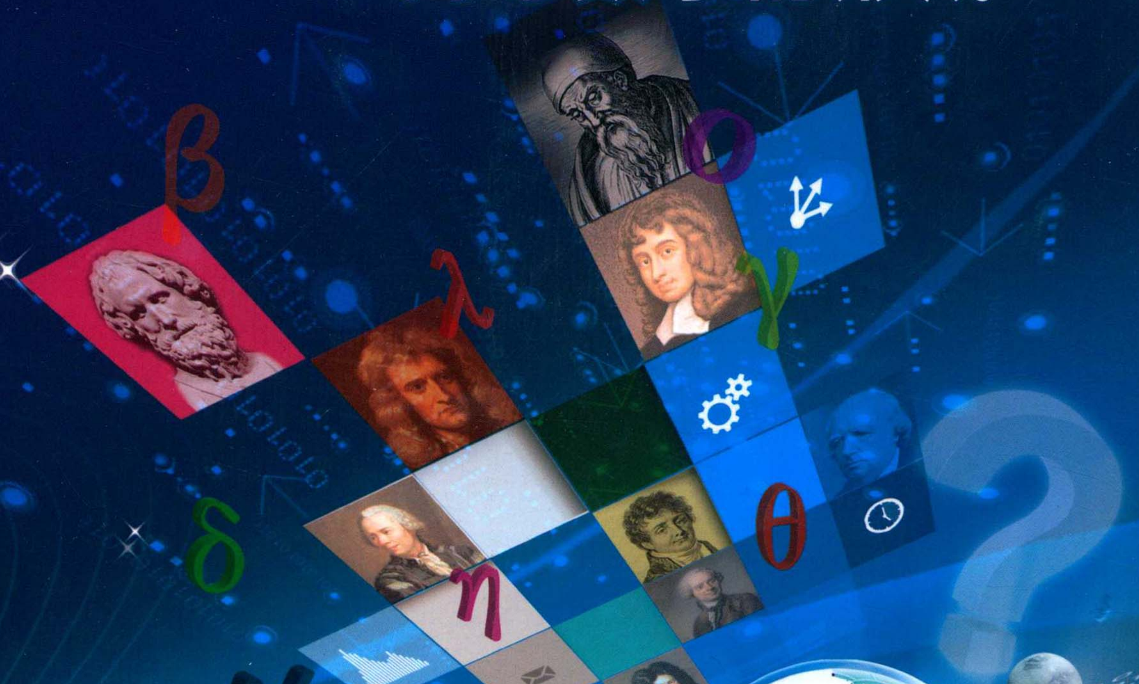
先驱者的足迹

——高等数学的形成

李晓奇　任嵘嵘◎著



科学普及出版社
POPULAR SCIENCE PRESS

先驱者的足迹

——高等数学的形成

李晓奇　任嵘嵘◎著

科学普及出版社
·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

先驱者的足迹：高等数学的形成 / 李晓奇，任嵘嵘著. —北京：科学普及出版社，2017. 6

ISBN 978-7-110-09097-8

Ⅰ. ①先… Ⅱ. ①李… ②任… Ⅲ. ①高等数学—数学史 Ⅳ. ① O13-09

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 070231 号

策划编辑 李 红 吕秀齐 徐木子
责任编辑 李 红 徐木子
装帧设计 中文天地
责任校对 杨京华
责任印制 张建农

出　　版 科学普及出版社
发　　行 中国科学技术出版社发行部
地　　址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编 100081
发行电话 010-62173865
传　　真 010-62173081
网　　址 http://www.cspbooks.com.cn

开　　本 889mm × 1194mm 1/16
字　　数 350千字
印　　张 19.75
版　　次 2017年6月第1版
印　　次 2017年6月第1次印刷
印　　刷 北京盛通印刷股份有限公司
书　　号 ISBN 978-7-110-09097-8 / O · 184
定　　价 158.00元

