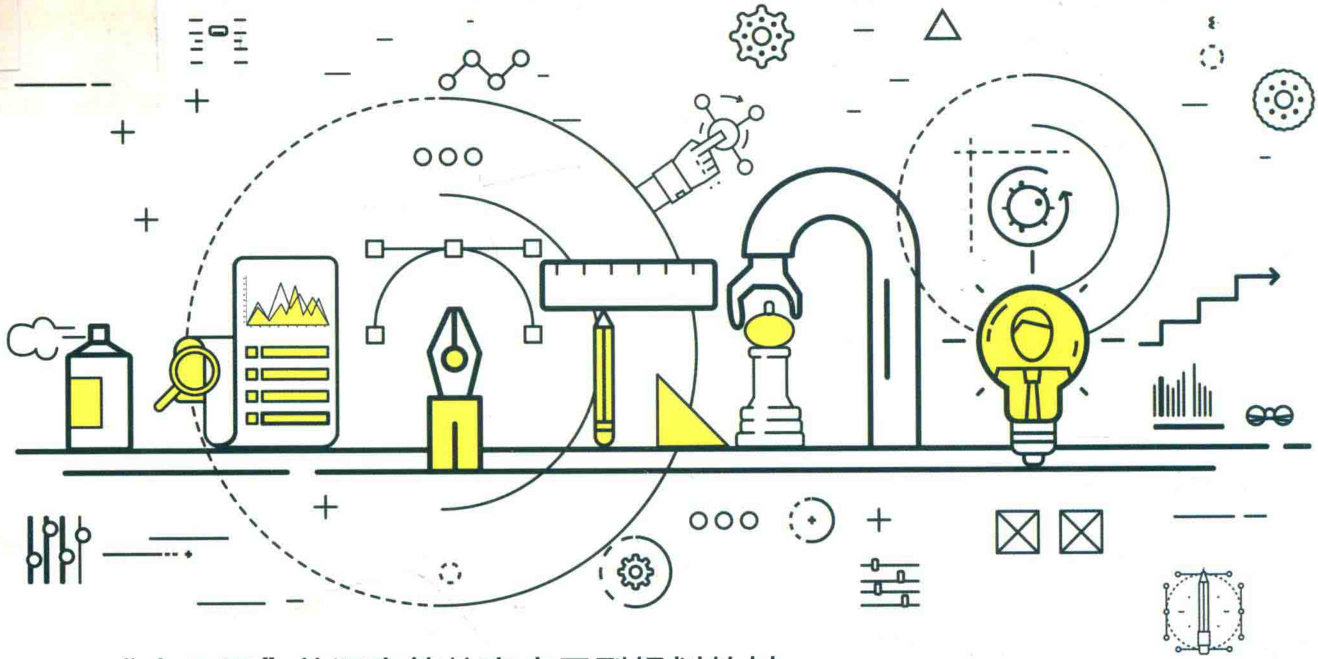


“十三五”普通高等教育应用型规划教材

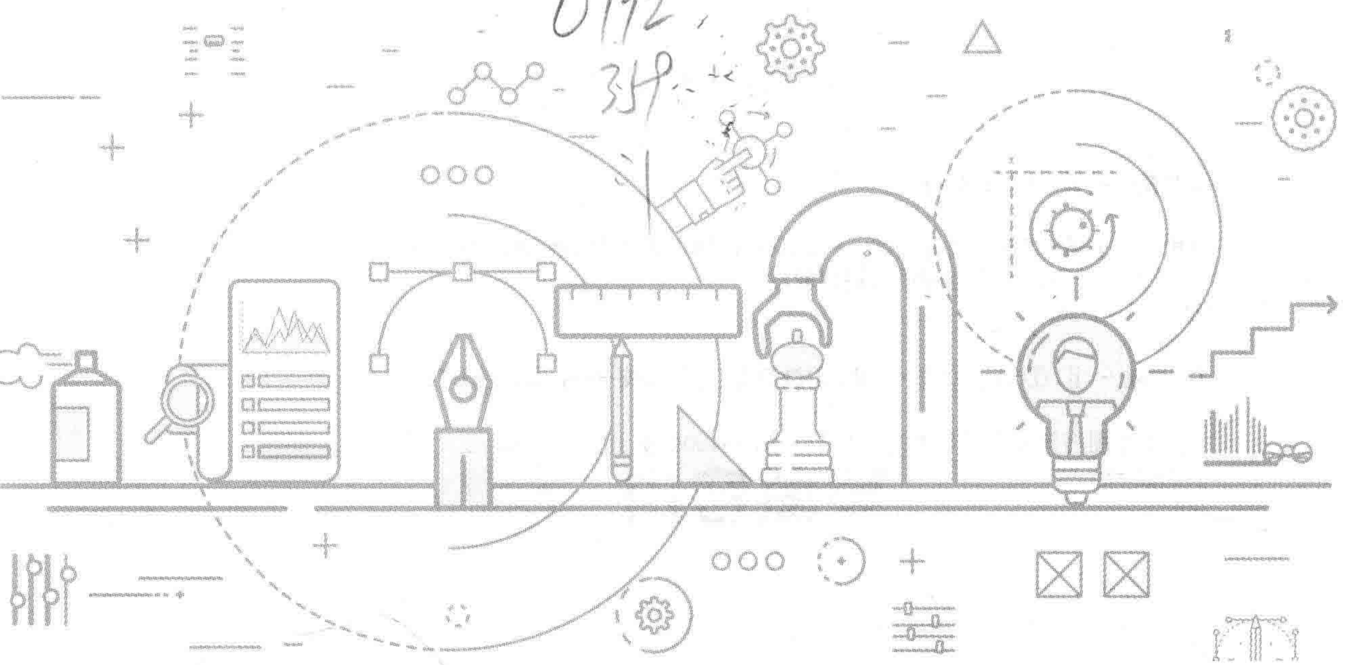
Calculus

微积分（上册）

主 编 刘 强 聂 力

3

中国人民大学出版社



"十三五"普通高等教育应用型规划教材

Calculus

微积分（上册）

主　编　刘　强　聂　力

副主编　陶桂平　梅超群　聂高琴　于威威

范林元　张　琳　孙激流

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

微积分．上册/刘强，聂力主编．—北京：中国人民大学出版社，2018.7
“十三五”普通高等教育应用型规划教材
ISBN 978-7-300-25916-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘… ②聂… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 134504 号

“十三五”普通高等教育应用型规划教材
微积分（上册）
主　编　刘　强　聂　力
副主编　陶桂平　梅超群　聂高琴　于威威　范林元　张　琳　孙激流
Weijifen

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	中煤（北京）印务有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	版　　次	2018 年 7 月第 1 版
