纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第37号

C^n中的齐性有界域理论

许以超 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助出版

纯粹数学与应用数学专著 第 37 号

C^n 中的齐性有界域理论

许以超 著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书介绍了国际上许多研究工作者在齐性 Siegel 域方面的工作，并且详细介绍了作者多年来在齐性 Siegel 域方面的研究成果，同时提出了若干尚未解决的问题.

本书主要内容包括：Siegel 域，齐性 Siegel 域，正规 Siegel 域，对称正规 Siegel 域等的性质，以及典型 Siegel 域的全纯自同构群，典型 Siegel 域的 Cauchy-Szegö 核和形式 Poisson 核，齐性有界域的其它实现，方型域及对偶方型域的分类.

本书可供高等院校数学系教师、研究生，数学研究工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：李静科／责任校对：赵彦超
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018年 1 月 印 刷 印张：27 1/2
字数：355 000

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主　编：张恭庆

副主编：（以姓氏笔画为序）

马志明　王　元　石钟慈

李大潜　杨　乐　姜伯驹

序

从历史上看，$n(\geq 2)$ 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域在全纯同构下的分类是一个很复杂的问题. 这问题首先是由 Poincaré 在 1907 年提出来的. 他指出了双圆柱 $\{(z_1,z_2)\in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|<1,|z_2|<1\}$ 不全纯同构于超球 $\{(z_1,z_2)\in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2<1\}$, 然而这两个域都是单连通的. 这说明了单复变数函数论的著名的 Riemann 定理不能推广到 $n\geq 2$ 个复变数的情形. 直到 1935 年， É.Cartan 利用他给出的实 Riemann 对称空间的分类结果，给出了对称有界域的分类，且除了 $\mathbb{C}^{16}$ 中的域 $E_{6(-14)}/\mathrm{SO}\,(10)\times T$ 和 $\mathbb{C}^{27}$ 中的域 $E_{7(-25)}/E_6\times T$ 外，给出了所有不可分解对称有界域的实现. 这些域的实现被华罗庚教授称为典型域. 同时，H.Cartan 在 1935 年证明了当 $\mathbb{C}^n, n=1,2,3$ 时，齐性有界域必对称. 这使得 É.Cartan 在同年提出如下的猜想：$\mathbb{C}^n$ 中的齐性有界域必对称. 但是 Piatetski-Shapiro 在 1959 年举出了两个反例, 从而否定了 Cartan 猜想. 另一方面，利用 Siegel 在 1943 年给出的典型域的无界域实现，从而在 1961 年引进了 Siegel 域的概念. 接着在 1963 年 Vinberg,Gindikin 和 Piatetski-Shapiro 利用强 J 李代数的代数结构，证明了齐性有界域必全纯同构于齐性 Siegel 域. 这样一来，齐性有界域在全纯同构下的分类问题，便化为齐性 Siegel 域在仿射同构下的分类.

进一步的问题是实现齐性 Siegel 域. 由于齐性 Siegel 域是利用一种仿射齐性锥构造的. 所以首先要解决齐性锥的实现. 在 1963 年， Vinberg 将齐性锥实现为一类非结合代数（称为 T 代数）的子集. 由于秩为 N 的第二类齐性 Siegel 域是另一个秩为 $N+1$ 的第一类齐性 Siegel 域的截面，在 1975 年， Takauchi 将齐性 Siegel 域实现为一种特殊的 T 代数的子集. 从上面这些实现方法出发，出现了大量工作.

但是从多复变数函数论的观点，在 n 维复欧氏空间 $\mathbb{C}^n$ 中实现齐性有界域是很重要的. 从 É.Cartan 在 $\mathbb{C}^n$ 中实现的四大类典型域出发，华罗庚给出了它们的最大全纯自同构群， Bergman 核函数， Bergman 度量， Cauchy-Szegö 核以及 Poisson 核的明显表达式，决定了平方可积全纯函数类的一组标准正交基. 另一方面， Siegel 和 Piatetski-Shapiro 利用 Siegel 给出的典型域的无界域实现，研究了它上面的全纯自同构群的离散子群及自守函数. 这一切都依赖于域为 $\mathbb{C}^n$ 的一个可明显表达的点集，它的全纯自同构群是一类有理分式构成的实李群.

