbf{b}$ 与 $\lambda \mathbf{a}$ 同向, 且

$$|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}| = \left| \frac{b}{a} \right| |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设存在 λ, μ , 使 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$, 两式相减, 使得

$$(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad \text{即} \quad |\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0.$$

因为 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

定理 1 是建立数轴的理论依据. 我们知道, 给定一个点、一个方向及单位长度, 就确定了一个数轴. 又由于一个单位向量既确定了方向, 又确定了单位长度, 因此, 给定一个点及一个单位向量就确定了一个数轴.

设点 O 及单位向量 $\mathbf{i}$ 确定了数轴 Ox , 如图 1-1-11, 则对于轴上任一点 P , 对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 由于 $\overrightarrow{OP} \parallel \mathbf{i}$, 根据定理 1, 必存在唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}$, 其中 x 称为数轴上有向线



图 1-1-11

段 $\overrightarrow{OP}$ 的值,这样,向量 $\overrightarrow{OP}$ 就与实数 x 一一对应了.于是

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} \leftrightarrow \text{实数 } x,$$

即数轴上的点 P 与实数 x 一一对应.我们定义实数 x 为数轴上点 P 的坐标.

例2 在 x 轴上取一点 O 作为坐标原点.设 A, B 是 x 轴上两点,点 A 的坐标为5,且向量 $\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i}$,其中 $\mathbf{i}$ 是与 x 轴同方向的单位向量,求点 B 的坐标.

解 因为点 A 在 x 轴上的坐标为5,所以 $\overrightarrow{OA} = 5\mathbf{i}$,又 $\overrightarrow{AB} = -3\mathbf{i}$,于是

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{i} = 2\mathbf{i},$$

故点 B 的坐标为2.

习题 1-1

1. 填空题

(1) 要使 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 成立,向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 应满足_____;

(2) 要使 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ 成立,向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 应满足_____.

2. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$. 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示向量 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

3. 化简 $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 5\left(-\frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{\mathbf{b} - 3\mathbf{a}}{5}\right)$.

4. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明它是平行四边形.

5. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分,设分点依次为 D_1, D_2, D_3, D_4 ,再把各分点与点 A 连接,试以 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{D_1A}, \overrightarrow{D_2A}, \overrightarrow{D_3A}$ 和 $\overrightarrow{D_4A}$.

6. 证明空间四边形相邻各边中点的连线构成平行四边形.

1.2 空间直角坐标系 向量的坐标

本节将在向量的基础上介绍空间直角坐标系,进一步建立空间中的点与有序数组的对应关系,引进研究向量的代数方法,从而建立代数方法与几何直观的联系.

1.2.1 空间直角坐标系

在平面解析几何中,我们建立了平面直角坐标系,并通过平面直角坐标系,将平面中的点与有序数组(即点的坐标 (x, y))对应起来,于是平面上的曲线与二元方程 $F(x, y) = 0$ 相对应.同样,为了把空间中的任一点与有序数组 (x, y, z) 对应,把空间中的一张曲面与一个三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 相对应,我们建立空间直角坐标系.

1. 坐标系的建立

过空间中一定点 O ,作三个两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称为坐标轴.其坐标轴的正向按右手规则确定:首先选定 x 轴和 y 轴的正向,然后以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时,大拇指的指向就是 z 轴的正向.各轴上再规定一个长度单位,则构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$,点 O 称为

坐标原点(图 1-2-1).

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为坐标面. x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面,另两个由 y 轴和 z 轴及由 z 轴和 x 轴所确定的坐标面,分别称为 yOz 面及 zOx 面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限,共八个卦限.其中, $x>0, y>0, z>0$ 部分为第Ⅰ卦限,第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 面的上方,按逆时针方向确定.第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 面的下方,由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限,按逆时针方向确定(图 1-2-2).

2. 空间中的点与三元有序数组的对应

设 M 为空间中任意一点,过点 M 作垂直于 xOy 面的直线,交 xOy 面于点 N ,再过点 N 在 xOy 面上分别作垂直于 x 轴、 y 轴的直线,分别交 x 轴于 P 点,交 y 轴于 Q 点,连接 ON ,过点 M 作直线平行于 ON ,必交 z 轴于一点,记作 R (图 1-2-3).设 P, Q, R 三点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标分别为 x, y, z .这样,空间的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 x, y, z .反之,若给定一有序数组 x, y, z ,就可以在空间中确定唯一的点 M .这样就建立了空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系.这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标,并依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标,记作 $M(x, y, z)$.

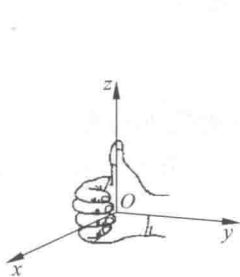


图 1-2-1

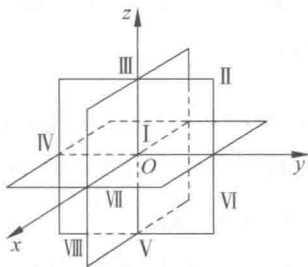


图 1-2-2

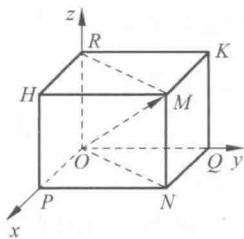


图 1-2-3

坐标面和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征.例如, x 轴上的点,其纵坐标 $y=0$,竖坐标 $z=0$,于是,其坐标为 $(x, 0, 0)$;同理, y 轴上的点的坐标为 $(0, y, 0)$; z 轴上的点的坐标为 $(0, 0, z)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$; yOz 面上的点的坐标为 $(0, y, z)$; zOx 面上的点的坐标为 $(x, 0, z)$.原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

设点 $M(x, y, z)$ 为空间一点,则点 M 关于坐标面 xOy 的对称点为 $M_1(x, y, -z)$;关于 x 轴的对称点为 $M_2(x, -y, -z)$;关于原点的对称点为 $M_3(-x, -y, -z)$.

