The Excellent Mathematical Essays from Quantum

《量子》数学短文精粹

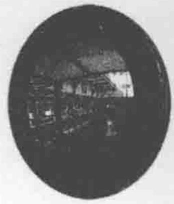
◎ 周春荔 编译

数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

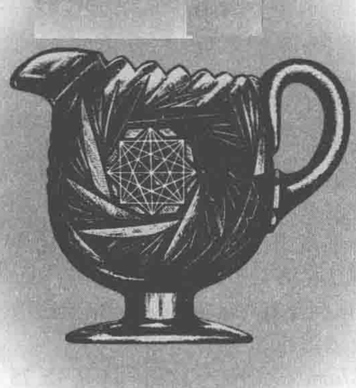
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

The Excellent Mathematical Essays from Quantum



《量子》数学短文精粹

◎ 周春荔 编译



数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动的练习，
只有具有青春与力量才能做得满意。——诺伯特·维纳

为了激励人们向前迈进，应使所给的数学问题具有一定的难度，
但也不可难到高不可攀，因为望而生畏的难题必将挫伤人们继续前进的积极性。总之，
适当难度的数学问题，应该成为人们揭示真理奥秘之征途中的路标，
同时又是人们在问题获解后的喜悦感中的珍贵的纪念品。——大卫·希尔伯特

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

《量子》杂志是苏联科学院、苏联教育科学院共同主办的一本数学、物理科普杂志. 本书汇集了《量子》数学杂志中的优秀的几何方面短文,这些短文新颖、趣味、针对性强,文字通俗易懂,能启迪智慧,培养能力,对指导中学生学习,开展第二课堂活动,举办数学奥林匹克竞赛都是极有价值的材料,对广大中学教师也是有益的教研资料.

图书在版编目(CIP)数据

《量子》数学短文精粹/周春荔编译. -- 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.9

ISBN 978-7-5603-7423-9

Ⅰ.①量… Ⅱ.①周… Ⅲ.①量子论-文集 Ⅳ.①O413-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 128106 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×960mm　1/16　印张 15.75　字数 176 千字
版　　次 2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7423-9
定　　价 38.00 元

◎译者的话

《立体几何短文集》是我们编译的《量子》数学短文精粹中的一本.《量子》杂志是苏联科学院、苏联教育科学院共同主办的一本数学、物理科普杂志.其中的数学短文新颖、趣味、针对性强,文字通俗易懂,能启迪智慧,培养能力,对指导中学生学习,开展第二课堂活动,举办数学奥林匹克竞赛都是极有价值的材料,对广大中学教师也是有益的教研资料.

立体几何是中学数学中重要的一个分科,也是中学生学习时多感困难的一门学科.为此,我们选译了《量子》中的部分立体几何短文,奉献给广大读者.

学习立体几何需要很好地发展空间想象力;解立体几何问题往往要综合运用代数、三角、几何等诸多方面的知识与方法;要学会画总图与分图.学习立体几何常常要与平面几何进行类比,常常要使用辅助元素.如果说辅助的线段和角你可能比较熟悉,那么"辅助立方体"就有不少新意!当你学会解一些基本问题之后,怎样解多图形的立体几何问题?怎样解非常规、非标准的立体几何问题?短文中都

有专门篇目进行介绍.这些短文融知识与方法为一体，既有丰富的材料，又渗透着数学的思想，每篇后还都配备供读者练习的少量习题.我们期望这本短文集能成为中学数学教师的助手，成为广大中学生学习立体几何的益友.

需要说明的是，我们选择的文章只是《量子》中立体几何短文中的一部分，由于资料不全，尚有不少优秀短文未能收入.另外，由于译者水平所限，漏误难免，望读者指正.

最后，我们对裘宗沪副研究员在百忙中精校本书各篇的译稿表示感谢.