正因为如此，我们需要寻找 $\mathbb{C}^n$ 的可明显表达的点集来实现齐性 Siegel 域. 特别包括具体实现一直困惑人们的两个例外典型域 $E_{6(-14)}/SO(10)\times T$ 及 $E_{7(-25)}/E_6\times T$.

本书的目的是介绍齐性 Siegel 域的理论. 我们利用一种新的实现方式，即构造一类特殊的齐性 Siegel 域，称为正规 Siegel 域 (旧名称为 N Siegel 域). 它由一组特定的矩阵，按照确定的方式来定义. 我们证明任意齐性 Siegel 域仿射同构于正规 Siegel 域，从而将齐性 Siegel 域的仿射分类问题化为正规 Siegel 域在一种特定的仿射同构下的分类，进而将问题化为定义正规 Siegel 域的矩阵组的一种特定的等价关系下的分类. 因此，一方面，我们可以对一类正规 Siegel 域 (称为方型域) 作出完全分类，它包含了 É.Cartan 定义的不可分解对称有界域，特别，给出了长期未能实现的例外典型域，它也包含了 Satake 引进的不可分解拟对称有界域. 另一方面，由于正规 Siegel 域的定义具体，所以给出了正规 Siegel 域的全纯自同构群的生成元集的明显表达式，以及 Bergman 核函数， Bergman 度量及其 Riemann 曲率，双全纯截曲率和 Cauchy-Szegö 核的明显表达式，从而利用一般公式，很容易得出例外典型域的各种核， Bergman 度量和曲率的明显表达式，并且证明了华罗庚引进的形式 Poisson 核是 Poisson 核的必要充分条件为齐性有界域是对称有界域. 这些结果进一步展示了可以利用正规 Siegel 域的实现来研究齐性有界域的函数论性质和几何性质.

本书共分八章. 第一章介绍 Siegel 域的定义和基本性质, 以及它的全纯自同构群. 第二章介绍齐性 Siegel 域的定义和基本性质. 第三章给出正规 Siegel 域是如何从齐性有界域的全纯自同构群的李代数构造出来的, 且证明了齐性 Siegel 域必仿射等价于正规 Siegel 域, 进而将正规 Siegel 域的仿射等价分类问题化为定义正规 Siegel 域的矩阵组的一种等价关系. 第四章证明正规 Siegel 域上的 Bergman 映射为全纯同构, 映像为可明显表达的齐性有界域, 从而给出了齐性有界域的有界域实现. 另一方面, 导出 Vinberg 的齐性锥的实现以及 Takeuchi 的齐性 Siegel 域的实现的定义, 第五章给出正规锥的最大线性自同构群, 以及正规 Siegel 域的最大全纯自同构群的无穷小变换群的明显表达式和最大全纯自同构群的一组生成元的明显表达式, 并且给出了有界域实现的原点迷向子群的明显表达式. 第六章从 E.Cartan 的对称有界域的定义出发, 利用前五章的结果, 从正规 Siegel 域的角度, 而不是利用 Riemann 对称空间分类, 给出了对称有界域的完全分类及典型域的实现. 这包括了 $\mathbb{C}^{16}$ 及 $\mathbb{C}^{27}$ 中的例外典型域. 第七章给出了正规 Siegel 域的 Cauchy-Szegö 核以及形式 Poisson 核, 且证明了形式 Poisson 核为 Poisson 核当且仅当正规 Siegel 域对称. 第八章则给出方型域的分类以及第一类对偶方型域的分类. 这指出了互不全纯等价的标准域有连续统个. 由此说明, 要给出所有互不全纯等价的齐性有界域的具体分类是一个极困难及复杂的问题.

本书使用了一些符号, 请读者注意符号约定, 特别是向量符号. 我们用 $1 \times n$ 矩阵表示向量, 而不是习惯上用 $n \times 1$ 矩阵表示向量. 另外, $n \times m$ 矩阵 A 的第 i 行, 第 j 列交叉元素, 我们用矩阵乘积 $e_i A e_j'$ 表示, 其中 $e_k = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, 1 为第 k 个分量.

本书所需的基础知识为李群及其李代数, 微分几何和多复变数函数论.