前言

相对于初等数学而言，高等数学中的方法更加繁杂，那是因为它可以解决更多、更复杂的问题。其主要内容包括函数、极限与连续、微积分、空间解析几何与向量代数、无穷级数、常微分方程等。“高等数学”作为高等院校一门重要的基础课，现存最突出的问题是，只注意前人成果的叙述与机械接受，忽视概念与内容的形成历史和形成过程中所包含的原始而深刻的思想。在多年的教学实践过程中，我们深刻体会到学生和数学爱好者的缺憾和需要，鉴于此情况，2004 年我们出版了《先驱者的足迹——高等数学的形成》一书。该书得到了很多大学数学教师、大学生和数学爱好者的喜爱。

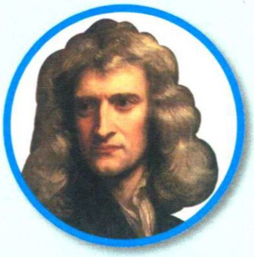
如果说前一版《先驱者的足迹——高等数学的形成》是针对大学高等数学教师、大学生以及数学爱好者的，那么这次的版本已经将人群的层次扩展到了高中生，甚至年龄更小的数学爱好者。目前，关于高等数学的著作可谓琳琅满目，但是很少有可以覆盖到高中生甚至是小学生的科普类的图书。我们希望有更多的数学爱好者能够及早了解变量数学的思想和方法，为日后的学习打下良好的基础。这次版本最大的特点是在前版的基础上，赋予了高等数学丰富多彩的展现形式，以图文并茂的形式将高等数学直观地展现在数学爱好者面前。

在本书的再版过程中，我们参考了许多文献，并附于本书之后，在此向这些文献的作者和译者表示真诚的感谢！另外，还要感谢河北省科学技术厅科普原创资助专项（项目编号：15K56227D）对本书再版的资助，感谢科学普及出版社对本书再版的支持，感谢南宁巴比树文化传媒有限公司的美编设计对本书图中插画的设计指导，感谢我的同事李彦博和邢钢在资料整理方面给予的帮助，除此之外，高淑环、孟一鸣、沈阳阳、李文文、于孝洋、马洪涛、王丹等在书稿整理方面也给予了很大的帮助，在此一并表示感谢。

本书的内容设计上涉及很多的手绘插画，大多是作者自身的理解。由于作者自身的水平和精力所限，再加上此举属于一种新的尝试和探索，图文表述不当之处在所难免，恳请各位读者批评指正。

目录

CONTENTS




一、数学发展史简介

如果我们想要预见数学的未来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

——庞加莱

1 数学史分期简介

数学史的分期涉及按怎样的线索来描述数学发展的历史。不同的线索将给出不同的分期，通常采用的线索有：

（1）按时代顺序；

（2）按数学对象、方法等本身的质变过程；

（3）按数学发展的社会背景。

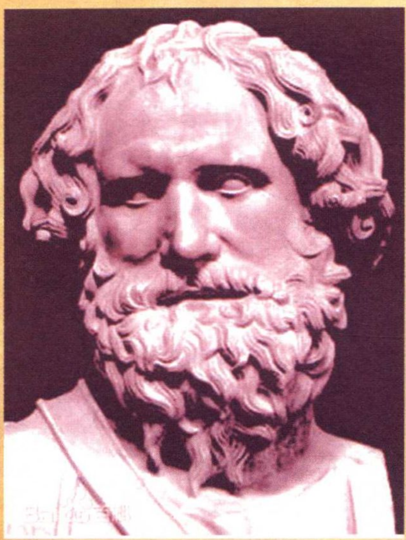
由于数学的发展是一个错综复杂的知识过程与社会过程，用单一的线索贯穿难免会有偏颇，因此**一般数学通史著作往往采用某一线索为主，同时兼顾其他因素的做法**。比如以数学思想为主的数学史教程对数学史作出如下的分期：