印　　张	13	印　　次	2018 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	305 000	定　　价	32.00 元

内容摘要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，结合地方财经类专业需求的特点进行编写的. 按照“专业适用，内容够用，学生适用”的设计思路，量身定制课程内容，突出经济数学的“经济”特色。在内容编排上，尽量做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用.

全书共有 10 章，分为上、下两册。其中上册涵盖了函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分等内容，下册涵盖了定积分、多元函数微积分、无穷级数、微分方程以及差分方程等内容. 本书为上册. 为了便于读者学习，每节后均附有习题，每章后均附有总复习题，书末附有答案.

本书既可以作为普通高等学校经管类本科生学习微积分课程的教材，也可以作为教师的教学参考用书和全国硕士研究生统一入学考试的复习用书.

前言

数学是一门工具，更是一种思维方式. 学习数学有助于我们培养发现问题、分析问题、解决问题的能力. 财经类专业与数学联系密切，大学数学在财经类专业人才培养中的作用日益凸显，在应用复合型人才的综合素养培养方面发挥着重要作用. 当前，在地方财经类院校，大学数学已经成为本科教育的必修课程. 财经类院校大学数学主要包括三大类课程，即微积分、线性代数以及概率论与数理统计，当然还有一些其他衍生课程，例如数学史与数学文化、数学软件与应用、数学实验，等等.