这本书一方面包含了国际上许多研究工作者在齐性 Siegel 域方面的工作. 另一方面, 详细介绍了作者多年来在齐性 Siegel 域

方面的系统工作，也包含了一些尚未发表的工作．同时提出了若干尚未解决的问题．

本书的出版,得到中国自然科学基金委员会重点项目的资助，也得到中国科学院科学出版基金的资助以及中国科学院数学研究所的支持和鼓励．另一方面，科学出版社毕颖女士的辛勤劳动，使本书得以早日问世，在此表示衷心的感谢．最后，必须指出，书中难免出现各种错误，欢迎读者批评指正．

许以超

中国科学院数学研究所

1998 年 6 月 30 日

目　　录

符号约定

在本书中使用下面统一的符号，且一般不再加以说明.

(1) $\mathbb{R}^n$ 记 n 维实 Euclid 空间，$\mathbb{C}^m$ 记 m 维复 Euclid 空间. 任取 $a=(a_1,\cdots,a_m)\in\mathbb{C}^m$, 则 $\mathrm{Re}(a)$ 记 a 的实部，$\mathrm{Im}(a)$ 记 a 的虚部.

(2) $\mathbb{C}^m$ 的向量为 $1\times m$ 复矩阵. 特别 e_i 为 $1\times m$ 矩阵，它的第 i 个坐标为 1, 其余坐标为零. 一般在使用 e_i 时，我们不标明它是多少维向量，其维数由 i 所取的最大正整数来决定.

(3) d 表示关于点的复坐标 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n$ 的全微分，$\overline{d}$ 为 d 的共轭，又记

$$\frac{\partial}{\partial z}=\mathrm{grad}_z=(\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}).$$

在实的情形，d 表示通常的全微分.

(4) 记 $\mathfrak{L}$ 为线性空间. $\mathfrak{L}$ 的元素 $l_1,l_2,\cdots,l_t$ 线性生成的子空间记作 $<l_1,l_2,\cdots,l_t>$.

(5) 记 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的域 (连通开集),D 上全纯自同构全体组成 D 上的连续变换群，记作 $\mathrm{Aut}(D)$. 在 D 中取定一点 p, 则

$$\mathrm{Iso}_p(D)=\{\sigma\in\mathrm{Aut}(D)\quad|\quad\sigma(p)=p\}$$

为 $\mathrm{Aut}(D)$ 的闭拓扑子群，称为点 p 的迷向子群. 当 $\mathrm{Aut}(D)$ 为 D 上的实李变换群时，$\mathrm{Iso}_p(D)$ 为 $\mathrm{Aut}(D)$ 的闭李子群. 记 $\mathrm{aut}(D)$ 和 $\mathrm{iso}_p(D)$ 分别为李群 $\mathrm{Aut}(D)$ 和 $\mathrm{Iso}_p(D)$ 的李代数.

(6) $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 分别记作复数域和实数域上的一般线性群. $\mathrm{U}(n)$ 为 n 阶酉群，$\mathrm{O}(n)$ 为 n 阶实正交群. 它们的李代数分别记作 $\mathrm{gl}(n,\mathbb{C}),\mathrm{gl}(n,\mathbb{R}),u(n),o(n)$.

(7) 记 $\mathrm{Aff}\,(D)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的域 D 上的所有仿射自同构构成的群. 所以 $\mathrm{Aff}\,(D) \subset \mathrm{Aut}\,(D)$. 当 $\mathrm{Aut}\,(D)$ 为实李群时, $\mathrm{Aff}\,(D)$ 为闭李子群. 这时, $\mathrm{aff}\,(D)$ 记作李群 $\mathrm{Aff}\,(D)$ 的李代数.

(8) 设 A 为 $n\times m$ 复矩阵, 记 $\overline{A}$ 为 A 的共轭矩阵, A' 为 A 的转置矩阵. 为了标明 A 的阶, 有时, 也记作 $A^{(n,m)}$. 当 $m=n$ 时, 也记作 $A^{(n)}$. I 或 $I^{(n)}$ 记 $n\times n$ 单位方阵.

(9) 当 A 为 $n\times n$ 实对称方阵或为 $n\times n$ Hermite 方阵时, 分别记 $A>0, A\geq 0, A<0, A\leq 0$ 为正定、半正定、负定、半负定的.

(10) A_{ij}^{tk} 为 $n_{ik}\times n_{jk}$ 实矩阵, 集合

$$\mathfrak{S}=\{A_{ij}^{tk},\quad t=1,2,\cdots,n_{ij},\quad 1\leq i<j<k\leq N\}$$

为所有 A_{ij}^{tk} 构成的实矩阵组.