1 数学的起源与早期发展

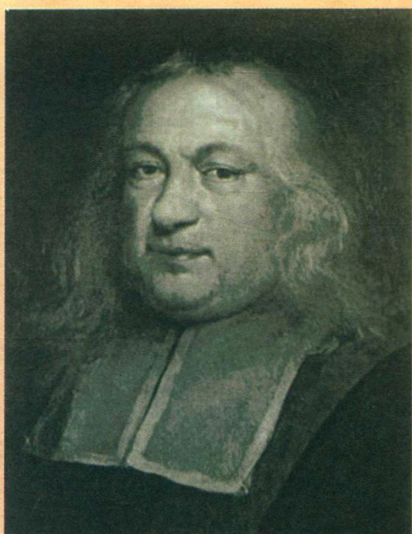
（从远古到公元前 6 世纪）

2 初等数学时期（公元前 6 世纪—16 世纪）

（1）古代希腊数学（公元前 6 世纪—6 世纪）



阿基米德



费马尔

笛卡儿

（2）中世纪东方数学（3—15 世纪）

（3）欧洲文艺复兴时期（15—16 世纪）

3 近代数学时期

（或称变量数学时期，17—18 世纪）

4 现代数学时期（1820—现在）

（1）现代数学酝酿时期（1820—1870 年）

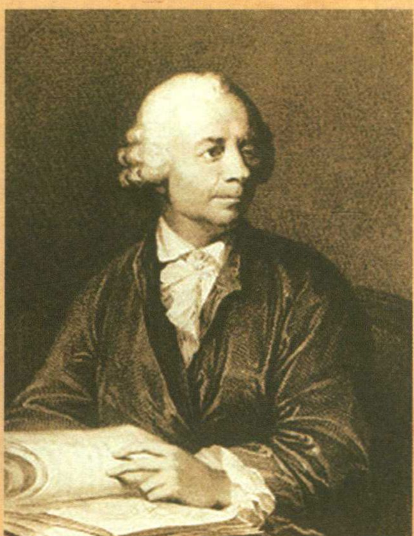
（2）现代数学形成时期（1870—1940 年）

（3）现代数学繁荣时期

（或称当代数学时期，1950—现在）

还有些观点认为，17 世纪之前的数学不必再仔细区分，而通称为初等数学时期。我们在此不必论述不同观点的优劣，因为在这个问题上本来就是仁者见仁，智者见智，不必拘泥于一种观点。我们的目的是对数学的发展，特别是对数学发展过程中所经历的一些重要阶段有所了解和认识。

牛顿



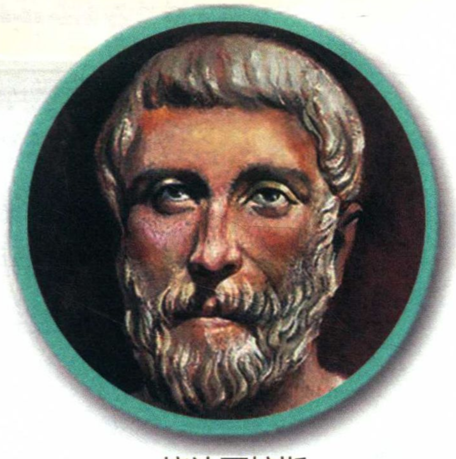
欧拉

2 数学发展史上的几个重要阶段

（1）公元前 6 世纪—3 世纪

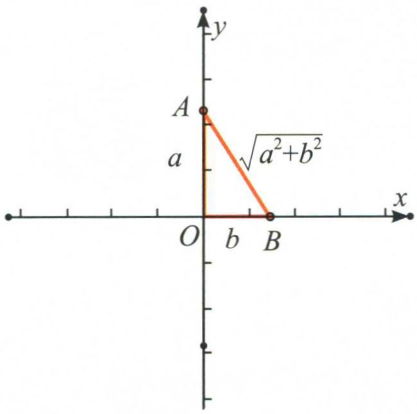
这个时期的世界数学中心在希腊，发生了几件对整个数学史起着重要影响的事件。

黄金分割与勾股定理

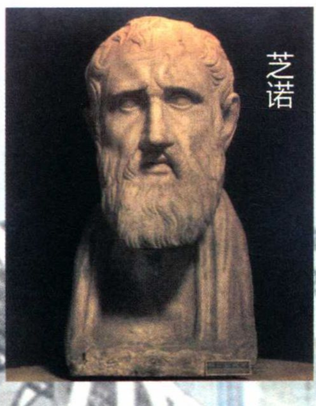


毕达哥拉斯

毕达哥拉斯学派。毕达哥拉斯创建的这个学派，首先，它可算是历史上时间最早（公元前 580—前 500 左右）、规模最大的学派；其次是毕氏犯了一个错误，他误认为任意二线段间皆可公比，即认为任一线段长皆为有理数，实则认为数只有有理数，由此产生了第一次数学危机，对数学和哲学产生了一次大的推动；第三是毕氏对黄金分割的深刻研究和运用。黄金分割是数学史中应用数学优化理论中一直起着重要作用的一个数学成果；最后，毕氏发现了我们熟知的勾股定理。



芝诺悖论

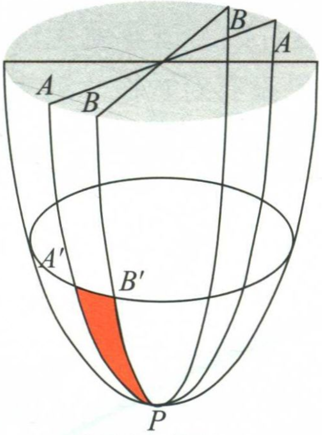


哲学家芝诺（Zeno，公元前 5 世纪）提出“芝诺悖论”，简单地说他提出诡辩，“飞矢不达的，静矢不起飞”，或者说“走神亚其尔追不上乌龟”悖论，这为第二次数学危机埋下伏笔，因为它标志着数学对“无穷小”思考的第一次深入。

《几何原本》

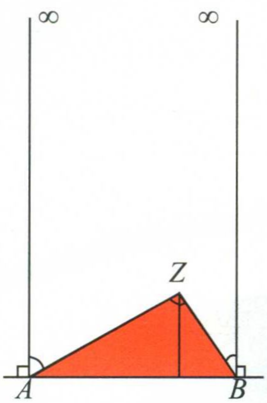

欧几里得

欧几里得是毕氏学派的继承者，他对数学的最大贡献是撰写了《几何原本》。早在印刷术发明以前,《几何原本》的手抄本就统御几何学达 1800 年之久，一直被选为学校的数学教本。印刷术发明以后,《几何原本》被译成多种文字、一千多种版本。2000 多年来，这部著作在几何学教学中一直占统治地位。英国数学家德·摩根说:“除了《圣经》，再没有任何一种书像《几何原本》这样拥有如此众多的读者，被译成如此多种语言。”但《几何原本》最大的特色是创造了公理化方法。这是吸取了毕达哥拉斯错误的教训而提出来的。公理化方法发展至今，对数学起着基础性的作用。此外,《几何原本》使得人们把凡是满足它的 5 大公理，5 大公设的几何学都叫做**欧氏几何学**，把推广物理空间所成的 n 维直角坐标系所表示的空间（满足欧氏公理者）叫做**欧氏空间**。

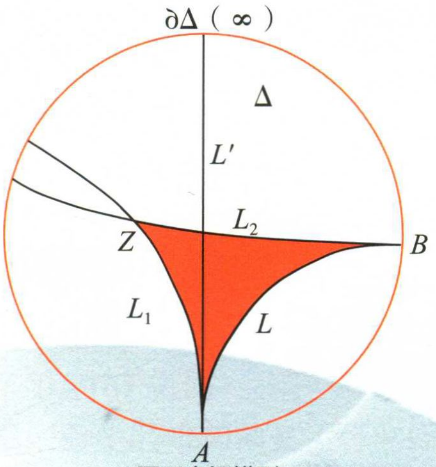


黎曼空间模型
（椭圆几何）

欧几里得空间



（平面几何）



罗氏空间模型
（双曲几何）

几何学世界三大难题

用圆规和无刻度直尺化圆为方、三等分任意角和倍立方体。它们是产生高等几何（19 世纪，以射影几何为代表的推广欧氏空间的几何）的先驱思想。

（2）公元 17 世纪：产生了高等数学

17 世纪发生了如下几大重要事件，堪称高等数学的世纪或叫作近代数学的开端。依时间顺序为：

1 开普勒天体三大定律的发现（1601—1619 年）

可以说是三大定律开创和推动了堪称应用数学分支的天体力学和天文学的发展，因而也推动了数学的发展。三大定律是：

椭圆轨道定律：太阳的行星沿着以太阳为一焦点的椭圆轨道运行。

面积相等定律：连接行星与太阳的“矢径”在相等时间内扫过相等面积。

调和定律：行星公转的周期平方与该轨道的半长轴的立方成正比。

2 纳皮尔发明了对数（1613 年）

可以说，在积分学中没有对数（自然对数）运算就无法进行。比如 $dy = ydx$ 这样一个极简单的微分方程，如果没有对数概念就表达不出它的原函数（积分式）。可见对数的发明为高等数学的诞生做了直接的准备。

3 笛卡儿发明了直角坐标系（1619 年）

据说 1619 年 11 月 10 日，笛卡儿的一个祥梦产生了直角坐标系，又叫笛卡儿坐标，从而产生了解析几何学——高等数学的三大基础之一，产生了坐标系下的函数讨论，产生了“活”的数学。因此说笛卡儿坐标标志着数学进入新的时代。

4 微积分的发明（17 世纪 70 年代）

牛顿和莱布尼兹同时期分别从不同出发点独立发明了微积分学。微积分学在整个数学中的地位已不用任何人宣传解释。正如恩格斯所说：

"在一切理论成就中，未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发现那样被看作人类精神的最高胜利了，如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹和唯一的功绩，那就正是在这里"，"微积分学或者数学分析是人类思维的伟大成果之一"。

5

从应用数学角度，不能不承认牛顿的《自然哲学的数学原理》（1687 年）也是推动近代数学的一大动力。因为已公认《原理》是整个自然科学的奠基性巨著，特别是其中提出的运动学三大定律和万有引力定律也直接丰富了数学、一般力学和天体力学的研究。

6 数论的成熟（17 世纪末）

数论是数学中的一门特殊学科，它的产生很早，成熟也早，但至今仍是一门活跃而"年轻"的学科。数论问题吸引力强，似乎很容易，但"易进不易出"，因为它要求的技巧性很高，不易出成果。先后发生在 17 世纪末和 18 世纪初的**世界三大难题：费尔马问题、哥德巴赫问题、华林问题，使数论发展成为一门独立的数学学科**。

也许会认为数论不过是玩整数游戏，与数学的现代化没有多大关系。其实不然，就以三大难题来说，不仅因为其难度和吸引力而增强了数学的知名度，也因为解决它们必须在现有数学基础上进行再创造，产生新的突破，从而推动了数学和科学的发展。19 世纪末解决华林问题（希尔伯特）如此，1994 年解决费尔马问题（A. 怀尔斯）也是如此。至于哥德巴赫问题，虽已有过很多突破性创造，其方法已广泛应用于其他分支，但"1+1"问题至今仍未解决。

（3）公元 19 世纪：纯数学的产生

酝酿并产生 19 世纪后半叶数学大爆炸发展的主要因素和形势特征是：

1

在 1824 年证明了 5 次和 5 次以上代数方程不可解（不可一般地用有限形式表出根来）的同时提出了“群”的概念，从而产生了**群论**，为近世代数的诞生奠定了基础。

$$x^5+1.25x-1=0$$

2

1822 年，傅立叶以其《热传导解析理论》一文创造了**傅立叶分析**，成为数学分析的支柱性方法之一，更是应用数学一个重要的基础理论。

19 世纪最大的特征是其后半叶出现了数学的爆炸性发展，从而产生了纯数学，使得数学从此明显地分为纯数学和应用数学两大营垒。这是 19 世纪以前不曾有过的，因此这也是现代数学的本质特征之一。

4 1873年，康托提出集合概念，从而产生了**集合论**。集合论宣布了现代数学的开端。

5 19世纪70年代产生了**极限论**，奠定了微积分学的理论基础，结束了关于微积分学理论基础的整整两百年的争论，从而刺激了分析数学的迅猛发展。

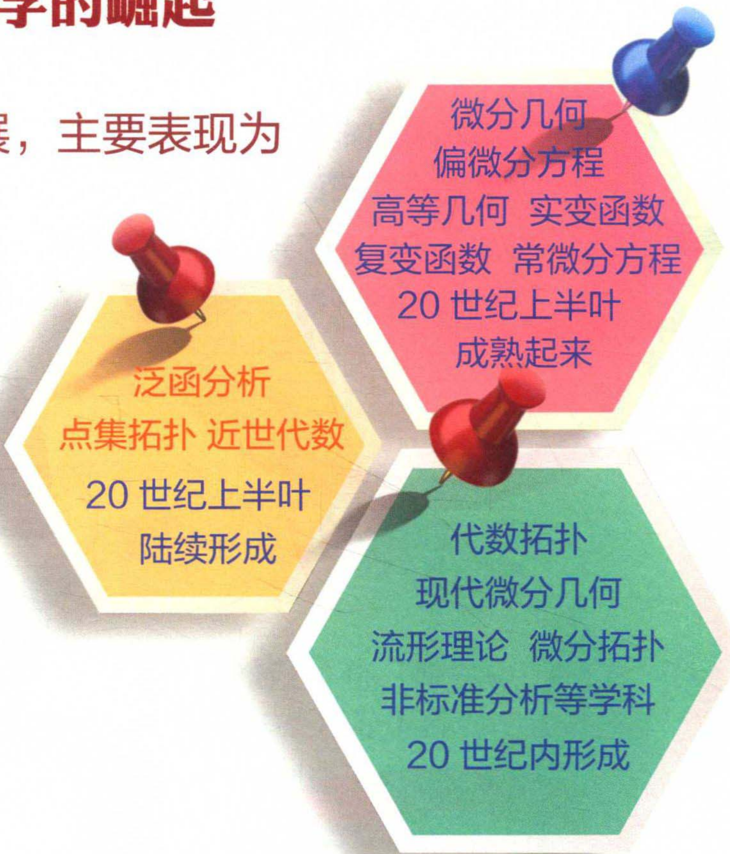
3 **非欧几何的产生**。具体地说是1826年产生了罗巴切夫斯基几何，1854年产生了黎曼几何。它们都是改变了欧几里得几何的公设5（欧几里得在一个平面内过直线外一点能且仅能引一条平行线）而创造出的合乎逻辑而不合乎直观的几何学。从而激发了人们新的“数学思维”观念。

公元19世纪：产生了纯数学

（4）公元 20 世纪：纯数学继续发展和应用数学的崛起

纯数学（基础数学）的继续发展，主要表现为

1 19 世纪末数学知识剧烈膨胀，进入 20 世纪后，逐步形成了系列学科分支。如泛函分析、点集拓扑、近世代数等，所谓新三高即是 20 世纪上半叶陆续形成的。此外如微分几何、高等几何、实变函数、复变函数、常微分方程、定性理论、偏微分方程等学科也基本上都是 20 世纪上半叶才成熟起来的。至于代数拓扑、流形理论、现代微分几何、微分拓扑与非标准分析等学科则更是 20 世纪内形成的了。



2 在康托创立集合论之后，人类对实数的认识更加深刻了。

3 也是在集合论（所产生的悖论）刺激下，产生了数学的寻根热（探索数学的基础），形成了“**数学哲学**”的三大派：布劳威尔为首的**直觉主义**（主张构造性证明）、希尔伯特为首的**形式主义**（主张存在性证明）、和罗素为首的**逻辑主义**。他们分别都想用自己的观点统揽数学，把整个数学圆满地装进自己的魔袋中。事实上今天的数学则是吸收了各派的优点综合发展起来的。

4

正是在寻根热中，30 年代初先后产生了两个**歌德尔不完全定理**，大意是说有些形式系统如果是协调的，则它必是不完全的（边界不分明）；反之，如果它是完全的，则它必是不协调的（在系统内其结构不可能完全得到证明）。由此说明数学这个最大的形式系统不可能被上述任何一个学派的魔袋装住。换句话说，数学范畴是没有分明边界的。从此数学寻根热冷静了下来，承认数学寻根至少不是指日可待的，数学仍然回到了它正常的开发状态。

5

20 世纪的数学与其无冕之王希尔伯特的名字是分不开的，也不可不提其嗣者布尔巴基学派。该学派致力于建造数学“象牙塔”，因此对纯数学作出了很大贡献。比如“**数学结构**”的观点即是他们提出来的。

6

特别应提到：20 世纪内纯数学研究与希尔伯特 23 大问题的攻关也是紧密联系的。据统计，1936—1974 年间获菲尔兹奖的 20 人中，有 12 人的工作都与希尔伯特问题有关。

1940—1976 年，美国数学十大成就中有三项属“23 大问题”的工作。目前，23 大问题仅解决一半多一点；有约 1/3 的问题仅做了部分工作，有待最后完成；剩下的几个是笼统的问题，难以说是否已解决。