1.2.2 向量的坐标表示

前面讨论的向量的各种运算称为几何运算,只能在图形上表示,计算起来不方便.而通过坐标法,我们实现了平面或空间中的点与有序数组的一一对应,同样我们可建立向量与有序数组之间的对应关系,引入向量的坐标表示,将向量的几何运算转化为代数运算.

设 r 为空间中一向量,将向量 r 平行移动,使其起点与坐标原点重合,终点为 $M(x, y, z)$,则有 $\overrightarrow{OM} = r$.以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体,如图 1-2-4 所示,根据向量的加法法则,有

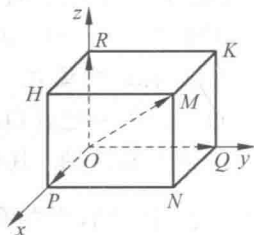


图 1-2-4

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x, y, z 轴正向的单位向量, 则有

$$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}, \quad \overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}, \quad \overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k},$$

从而

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式. $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x, y, z 轴方向的分向量.

显然, 给定向量 $\boldsymbol{r}$, 就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 三个分向量, 进而确定了 x, y, z 三个有序数; 反之, 给定三个有序数 x, y, z , 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M . 于是, 点 M 、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x, y, z 之间存在一一对应关系:

$$\text{点 } M \leftrightarrow \text{向量 } \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x, y, z).$$

据此, 我们称有序数 x, y, z 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标, 记作 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$.

向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 显然, 一个点与该点的向径有相同的坐标.

上面的讨论表明, 起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 而终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \quad (1.2.1)$$

1.2.3 向量的代数运算

利用向量的坐标, 就可以把将向量的几何运算转化为代数运算.

设

$$\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\},$$

即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律, 以及向量与数乘法的结合律与分配律, 有

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k} \quad (\lambda \text{ 为实数}).$$

即

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}, \quad (1.2.2)$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}, \quad (1.2.3)$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}. \quad (1.2.4)$$

由此可见, 对向量进行加、减及数乘运算, 只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

根据 1.1 节定理 1 的结论, 当向量 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, 向量 $\boldsymbol{b} // \boldsymbol{a} \Leftrightarrow$ 存在唯一的实数 λ , 使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$, 其坐标表达式为

$$\{b_x, b_y, b_z\} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\},$$

即向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的对应坐标成比例:

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \quad (1.2.5)$$

例1 设 $a = \{5, 7, 2\}$, $b = \{3, 0, 4\}$, $c = \{-6, 1, -1\}$, 求 $3a - 2b + c$ 及 $5a + 6b + c$.

解 因为 $a = \{5, 7, 2\}$, $b = \{3, 0, 4\}$, $c = \{-6, 1, -1\}$, 所以

$$3a - 2b + c = 3\{5, 7, 2\} - 2\{3, 0, 4\} + \{-6, 1, -1\} = \{3, 22, -3\},$$

$$5a + 6b + c = 5\{5, 7, 2\} + 6\{3, 0, 4\} + \{-6, 1, -1\} = \{37, 36, 33\}.$$

例2 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda (\lambda \neq -1)$, 试在有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 上求一点 $M(x, y, z)$, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图 1-2-5 所示, 由于 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, 根据题意, 有 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, 即

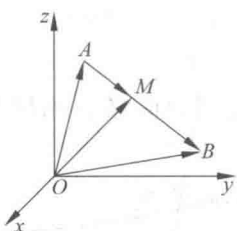


图 1-2-5

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{1+\lambda}[\{x_1, y_1, z_1\} + \lambda\{x_2, y_2, z_2\}] \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\},\end{aligned}$$

于是, 所求点为

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

本例中的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 点 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点, 其坐标为 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

注 通过本例, 我们应注意, 点 M 与向量 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标, 因此, 求点 M 的坐标, 就是求 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

1.2.4 向量的模与方向余弦

1. 向量的模与空间中两点间的距离公式

设向量 $r = \{x, y, z\}$, 作 $\overrightarrow{OM} = r$, 如图 1-2-6 所示, 有

$$r = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得 $|r| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2}$,

由 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$, 有

$$|\overrightarrow{OP}| = |x|, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |y|, \quad |\overrightarrow{OR}| = |z|,$$

于是, 向量 r 的模为

$$|r| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.2.6)$$

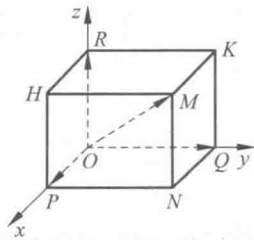


图 1-2-6

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任意两点, 则点 M_1 与点 M_2 间的距离 $|M_1M_2|$ 就是向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 由

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\},$$

即得空间中两点间的距离公式

$$|M_1M_2| = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (1.2.7)$$