$n_{ik}\times n_{jk}$ 实矩阵 A_{ij}^{tk} 的第 p 行、第 q 列交叉元素为如下三个矩阵的乘积:

$$e_p\,A_{ij}^{tk}\,e_q',$$

其中 $e_p\in\ \mathbb{R}^{n_{ik}}, e_q\in\ \mathbb{R}^{n_{jk}}$.

集合

$$\{Q_{ij}^{(t)}, t=1,2,\cdots,n_{ij}, 1\leq i<j\leq N\}$$

为 n_{ij} 个 $m_i\times m_j$ 复矩阵, $1\leq i<j\leq N$ 构成的复矩阵组. 这里 $Q_{ij}^{(t)}$ 的指标 t 不是方幂.

$m_i\times m_j$ 复矩阵 $Q_{ij}^{(t)}$ 的第 p 行、第 q 列交叉元素为如下三个矩阵的乘积:

$$e_p\,Q_{ij}^{(t)}\,e_q',$$

其中 $e_p\in\ \mathbb{C}^{m_i}, e_q\in\ \mathbb{C}^{m_j}$.

(11) $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 中的域 D 上的解析或全纯向量场

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\in\ \mathrm{aut}\,(D)$$

决定的单参数子群为域 D 上的解析或全纯自同构

$$y=f(x,t),\quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

它是常微分方程组

$$\frac{dy(t)}{dt}=\xi(y(t))$$

的适合初值

$$y(0)=x$$

的唯一解析解，其中 $\xi(x)=(\xi_1(x),\cdots,\xi_n(x))$.

给定 $n\times n$ 矩阵 A, 则向量场 $xA\dfrac{\partial'}{\partial x}$ 决定了李群 $\mathrm{GL}\,(n,\mathbb{R})$ 的单参数子群

$$y=x\exp tA,\quad \forall\in\mathbb{R}.$$

(12) 给定非负整数 $n_{ij}, 1\le i\le j\le N$, 其中 $n_{ii}=1, 1\le i\le N$, 记 $n=\sum\limits_{1\le i\le j\le N}n_{ij}$. 给定非负整数 $m_i, 1\le i\le N$, 记 $m=\sum\limits_{i=1}^{N}m_i$. $\mathbb{C}^n$ 的点 z 的坐标排为

$$z=(s_1,z_2,s_2,\cdots,z_N,s_N),\quad z_j=(z_{1j},z_{2j},\cdots,z_{j-1,j}),$$

其中

$$s_i\in\mathbb{C},\quad z_{ij}\in\mathbb{C}^{n_{ij}},\quad z_{ij}=(z_{ij}^{(1)},\cdots,z_{ij}^{(n_{ij})}).$$

记 $e_{jj}=z$, 其中 $s_j=1$, 其余坐标全为零. 记 $e_{ij}^{(t)}=z$, 其中 $z_{ij}^{(t)}=1$, 其余坐标全为零. $\mathbb{C}^m$ 的点 u 的坐标排为

$$u=(u_1,\cdots,u_N),\quad u_j\in\mathbb{C}^{m_j},\quad 1\le j\le N.$$

又 $u_j=(u_j^{(1)},\cdots,u_j^{(m_j)})$. 记 $e_j^{(t)}=u$, 其中 $u_j^{(t)}=1$, 其余坐标全为零. 本书常取固定点 $(z,u)=(\sqrt{-1}\,v_0,0)$, 其中

$$v_0=(1,0,1,\cdots,0,1)=\sum_{i=1}^{N}e_{ii}.$$

第一章　Siegel 域

在这一章，我们引进 Siegel 域和它的 Silov 边界. 讨论它及有界域的 Bergman 核函数和 Bergman 度量，以及它的全纯自同构群的无穷小变换群.

§1.1　Siegel 域

定义 1.1.1　$\mathbb{R}^n$ 的子集 V 称为以原点为顶点的锥，如果任取 $x \in V, \lambda > 0$, 则 $\lambda x \in V$. 锥 V 称为凸锥，如果任取 $x, y \in V, 0 \leq \lambda \leq 1$, 有

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in V.$$

定义 1.1.2　设 V 为 $\mathbb{R}$ 的以原点为顶点，且不包含整条直线的开凸锥[1]. $\mathbb{C}^n$ 的点集

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Im}\,(z) \in V\} \tag{1.1.1}$$

称为锥 V 上的第一类 Siegel 域，或称为 $\mathbb{C}^n$ 的锥 V 上的管状域.