2009 年以来，在北京市和学校相关部门的大力支持下，我校公共基础课的教学改革一直在如火如荼地进行。数学公共基础课教学团队从全国地方财经类专业的数学需求出发，结合教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会的总体要求，对课程管理与队伍建设、数学理念、教学大纲与课程内容、考核方式、教学模式与教学手段、教学研究、学科竞赛等方面进行了全方位的改革，涉及面广，内容深刻，力度很大，效果很好. 在此基础上，我们对原有讲义进行了系统的整理、修订，编写了“十三五”普通高等教育应用型规划教材，该系列丛书主要包括《微积分》(上、下册)、《线性代数》和《概率论与数理统计》三门课程的教材，以及相应的同步练习、深化训练、考研辅导以及大学生数学竞赛用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书的总主编.

编写组曾经在北京、山东、江苏等省市的部分高校进行调研，很多学生在学习的过程中，对于一些重要的数学思想、数学方法难以把握，许多高校数学公共课期末考试不及格的现象普遍存在，这一方面说明了当前大学数学教学改革的紧迫性，另一方面说明了教材编写的合理定位的重要性. 从规划教材的定位来看，本系列教材主要适用于地方财经类一本、二本院校的教学. 在教材的编写过程中，在保持数学体系严谨的前提下，尽量简明通俗、形象化，强调数学思想的学习与培养，淡化理论与方法的证明，注重经济学案例的使用，强调经济问题的应用，体现出经济数学的“经济”特色.

本书为《微积分》(上册)，内容体系在根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委

员会的总体要求的基础上，结合地方财经类专业特点进行系统设计，尽可能做到结构合理、概念清楚、条理分明、深入浅出、强化应用. 本书涵盖了函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用以及不定积分等内容.

为了便于学生学习和教师布置课后作业，配套习题将按节设计，每章均附有总复习题，书末附有习题答案。同时为了便于读者学习，选学内容和有一定难度的内容将用“*”号标出.

在系列教材的编写过程中，得到了北京航空航天大学的韩立岩教授、清华大学的邓邦明教授、北京工商大学的曹显兵教授、北京工业大学的薛留根教授、广东财经大学的胡桂武教授、北方工业大学的刘喜波教授、中央财经大学的贾尚晖教授、重庆工商大学的陈义安教授、北京信息科技大学的侯吉成教授、北京联合大学的邢春峰教授、昆明理工大学的吴刘仓教授、江苏师范大学的赵鹏教授、北京化工大学的李志强副教授以及首都经济贸易大学的马立平教授、张宝学教授、任韬副教授等同事们的大力支持，中国人民大学出版社的策划编辑李丽娜女士为丛书的出版付出了很多努力，在此一并表示诚挚的感谢.

编写组教师均长期工作在大学数学教学的第一线，积累了丰富的教学经验，深谙当前本科教学的教育规律，熟悉学生的学习习惯、认知水平和认知能力，在教学改革中取得了一些成绩，出版过包括同步训练、深化训练、考研辅导以及大学生数学竞赛等多个层次的教材和辅导用书. 然而此次规划教材的编写又是一次新的尝试，书中难免存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行不吝指正，欢迎来函，邮箱 cuebliuqiang@163. com.

作者

2018 年 5 月

目　录

第 1 章　函数 ······ 1
§1.1　实数 ······ 1
§1.2　函数 ······ 3
§1.3　函数的基本特性 ······ 7
§1.4　反函数与复合函数 ······ 10
§1.5　基本初等函数 ······ 12
§1.6　极坐标简介 ······ 18
本章小结 ······ 20
总复习题 1 ······ 20
第 2 章　极限与连续 ······ 22
§2.1　数列的极限 ······ 22
§2.2　函数的极限 ······ 25
§2.3　无穷小量与无穷大量 ······ 31
§2.4　极限的性质与运算法则 ······ 33
§2.5　极限存在准则与两个重要极限 ······ 40
§2.6　无穷小量的比较 ······ 48
§2.7　函数的连续性 ······ 50
本章小结 ······ 59
总复习题 2 ······ 59
第 3 章　导数与微分 ······ 62
§3.1　导数的概念 ······ 62
§3.2　求导法则 ······ 70
§3.3　隐函数的求导法则 ······ 77

§3.4　高阶导数 …… 80
§3.5　微分 …… 84
§3.6　导数在经济学中的应用 …… 91
本章小结 …… 98
总复习题3 …… 99
第4章　微分中值定理与导数的应用 …… 101
§4.1　微分中值定理 …… 101
§4.2　洛必达法则 …… 112
§4.3　泰勒公式 …… 117
§4.4　函数的单调性 …… 125
§4.5　函数的极值与最值 …… 128
§4.6　曲线的凹凸性 …… 136
§4.7　函数图形的绘制 …… 139
本章小结 …… 146
总复习题4 …… 147
第5章　不定积分 …… 151
§5.1　不定积分的概念与性质 …… 151
§5.2　换元积分法 …… 157
§5.3　分部积分法 …… 166
§5.4　有理函数的积分 …… 171
本章小结 …… 178
总复习题5 …… 179

附录Ⅰ　常用公式 …… 182
附录Ⅱ　参考答案 …… 185
附录Ⅲ　参考文献 …… 201

第 1 章　函　　数

函数是微积分学最重要的基本概念之一，是微积分研究的基本对象，它被用来刻画变量在变化过程中的相互联系与相互依存关系．本章主要讨论函数的概念及其基本性质．在本章的最后，给出极坐标系的一些基本概念和性质．

§1.1　实　　数

由于微积分学这门课程主要是在实数范围内讨论问题，因此本节对实数和实数集的有关知识进行简单的回顾．

1.1.1　实数与数轴上的点

整数与分数统称为**有理数**．因为整数可以看成分母为 1 的分数，所以有理数等同于分数，可以写成 p/q（其中 p，q 为整数，$q\neq 0$）的形式．因为分数可以化为有限小数或无限循环小数，所以有理数也可以表示为整数、有限小数或无限循环小数．无限不循环小数称为**无理数**．有理数与无理数统称为**实数**．

实数与数轴上的点是一一对应的．为简单起见，今后对实数和数轴上与之对应的点不加区分．例如实数 x 也称为点 x，反之亦然．

数轴上与有理数对应的点称为**有理点**，与无理数对应的点称为**无理点**．有理点在数轴上是处处稠密的（即任意两个有理点之间都有无穷多个有理点），但是它们不能充满整个实数轴．无理点在数轴上也是处处稠密的．

1.1.2　实数的绝对值

实数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示，正数和零的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反

数，即

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}.$$

绝对值的几何意义：$|a|$表示数轴上的点a与原点之间的距离.

绝对值的基本性质：

设a和b为任意实数，则

(1) $|a|\geqslant 0$，$|a|=0$当且仅当$a=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.

(3) 当$k\geqslant 0$时，$|a|\leqslant k\Leftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$，其中符号“$\Leftrightarrow$”表示“等价于”.

(4) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$.

证 由性质（2）可知

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|,$$

两式相加即得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

令$k=|a|+|b|$，由性质（3）有

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

(5) $||a|-|b||\leqslant |a|+|b|$.

(6) $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$，$b\neq 0$.

1.1.3 常见的实数集

约定，全体实数的集合记为$\mathbf{R}$，自然数集记为$\mathbf{N}$，整数集记为$\mathbf{Z}$，有理数集记为$\mathbf{Q}$. 此外，讨论实数集$\mathbf{R}$的子集时，常用到区间的概念.

设a，$b\in\mathbf{R}$，且$a<b$.

(1) 不等式$a<x<b$表示的实数x的集合称为**开区间**，记作(a, b)，即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}.$$

(2) 不等式$a\leqslant x\leqslant b$表示的实数x的集合称为**闭区间**，记作$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(3) 不等式$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$表示的实数x的集合称为**半开区间**，分别记作$[a, b)$和$(a, b]$.

以上三类区间均为**有限区间**，还有如下几类**无限区间**.

(4) $[a, +\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$，$(a, +\infty)=\{x\mid x>a\}$.

(5) $(-\infty, b)=\{x\mid x<b\}$，$(-\infty, b]=\{x\mid x\leqslant b\}$.

(6) $(-\infty, +\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$，即全体实数集 $\mathbf{R}$.

在学习微积分学时，经常用到“邻域”的概念.

定义 1.1.1 设 $x_0\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称集合 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 **δ 邻域**，记作 $U(x_0, \delta)$. 在数轴上，它表示的是一个以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 如图 1-1 所示.

称集合 $\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的 **δ 去心邻域（或空心邻域）**，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$. 其中开区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 称为点 x_0 的**左邻域**，开区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右邻域**. 如图 1-2 所示.