周春荔　樊　进
北京师范学院数学系
1988 年 1 月

◎目录

第一章　几何的类比　//1
第二章　辅助元素法　//9
第三章　辅助的线段和角　//23
第四章　辅助立方体　//31
第五章　坐标方法　//42
第六章　几何习题中的图　//58
第七章　在立体几何问题中的图　//73
第八章　正棱锥中的基本角　//85
第九章　四面体的添加　//94
第十章　多面体的切棱球　//102
第十一章　多面体的截面　//112
第十二章　在构架里的圆锥　//122
第十三章　哪一点是垂足　//129
第十四章　多面体的相交和旋转　//138
第十五章　相交体的问题　//143
第十六章　面积与二面角的问题　//156
第十七章　二面角和三面角　//164
第十八章　多图形的立体几何问题　//174
第十九章　立体几何的非标准问题　//186
编辑手记　//198

第一章

几何的类比[①]

学习几何学,你大概会发现,三角形与四面体的某些性质很相像. 与三角形联系的许多几何概念,在空间也有类似的内容. 例如:三角形的边——四面体的面,边长——侧面面积,内切圆——内切球,外接圆——外接球,面积——体积,角平分线——二面角的平分面等.

这个类比,不是表面的,许多关于三角形的定理,如果将其中的平面几何术语用相应的立体几何术语来代替,并且将叙述的相应方式稍加修改,就变为关于四面体的定理. 我们将研究某些这样的定理.

定理1 三角形 ABC 的内角平分线 CD 分对边所成的线段与边 AC 和 BC 成比例.

证明 首先在三角形 ADC 与 DBC 中分别采用线段 AC 和 BC 为底边(图1). 点 D 到角 ACB 的两边是等距离的,

① 作者:B. 库切罗夫.

因此

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BCD}}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

现在,在这两个三角形中再采用线段 AD 和 DB 为底边,很明显

$$\frac{S_{ADC}}{S_{BCD}}=\frac{|AD|}{|BD|}$$

从而

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$$

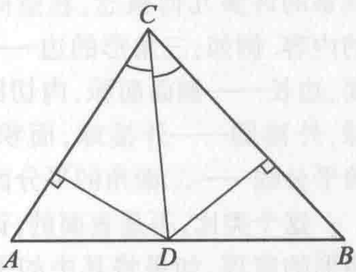


图1

我们想起,分一个二面角为两个相等的二面角的单平面叫作这个二面角的平分面. 二面角的平分面是与它的界面等距离的点集. 我们证明,四面体的二面角的平分面也有与三角形角的平分线相类似的性质.

定理2 四面体二面角的平分面分对棱所成的比等于形成这个二面角的两个界面面积之比.

证明 设面 ADM 为四面体的截面,是以 AD 为棱的二面角的平分面(图2). 四面体 $A-CMD$ 与 $A-BMD$ 的体积分别用 V_1 和 V_2 表示.

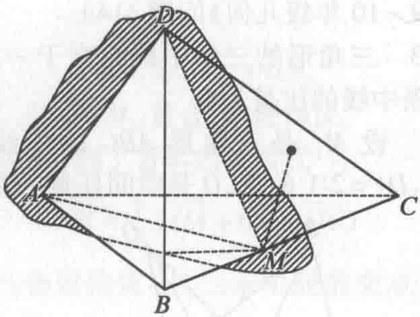


图 2

因为点 M 与界面 ADC 和 ADB 等距离，所以

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}$$

另外，容易看到

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}=\frac{|MC|}{|MB|}$$

所以

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{|MC|}{|MB|}$$

这正是需要证明的结论.

顺便指出，$\frac{S_{ADC}}{S_{ADB}}=\frac{S_{DMC}}{S_{DMB}}$，这再一次指出定理 1 与定理 2 的相似性.

对于下面的内容我们需要下列的论断：

如果 $M\in AB$，且 $|AM|:|MB|=m:n$，那么对于空间任意一点 O，有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB} \tag{1}$$

我们应用(1)来证明三角形三条中线交于一点的定理(《6-8 年级几何》问题 638)和关于四面体的类

似定理(《9－10年级几何》问题314).

定理3 三角形的三条中线相交于一点,并且这一点分每条中线的比是2:1.

证明 设 M_1 是三角形 ABC 的中线 AD 上使 $|AM_1|:|M_1D|=2:1$ 的点,O 是空间任意一点(图3).