引理 1.1.3　设 $D(V)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的锥 V 上的第一类 Siegel 域，则 $D(V)$ 全纯同构于 $\mathbb{C}^n$ 的有界域.

证　由于锥 V 不包含整条直线，所以易证 V 线性同构于开凸锥 V_1, 其中 V_1 在 $\mathbb{R}^n$ 的第一卦限中，即

$$V_1 \subset V_0 = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 > 0, \cdots, x_n > 0\}. \tag{1.1.2}$$

---

1)本书今后凡是提到开凸锥，都是指 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点，且不包含整条直线的开凸锥.

因此 Siegel 域 $D(V)$ 在相同的线性同构下同构于第一类 Siegel 域 $D(V_1)$. 由第一类 Siegel 域的定义可知 $D(V_1) \subset D(V_0)$, 且 $D(V_0)$ 为 n 个上半平面的拓扑积, 所以 $D(V_0)$ 全纯同构于 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域. 因此第一类 Siegel 域 $D(V)$ 全纯同构于 $\mathbb{C}^n$ 中的有界域. 证完.

定义 1.1.4 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点, 且不包含整条直线的开凸锥. 设 $H_1, \cdots, H_n$ 为 n 个 $m \times n$ Hermite 矩阵. 记

$$F(u,u) = (u\,H_1\overline{u}', \cdots, u\,H_n\overline{u}') \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in \mathbb{C}^m. \tag{1.1.3}$$

设 $F(u,u)$ 适合条件

(1) $F(u,u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$,

(2) $F(u,u) \in \overline{V}$, $\forall\, u \in \mathbb{C}^m$,

其中 $\overline{V}$ 记作锥 V 的闭包. $\mathbb{C}^{n+m}$ 的点集

$$D(V,F) = \{(z,u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\,(z) - F(u,u) \in V\} \tag{1.1.4}$$

称为关于锥 V 及向量函数 F 的第二类 Siegel 域.

显然, 当 $F = 0$ 时, 第二类 Siegel 域就是第一类 Siegel 域, 所以我们统称第一类及第二类 Siegel 域为 Siegel 域.

引理 1.1.5 设 $D(V,F)$ 为 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ 中关于锥 V 及向量函数 F 的 Siegel 域, 则 $D(V,F)$ 全纯同构于有界域.

证 在 $\mathbb{R}^n$ 中任给线性同构 $x \to xA$, 则开凸锥 V 映为开凸锥

$$V_1 = \{xA \mid \forall\, x \in V\}.$$

记 $F_1(u,u) = F(u,u)\,A$, $\forall\, u \in \mathbb{C}^m$. 易证 $D(V_1,F_1)$ 仍为 Siegel 域, 且 Siegel 域 $D(V,F)$ 在线性同构 $z \to zA, u \to u$ 下映为 Siegel 域 $D(V_1,F_1)$. 所以我们无妨假设开凸锥 V 包含在由式 (1.1.2) 定义的开凸锥 V_0 中. 由 Siegel 域的定义可知, 当 $(z,u) \in D(V,F)$ 时, 有

$$\mathrm{Im}\,(z_i) - uH_i\overline{u}' > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

熟知在 $\mathbb{C}^m$ 上存在线性函数 $f_i^{(1)}(u), f_i^{(2)}(u), \cdots, f_i^{(s_i)}(u)$, 使得

$$uH_i\overline{u}' = \sum_{j=1}^{s_i} \mid f_i^{(j)}(u) \mid^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

记 $\{f_i^{(j)}(u), 1 \leq j \leq t_i, 1 \leq i \leq n\}$ 为向量集 $\{f_i^{(j)}(u), 1 \leq j \leq s_i, 1 \leq i \leq n\}$ 的极大线性无关部分组. 由 Siegel 域的定义条件又可知, 线性方程组 $f_i^{(j)}(u) = 0, 1 \leq j \leq t_i, 1 \leq i \leq n$ 在 $\mathbb{C}^m$ 中只有零解, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = m$. 另一方面

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(z_i) - \sum_{j=1}^{t_i} |f_i^{(j)}(u)|^2 &\geq \mathrm{Im}\,(z_i) - \sum_{j=1}^{s_i} |f_i^{(j)}(u)|^2 \\ &= \mathrm{Im}\,(z_i) - uH_i\overline{u}' > 0, \ 1 \leq i \leq N.\end{aligned}$$