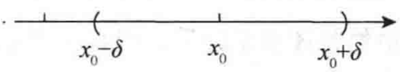


图 1-1

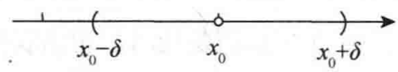


图 1-2

例如，点 5 的 0.1 邻域指的是开区间 (4.9, 5.1).

习题 1.1

1. 解下列不等式，并用区间表示不等式的解集：

(1) $|2x-1|<1$；　　(2) $|x+1|>5$；

(3) $|x-1|>|x+1|$；　　(4) $|x^2-3x+3|<1$.

2. 证明不等式：

(1) $||a|-|b||<|a|+|b|$；　　(2) $|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|$.

§1.2 函　数

1.2.1 变量

由于自然界错综复杂，我们在分析某一自然现象或某一经济问题时，常常会遇到各种各样的量，其中在某一过程中可以取不同数值的量称为变量. 本书主要考虑取值是实数的**变量**. 在某一个过程中取值不变的量称为**常量**. 例如，在某一个时期内，一种商品的价格保持不变，它是一个常量，但在一个较长的时间段内，价格又在发生变化，因而这时它就是一个变量. 所以常量和变量是相对的，常量可以看作是特殊的变量.

1.2.2 函数

世间一切事物都在不停地变化，而变化的事物之间又存在相互联系、相互依赖的关系. 为在数量上把握这种事物的变化和事物之间的联系的规律性，在数学上产生了函数的概念. 考察下面几个例子.

例 1.2.1 某种产品的总成本 C 随产量 Q 的变化而变化，生产一个单位产品增加的成本为 5 万元，固定成本为 10 万元，则总成本 C 与产量 Q 之间的依赖关系可由公式

$$C=10+5Q$$

表示.

例 1.2.2 根据《中国统计年鉴》的数据，我国 1990 年至 1996 年农民人均纯收入（单位：元）如表 1－1 所示.

表 1－1

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
人均纯收入	686.3	708.6	784	921.6	1 221	1 577.7	1 926.1

从表 1－1 可以清楚地看出中国农民的人均纯收入虽然整体水平较低，但是在逐年递增.

例 1.2.3 图 1－3 给出了某种商品的利润 L 与其销售量 Q 之间的关系，从图形中可以看出利润随着销售量的变化而变化，一旦销售量确定了，利润也随之确定.

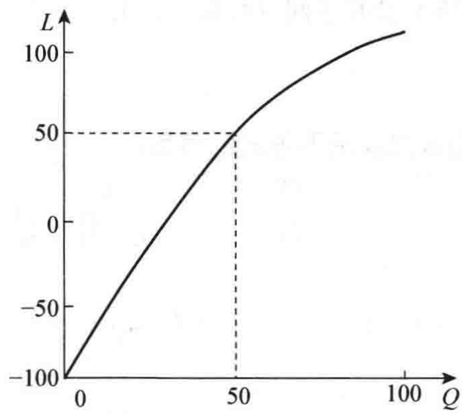


图 1－3

虽然以上列举的问题具有不同的表示形式，分别由公式、表格和图形表示，但它们都是通过一定的对应法则来描述变量之间的依赖关系的．变量之间的这种数量关系通常称为函数关系.

定义 1.2.1 设 D 为一个非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，都能由 f 确定唯一的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，实数集 D 称为函数的**定义域**，也可记为 D_f 或 $D(f)$.

如果 $x_0\in D$，则称函数 f 在 x_0 处有定义；如果 $x_0\notin D$，则称函数 f 在 x_0 处没有定义．对于每一个 $x_0\in D$，按对应规则 f 确定的 y 的取值记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的**函数值**．所有函数值构成的集合

$$\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 Z_f 或 $Z(f)$.

注 (1) 函数 $y=f(x)$ 中的“f”表示对应法则，它仅仅是一个记号，它也可以用其

他记号来表示，如 g，h，F，…，但应注意，在同一问题中，不同的函数关系需用不同的记号来表示.

（2）函数的实质就是定义域 D 上的对应法则 f，所以定义域和对应法则 f 是确定一个函数关系的两要素. 至于同一函数中的自变量和因变量用什么记号来表示是无关紧要的. 当然，同一个函数中的自变量和因变量的记号要有所区别.

（3）如果可以用解析公式表示的函数，没有给出定义域，一般地认为其定义域是使解析公式有意义的自变量的取值构成的集合.

例 1.2.4 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$；（2）$y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

解 （1）为使表达式 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 有意义，x 的取值应满足

$$a^2-x^2>0,$$

即

$$x^2<a^2,$$

解得

$$-a<x<a,$$

所以 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 的定义域为 $(-a, a)$.

（2）为使 $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 有意义，x 的取值应满足

$$\frac{1+x}{1-x}\geqslant 0, \text{且 } x\neq 1,$$

即满足

$$\begin{cases}1+x\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}, \text{或 } \begin{cases}1+x\leqslant 0\\1-x<0\end{cases},$$

解得

$$-1\leqslant x<1,$$

所以 $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的定义域为 $[-1, 1)$.

函数关系的表示方法通常有三种：公式法、列表法和图示法，见例 1.2.1 至例 1.2.3. 其中公式法便于理论分析和数量计算；图示法形象直观，便于考察函数的变化过程；列表法的优点是便于求解函数值. 三种表示方法各有利弊. 在微积分学中，公式法是表示函数关系的主要形式，图示法一般作为考察函数性态的辅助工具.

1.2.3 分段函数

根据函数的定义，在表示函数时，并不要求在整个定义域上都用一个数学表达式来表示．事实上，在很多问题中常常遇到一些在定义域的不同子集上具有不同表达式的情况，习惯上把这种函数叫作**分段函数**.

例如符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

如图 1－4 所示.

取整函数

$$y=[x],$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．如图 1－5 所示.

例如，$[1]=1$，$[1.5]=1$，$[-1.5]=-2$，$[\mathrm{e}]=2$.

符号函数与取整函数都是分段函数.

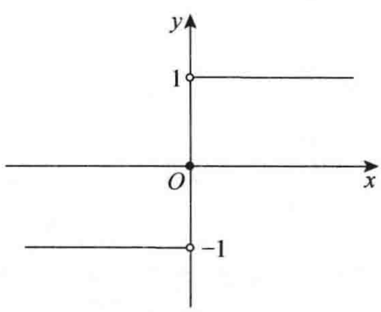


图 1－4

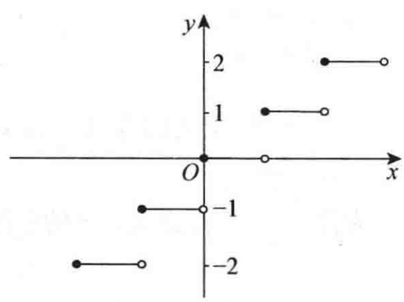


图 1－5

注　分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

例 1.2.5　已知函数 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1\\ x^2-1, & 1<|x|<2\end{cases}$.

(1) 求函数的定义域；　　(2) 求 $f(x-1)$.

解　(1) 因为这个函数在 $|x|=1$处没有定义，所以它的定义域为

$$D_f=(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2).$$

(2) $$f(x-1)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & |x-1|<1\\ (x-1)^2-1, & 1<|x-1|<2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2x-x^2}, & 0<x<2\\ x^2-2x, & -1<x<0 \text{ 或 } 2<x<3\end{cases}.$$

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x+2}{x^2-x+2}$；　　(2) $y=2^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{1-\ln x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x+2}}$；　　(4) $y=\ln\cos x$.

2. 判定下列函数是否相同，并说明理由：

(1) $y=x\operatorname{sgn}x$ 与 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$；　　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

(3) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；　　(4) $y=1$ 与 $y=\sin^2x+\cos^2x$.

3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$，求 $f(1-\mathrm{e}^{\sin x})$ 的定义域.

§1.3 函数的基本特性

函数主要有四种基本特性，即奇偶性、单调性、周期性和有界性.

1.3.1 奇偶性

定义 1.3.1 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

奇函数的图像关于坐标原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.3.1 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$；　　(2) $g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1) 函数的定义域为实数集 **R**，又因为

$$f(-x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 函数的定义域为 $(-1, 1)$，又因为

$$g(-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=-g(x),$$

所以 $g(x)$ 为奇函数.

注 任意一个定义在实数集 **R** 上的函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和. 事实上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

则容易验证，$f_1(x)$ 为偶函数，$f_2(x)$ 为奇函数，且有

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x).$$

1.3.2 单调性

定义 1.3.2 设函数 $f(x)$ 在某个区间 I 上有定义，对于任意的 x_1，$x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，有

(1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I **单调增加**（或**单调递增**）；

(2) 若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I **单调减少**（或**单调递减**）.

单调增加的函数和单调减少的函数统称为**单调函数**. 若在某区间 I 上函数 $f(x)$ 是单调的，则称该区间 I 为所给函数的**单调区间**. 如图 1－6 所示，图 1－6（a）为单调增加函数，图 1－6（b）为单调减少函数.

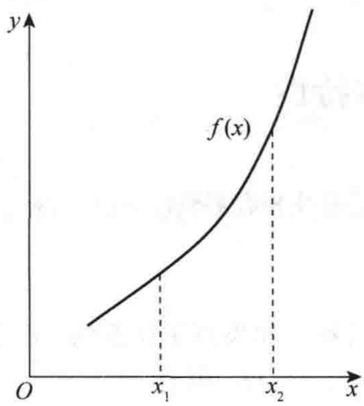


图 1－6（a）

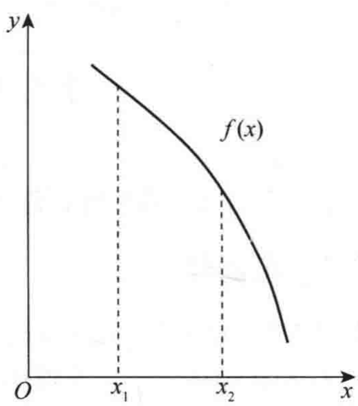


图 1－6（b）

1.3.3 周期性

定义 1.3.3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对任意一个 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x) \tag{1.3.1}$$

恒成立，则称该函数为**周期函数**. 其中 T 称为函数 $f(x)$ 的**周期**，满足式（1.3.1）的最小的正数 T_0 称为函数的**最小正周期**，通常所说的函数的周期指的是函数的最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

并非每个周期函数都有最小正周期. 例如狄利克雷（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\0, & x\in\mathbf{W}\end{cases},$$

其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{W}$ 为无理数集. 容易验证，这是一个周期函数，任何正有理数都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数，因而它没有最小正周期.

若 $f(x)$ 是一个周期为 T 的周期函数，则在每个长度为 T 的相邻区间上，函数图像有相同的形状，如图 1－7 所示.

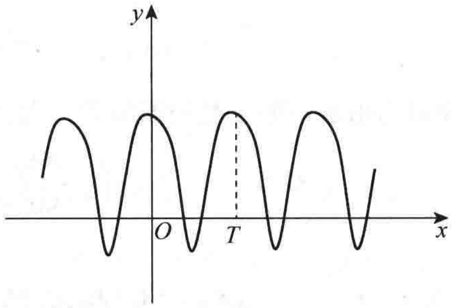


图 1－7

1.3.4 有界性

定义 1.3.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subseteq D$，若存在正数 M，使得对于任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在整个实数集 $\mathbf{R}$ 上满足 $|\sin x|\leqslant 1$，从而 $y=\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界.

函数的有界性还可以通过另外一种形式来定义.

定义 1.3.4′ 若存在实数 a 和 b，使得对任意的 $x\in X\subseteq D$，恒有 $a\leqslant f(x)\leqslant b$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称 $f(x)$ 在 X 上无界. 其中 a 称为函数的**下界**，b 称为函数的**上界**.

请读者自己验证这两种定义的等价性.

习题 1.3

1. 讨论下列函数的单调性：

(1) $y=e^{-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{9x-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{x}{1+x}$；　　(4) $y=\sqrt{x^2}$.

2. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^2-x+1$；　　(2) $y=\ln(1+x^2)+\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>0, a\neq 1)$；　　(4) $y=3x^3+2$；

(5) $y=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ $(a>0, a\neq 1)$；　　(6) $y=x\cdot\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；

(7) $y=\cos x+x\sin x$；　　(8) $y=\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)\tan x$ $(a>0, a\neq 1)$.