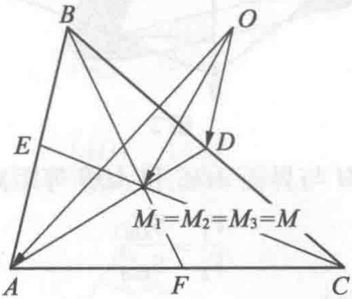


图3

根据(1)我们有

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$$

和

$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

因此

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

如果 M_2 和 M_3 分别是中线 CE 与 BF 上从顶点算起分为2:1的分点,则类似有

$$\overrightarrow{OM_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OM_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

这样一来

$$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}$$

从而,点 M_1,M_2 和 M_3 重合,定理得证.

我们顺便得到了著名的关系式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

其中 M 是三角形的重心(三条中线的交点),而 O 是空间任意一点.

所谓四面体的中线是联结四面体的顶点与所对界面重心的线段. 看来,类似于定理 3 的四面体的中线定理是正确的.

定理 4　四面体的四条中线相交于一点并且交点分每条中线(由顶点算起)为 3:1 的两段.

证明　设 M_1 是四面体 $A-BCD$ 的中线 CC_1 上使得 $|CM_1|:|M_1C_1|=3:1$ 的点(图 4). 设 O 是空间任意一点,根据公式(1),有

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OC_1}$$

此外

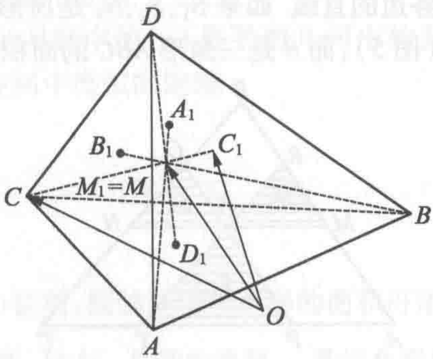


图 4

$$\overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

因为 C_1 是三角形 ABD 的重心,所以

$$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

对于把四面体的中线 AA_1,BB_1 和 DD_1 分别分为 3:1 的点 M_2,M_3 和 M_4 可以得到同样的表达式. 因此

$$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_4}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

即点 M_1,M_2,M_3 和 M_4 重合.

四面体的中线的交点 M 也叫作它的重心. 我们注意,对于空间任意点 O,等式

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

都是正确的.

最后,我们研究平面几何中一个有趣的定理,并且试图找到立体几何中与它类似的定理.

定理 5 通过三角形 ABC 内取的任意一点 O,作平行于它各边的直线. 如果 S_1,S_2,S_3 是所形成的三角形的面积(图 5),而 S 是三角形 ABC 的面积,则

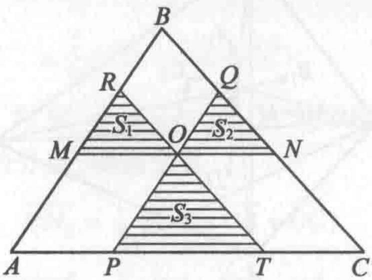


图 5

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

证明　形成的三角形与三角形 ABC 相似,因此

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{|MR|}{|AB|},\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{|OQ|}{|AB|},\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{|OP|}{|AB|}$$

将这些等式相加,得到

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{|MR|+|OQ|+|OP|}{|AB|}$$

$$=\frac{|MR|+|BR|+|MA|}{|AB|}=1$$

即

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

我们简述空间中类似的定理.

定理6　通过四面体内部取的任意一点,作平行于四面体界面的四个平面. 如果 V_1,V_2,V_3,V_4 是形成的四面体的体积,而 V 是已知四面体的体积,那么

$$\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{V_1}+\sqrt[3]{V_2}+\sqrt[3]{V_3}+\sqrt[3]{V_4}$$

为了证明这个定理,我们请读者利用条件中涉及的四面体与原四面体相似,同样地,相似多面体体积的比等于它们棱长的立方之比.

下面的习题中的(a)是平面几何中的某个定理,而(b)是空间中类似的定理.

练　习　题

1. (a)证明:圆的外切三角形的面积可用公式 $S=\frac{1}{2}pr$ 来计算,其中 r 是圆的半径,p 是三角形的周长.

(b)证明:球的外切四面体的体积可用公式 $V=\frac{1}{3}Sr$ 来计算,其中 r 是这个球的半径,S 是四面体的表面积.

2. (a)在三角形中,内切圆的半径是 r,证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$$

其中 h_1,h_2,h_3 是三角形的三条高线.

(b)在四面体中,内切球的半径是 r,证明

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$

其中 h_1,h_2,h_3,h_4 是四面体的四条高线.

3. (a)通过正三角形的中心引平行于底边的直线,在这条直线位于三角形内的线段上取任意一点 O. 证明:点 O 到三角形底边的距离等于点 O 到另外两边距离的算术平均值.

(b)通过正四面体的中心作平行于底面的平面,在这一平面被四面体所截的部分上取任意一点 O. 证明:点 O 到四面体底面的距离等于点 O 到四面体三个侧面距离的算术平均值.

译自《量子》1981 年第 10 期

辅助元素法[①]

第二章

当我们引入了问题条件中没有直接给出的辅助元素时，大多数几何问题的解法都可简化. 这些元素可以是长度、面积、体积、角度，借助它们列出方程，其中未知数正是所求的元素，或者借助它们容易求得所求的元素. 有时，借助这个元素列出的是不等式，而这个关系式恰是解问题所需要的.

辅助的线性元素

在平面几何问题中，如果研究的图形是相似形，引入线性元素或者线性元素的比是很方便的. 这时借助比例或者辅助的几何作图列出方程式，在方程式中引入的元素作为方程的项被消掉，从而不费吹灰之力就可求得所求的量.

接下来我们研究 Нобоскбцрск 市国立大学提供的入学试题的解答.

① 作者：И. 库雪涅尔.

问题1 通过三角形内部的某一点，分别引平行于三边的三条直线. 这些直线分三角形为6个部分，其中有3个三角形的面积分别为 S_1,S_2,S_3. 求已知三角形的面积.

解 当着手解题时，我们就会发现面积为 S_1,S_2,S_3 的三角形都和面积为 S 的三角形 ABC 相似(图1). 此外，小三角形的边 DQ，QE 和 FK 的长度之和等于三角形 ABC 中 BC 边的长. 利用这些边作为辅助元素，我们得到方程

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{DQ}{BC},\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{QE}{BC},\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{FK}{BC}$$

将它们相加，得

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{DQ+QE+FK}{BC}=1$$

从而

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$$

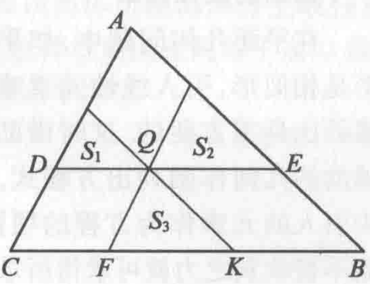


图1

当问题的条件中没有给出线性元素，而需要求得角之间的关系时，我们引入辅助的线段.

问题2 已知等腰三角形三条高线的交点在三角形的内切圆上，求等腰三角形底角的余弦值.

解 根据条件,等腰三角形 $ABC(AB=AC)$ 的垂心 H 应当在三角形内部,因此 $\angle A<90^\circ$(图 2). 我们引入辅助元素 a(线段 BD 的长). 通过 x 表示 $\angle ABC$,内切圆中心用 O 表示,则

$$\angle HCD=\frac{\pi}{2}-x$$

$$HD=a\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a\cot x=2OD$$

$$OD=a\tan\frac{x}{2}$$

由此

$$\cot x=2\tan\frac{x}{2},\ \tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{5}$$

$$\cos x=\frac{2}{3}$$

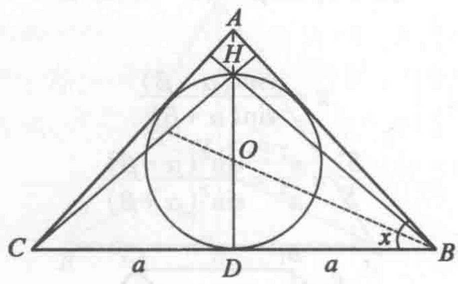


图 2

引入辅助元素对于求各种几何量的比有着特殊的意义.

问题 3 正四棱台(截头正四棱锥)的大底同侧面形成的角为 α,而通过上底与下底相对的边的平面与底面形成的角为 β. 求上底的面积 S' 与下底的面积 S 之比.