引进映射 σ:

$$\begin{aligned}Z_i &= (z_i - \sqrt{-1})(z_i + \sqrt{-1})^{-1}, \\ U_i^{(j)} &= 2f_i^{(j)}(u)(z_i + \sqrt{-1})^{-1},\end{aligned}$$

其中 $1 \leq j \leq t_i, 1 \leq i \leq n$. 易证 σ 给出 Siegel 域

$$\{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\,(z_i) - \sum_{j=1}^{t_i} |f_i^{(j)}(u)|^2 > 0, \ 1 \leq i \leq n\}$$

到单位超球

$$D_i = \{(Z_i, U_i^{(1)}, \cdots, U_i^{(t_i)}) \in \mathbb{C}^{1+t_i} \Big| |Z_i|^2 + \sum_{j=1}^{t_i} |U_i^{(j)}|^2 < 1\},$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n$ 的拓扑积 $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ 上的全纯同构. 因此证明了 $\sigma(D(V, F)) \subset D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$, 即 $D(V, F)$ 在 σ 下全纯同构于有界域. 证完.

引理 1.1.6 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为顶点的开锥, $F(u, u) \in \mathbb{R}^n, \forall\, u \in \mathbb{C}^m$ 由定义 1.1.4 给出. 记点集

$$D(V, F) = \{(z, u) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \mid \mathrm{Im}\,(z) - F(u, u) \in V\},$$

则 $D(V,F)$ 为 $\mathbb{R}^{2(n+m)}$ 中的开凸集当且仅当 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集. 又 $D(V,F)$ 单连通当且仅当 V 单连通.

证 先证第一个断言. 在 $D(V,F)$ 中任取两点 (z_i,u_i), $i=1,2$ 及 $t\in[0,1]$, 则

$$v_i=\mathrm{Im}\,(z_i)-F(u_i,u_i)\in V,\ i=1,2,$$
$$\mathrm{Im}\,(tz_1+(1-t)z_2)-F(tu_1+(1-t)u_2,tu_1+(1-t)u_2)=v+v_0,$$

其中

$$\begin{aligned}v&=tv_1+(1-t)v_2\\&=t(\mathrm{Im}\,(z_1)-F(u_1,u_1))+(1-t)(\mathrm{Im}\,z_2-F(u_2,u_2)),\\v_0&=t(1-t)F(u_1-u_2,u_1-u_2).\end{aligned}$$

由向量函数 F 的条件 2 可知 $F(u_1-u_2,u_1-u_2)\in\overline{V}$, 这里 $\overline{V}$ 为 V 的闭包. 由 $0\le t\le 1$ 可知 $v_0\in\overline{V}$, 所以 $D(V,F)$ 为凸集当且仅当 $v+v_0\in V$, 即 $v\in V-v_0$. 这里

$$V-v_0=\{v\in\mathbb{R}^n\ \mid\ v+v_0\in V\}$$

为 V 在平移变换 $y=x-v_0$ 下的像. 由 $v_i=\mathrm{Im}\,(z_i)-F(u_i,u_i)\in V, v=tv_1+(1-t)v_2$ 可知 $D(V,F)$ 为凸集当且仅当 V 为凸集. 这证明了断言.

再证第二个断言. 任取 $D(V,F)$ 中的点 (z,u), 于是 $v=\mathrm{Im}\,(z)-F(u,u)\in V$. 因此有 $D(V,F)$ 到 $\mathbb{R}^n\times V\times\mathbb{C}^m$ 上的映射 σ, 它定义为

$$\sigma(z,u)=(\mathrm{Re}\,(z),\mathrm{Im}\,(z)-F(u,u),u)=(\mathrm{Re}\,(z),v,u),$$

其逆 σ^{-1} 为

$$(x,v,u)\to(x+\sqrt{-1}(v+F(u,u)),u).$$

这证明了 σ 为 $D(V,F)$ 到 $\mathbb{R}^n\times V\times\mathbb{C}^m$ 上的同胚映射. 所以 $D(V,F)$ 单连通当且仅当 V 单连通. 证完.

熟知 $\mathbb{R}^n$ 中的开凸锥为单连通的, 所以上面引理有如下推论: