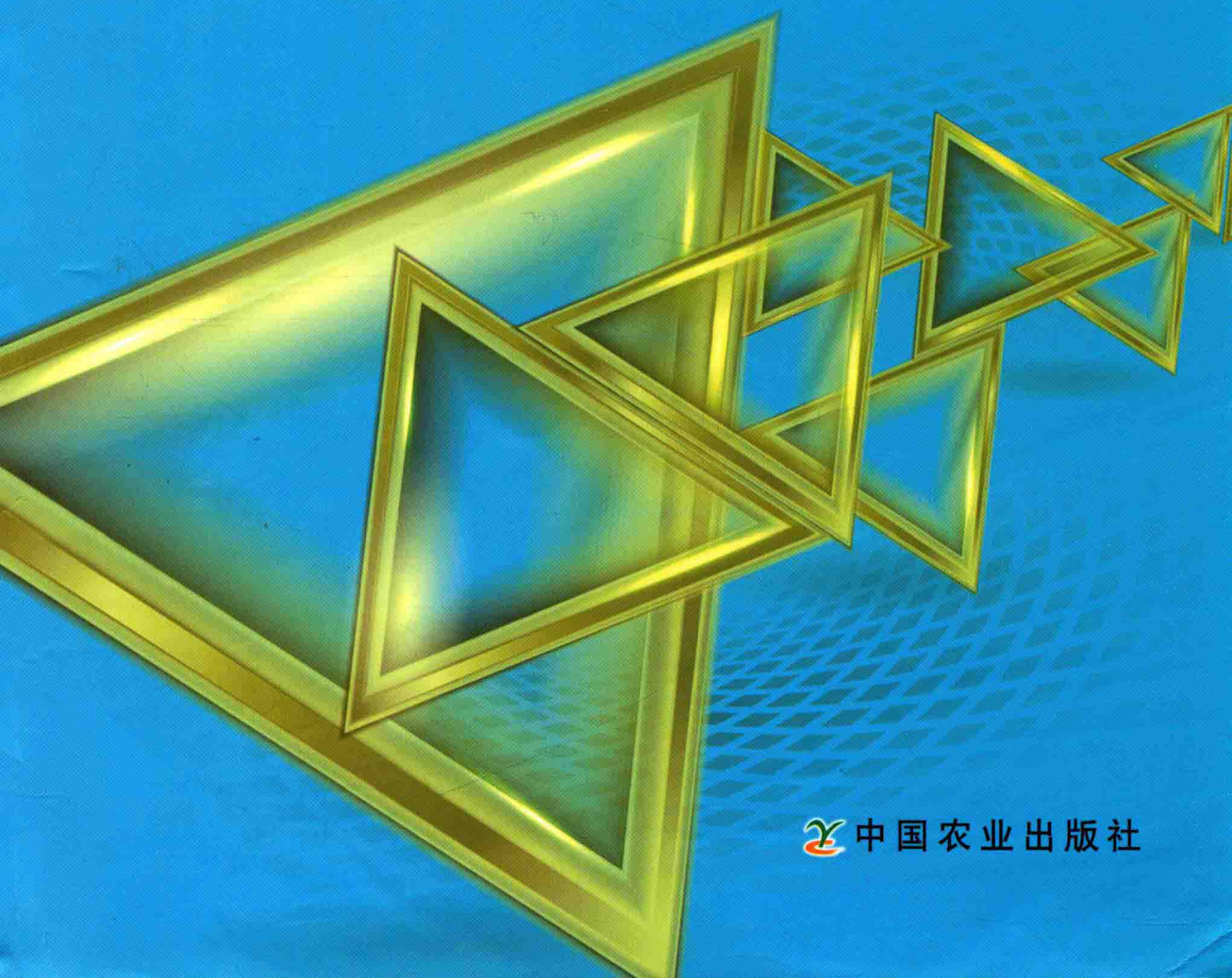




普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

王玉民 杜晓林 © 主编



 中国农业出版社

┌
普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

王玉民 杜晓林 主编

中国农业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 王玉民, 杜晓林主编. —北京: 中国农业出版社, 2013. 8

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17980-6

I. ①高… II. ①王… ②杜… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 126771 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100125)

策划编辑 朱 雷 魏明龙

文字编辑 魏明龙

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 26.75

字数: 640 千字

定价: 43.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

编审人员名单

主 编 王玉民 杜晓林

副主编 侯首萍 张俊芳 颜亭玉 孔素然

参 编 白荣凤 于景华 陈晓昕

主 审 李任波

前 言

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材，可作为都市型高等农林院校《高等数学》课程(综合类)教学用书。

近几年来，随着科学技术、特别是计算机和信息技术的飞速发展，各行各业都已逐步进入以信息化为标志的知识经济时代。科学化组织生产，利用信息化技术进行管理，以市场化方式实施运作的经营理念也逐步为各农产品生产、加工和营销企业所接受。因此，高等农林院校的人才培养方向、模式和知识技能结构也必须适应这种变化。

在这个大背景下，数学作为信息技术的理论基础、作为连接现象与本质之间的纽带、作为综合各种影响因素做出正确决策的依据，应该发挥其应有的作用，农林院校的毕业生也应该具备这些方面的素质和技能。

为此，本教材注意通过选用有关农业方面的例题来体现农林行业的特点；通过增加经济管理方面的内容向学生传授经营决策的知识和技能；通过补充数学建模案例以启发和提高学生运用数学技术解决实际问题的意识与能力；通过给出英文数学名词来拓展学生的国际化视野；通过引入涉及人口、环境和生态方面的问题以展现都市型农业院校的办学特色和人才培养方向。

本教材内容主要包括：函数、极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、无穷级数、微分方程和差分方程等 12 章。其中，第 1、2 章由王玉民编写，第 3、4 章由侯首萍编写，第 5、6 章由颜

亭玉编写,第7、9章由孔素然编写,第8章由陈晓昕编写,第10章由张俊芳编写,第11、12章由于景华编写,白荣凤提供了两个综合测试题和常见曲线,并对本教材全稿进行审阅,王玉民完成了全书的统稿工作。杜晓林教授(北京农业职业学院)和王玉民共同设计和规划了本教材的整体架构,李任波教授(西南林业大学)担任本教材主审。

在本教材的编写过程中,采纳了刘建慧副教授和其他农林院校相关专家很多有价值的意见和建议,在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平所限,书中出现错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者批评指正,以利改进完善。

作者

2013年4月

目 录

前言

第 1 章 函数及其应用	1
1.1 函数的概念	1
1.1.1 集合及其运算	1
1.1.2 函数的概念	2
习题 1.1	5
1.2 函数的几个特性	6
1.2.1 有界性	6
1.2.2 单调性	7
1.2.3 奇偶性	7
1.2.4 周期性	8
习题 1.2	9
1.3 反函数	10
习题 1.3	11
1.4 初等函数	11
1.4.1 基本初等函数	12
1.4.2 复合函数	14
1.4.3 初等函数	15
1.4.4 其他形式的函数	16
习题 1.4	17
1.5 函数的应用——初等数学模型	18
1.5.1 数学模型的概念	18
1.5.2 微积分与数学模型的关系	19
1.5.3 初等数学模型举例	19
习题 1.5	23
练习 1	23
第 2 章 极限与函数的连续性	26
2.1 数列极限的概念与性质	26
2.1.1 数列极限的直观描述	26

2.1.2 数列极限的定义	26
2.1.3 数列极限的性质	28
习题 2.1	29
2.2 函数的极限	30
2.2.1 自变量趋向于无穷大时函数的极限	30
2.2.2 自变量趋向于有限值时函数的极限	31
2.2.3 函数极限的性质	33
习题 2.2	34
2.3 无穷小与无穷大	34
2.3.1 无穷小	34
2.3.2 无穷小的性质	35
2.3.3 无穷大	36
2.3.4 无穷小与无穷大的关系	37
习题 2.3	37
2.4 极限的运算法则	38
2.4.1 极限的四则运算法则	38
2.4.2 求极限方法举例	39
习题 2.4	42
2.5 极限存在的两个准则 两个重要极限	43
2.5.1 夹逼准则 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	43
2.5.2 单调有界准则 重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	46
习题 2.5	48
2.6 无穷小的比较	49
习题 2.6	51
2.7 函数的连续性	52
2.7.1 函数连续的概念	52
2.7.2 单侧连续性	53
2.7.3 函数的间断点	54
习题 2.7	55
2.8 初等函数的连续性	56
2.8.1 连续函数的运算	56
2.8.2 反函数与复合函数的连续性	57
2.8.3 初等函数的连续性	58
习题 2.8	59
2.9 闭区间上连续函数的性质	59
2.9.1 最大值最小值定理	59

2.9.2 有界性定理	59
2.9.3 零点定理	60
2.9.4 介值定理	60
习题 2.9	62
练习 2	62
第 3 章 导数与微分	65
3.1 导数的概念	65
3.1.1 引例	65
3.1.2 导数的定义	67
3.1.3 求导数举例	68
3.1.4 单侧导数	69
3.1.5 导数的几何与物理意义	69
3.1.6 连续与可导的关系	70
习题 3.1	71
3.2 导数的运算	72
3.2.1 导数的四则运算法则	73
3.2.2 反函数求导法则	74
3.2.3 复合函数求导法则	75
3.2.4 初等函数求导问题	77
习题 3.2	79
3.3 高阶导数	80
习题 3.3	82
3.4 隐函数与参数方程求导法	83
3.4.1 隐函数求导法	83
3.4.2 参数方程求导法	85
习题 3.4	87
3.5 函数的微分	88
3.5.1 微分的概念	88
3.5.2 函数可微的条件	89
3.5.3 微分的几何意义	90
3.5.4 基本微分公式与微分运算	90
3.5.5 微分在近似计算中的应用	92
习题 3.5	93
3.6 导数在经济学上的应用	94
3.6.1 边际分析	94
3.6.2 弹性分析	96

习题 3.6	98
练习 3	99
第 4 章 中值定理与导数的应用	101
4.1 微分中值定理	101
4.1.1 罗尔定理	101
4.1.2 拉格朗日中值定理	102
4.1.3 柯西中值定理	105
习题 4.1	106
4.2 洛必达法则	107
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	107
4.2.2 其他类型的未定式	108
习题 4.2	110
4.3 泰勒公式	111
习题 4.3	116
4.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	116
4.4.1 函数单调性的判别法	116
4.4.2 曲线的凹凸性与拐点	118
习题 4.4	121
4.5 函数的极值与最大值最小值	122
4.5.1 函数极值的概念	122
4.5.2 极值存在的条件	122
4.5.3 最大值最小值问题	126
4.5.4 极值在经济分析中的应用举例	127
4.5.5 数学模型举例	128
习题 4.5	130
4.6 函数图形的描绘	131
4.6.1 曲线的渐近线	131
4.6.2 函数作图	132
习题 4.6	135
4.7 曲率	135
4.7.1 弧微分	135
4.7.2 曲率	137
习题 4.7	139
练习 4	139
第 5 章 一元函数积分学	141
5.1 定积分的概念与性质	141

5.1.1 引例	141
5.1.2 定积分的定义	142
5.1.3 定积分的几何与物理意义	143
5.1.4 定积分的性质	145
习题 5.1	147
5.2 微积分基本定理	148
5.2.1 积分上限函数	148
5.2.2 原函数的概念	150
5.2.3 牛顿—莱布尼茨(Newton—Leibniz)公式	151
习题 5.2	152
5.3 不定积分的概念与性质	153
5.3.1 不定积分的概念	153
5.3.2 不定积分的性质	154
5.3.3 基本积分表	155
5.3.4 直接积分法	156
习题 5.3	157
5.4 不定积分的计算	158
5.4.1 不定积分的换元积分法	158
5.4.2 不定积分的分部积分法	168
5.4.3 几种特殊类型函数的不定积分	173
习题 5.4	183
5.5 定积分的计算	184
5.5.1 定积分的换元积分法	184
5.5.2 定积分的分部积分法	187
习题 5.5	188
5.6 广义积分	189
5.6.1 无穷区间上的广义积分	190
5.6.2 无界函数的广义积分	191
5.6.3 Γ 函数	193
习题 5.6	194
5.7 定积分的近似计算	194
5.7.1 梯形公式	195
5.7.2 辛普森公式	196
习题 5.7	197
练习 5	197
第 6 章 定积分的应用	200
6.1 微分元素法	200

6.1.1 微分元素法的基本思想	200
6.1.2 微分元素的建立	201
习题 6.1	201
6.2 定积分的几何应用	201
6.2.1 平面图形的面积	201
6.2.2 立体的体积	205
6.2.3 平面曲线的弧长	207
习题 6.2	209
6.3 定积分的物理应用	209
6.3.1 物体的位移	209
6.3.2 液体的压力	210
6.3.3 变力做功问题	210
6.3.4 引力	211
习题 6.3	212
6.4 定积分在经济学上的应用	212
习题 6.4	213
练习 6	214
阶段测试题	216
第 7 章 空间解析几何	218
7.1 空间直角坐标系与向量代数	218
7.1.1 空间直角坐标系	218
7.1.2 向量的线性运算	220
7.1.3 向量的坐标	222
7.1.4 数量积与向量积	225
习题 7.1	228
7.2 平面及其方程	229
7.2.1 平面的点法式方程	229
7.2.2 平面的一般方程	230
7.2.3 两平面的夹角	231
7.2.4 点到平面的距离	232
习题 7.2	232
7.3 空间直线及其方程	232
7.3.1 空间直线的一般方程	232
7.3.2 空间直线的对称式方程与参数方程	233
7.3.3 两直线的夹角	235
7.3.4 直线与平面的夹角	235

7.3.5 经过直线的平面束	236
习题 7.3	237
7.4 曲面及其方程	237
7.4.1 曲面与方程	237
7.4.2 几类常见的曲面	238
7.4.3 二次曲面	241
习题 7.4	244
7.5 空间曲线及其方程	245
7.5.1 空间曲线与方程	245
7.5.2 空间曲线在坐标面上的投影	247
习题 7.5	248
练习 7	248
第 8 章 多元函数微分及其应用	250
8.1 多元函数	250
8.1.1 平面区域	250
8.1.2 多元函数的概念	251
8.1.3 二元函数的极限与连续性	253
习题 8.1	255
8.2 偏导数	256
8.2.1 偏导数的概念及计算	256
8.2.2 偏导数的几何意义	259
8.2.3 高阶偏导数	259
习题 8.2	260
8.3 全微分	261
8.3.1 全微分的概念	261
8.3.2 全微分在近似计算中的应用	263
习题 8.3	264
8.4 多元复合函数微分法	264
习题 8.4	268
8.5 隐函数微分法	269
习题 8.5	272
8.6 多元函数的极值	272
8.6.1 二元函数的极值	272
8.6.2 最大值最小值问题	274
8.6.3 条件极值 拉格朗日乘数法	275
8.6.4 数学建模举例	279

习题 8.6	281
练习 8	282
第 9 章 重积分	285
9.1 二重积分的概念与性质	285
9.1.1 二重积分的概念	285
9.1.2 二重积分的性质	287
习题 9.1	288
9.2 二重积分的计算及应用	288
9.2.1 利用直角坐标计算二重积分	289
9.2.2 利用极坐标计算二重积分	293
9.2.3 二重积分的应用	295
习题 9.2	297
9.3 三重积分	299
9.3.1 三重积分的概念	299
9.3.2 三重积分的计算	300
习题 9.3	304
练习 9	304
第 10 章 无穷级数	307
10.1 无穷级数的概念与性质	307
10.1.1 无穷级数的概念	307
10.1.2 无穷级数的性质	310
习题 10.1	313
10.2 常数项级数审敛法	313
10.2.1 正项级数审敛法	313
10.2.2 交错级数审敛法	320
10.2.3 绝对收敛与条件收敛	321
习题 10.2	323
10.3 幂级数	324
10.3.1 函数项级数的一般概念	324
10.3.2 幂级数及其敛散性	325
10.3.3 幂级数的运算	329
习题 10.3	331
10.4 函数的幂级数展开	331
10.4.1 泰勒(Taylor)级数	331
10.4.2 函数展开为幂级数	334

10.4.3 幂级数展开式的应用	339
习题 10.4	341
练习 10	342
第 11 章 常微分方程	344
11.1 微分方程的基本概念	344
习题 11.1	345
11.2 一阶微分方程	346
11.2.1 可分离变量的微分方程	346
11.2.2 齐次方程	347
11.2.3 一阶线性微分方程	349
11.2.4 伯努利(Bernoulli)方程	351
习题 11.2	352
11.3 可降阶的高阶微分方程	353
11.3.1 形如 $y^{(n)}=f(x)$ 的微分方程	353
11.3.2 形如 $y''=f(x, y')$ 的微分方程	353
11.3.3 形如 $y''=f(y, y')$ 的微分方程	354
习题 11.3	355
11.4 二阶线性微分方程	356
11.4.1 线性微分方程解的结构	356
11.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程	358
11.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程	361
习题 11.4	364
11.5 微分方程模型举例	365
习题 11.5	368
练习 11	368
第 12 章 差分方程	370
12.1 差分的基本概念	370
12.1.1 差分的概念与性质	370
12.1.2 高阶差分	371
习题 12.1	372
12.2 差分方程的基本概念	372
12.2.1 差分方程	372
12.2.2 线性差分方程解的结构	372
习题 12.2	373
12.3 一阶常系数线性差分方程	373

12.3.1 一阶常系数齐次线性差分方程	374
12.3.2 一阶常系数非齐次线性差分方程	375
习题 12.3	378
12.4 二阶常系数线性差分方程	378
12.4.1 二阶常系数齐次线性差分方程	378
12.4.2 二阶常系数非齐次线性差分方程	379
习题 12.4	381
综合测试题	382
参考答案	384
附录 常用曲线	410
参考文献	411

第1章 函数及其应用

函数是高等数学中最为常见的一个概念. 在研究许多实际问题的时候, 事物的变化规律常常都能够用函数关系来表示, 因此, 函数也是高等数学的主要研究对象.

1.1 函数的概念

1.1.1 集合及其运算

我们把具有某种属性的事物的全体称为一个集合(set), 把组成集合的事物称为该集合的元素(element). 集合常用大写拉丁字母表示, 元素常用小写拉丁字母表示. 例如, 如果事物 a 是集合 A 的元素, 记为 $a \in A$ (读作 a 属于 A); 如果事物 a 不是集合 A 的元素, 记为 $a \notin A$ (读作 a 不属于 A). 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$.

由有限个元素构成的集合称为有限集, 由无穷多个元素构成的集合称为无穷集.

集合通常采用两种方法表示. 一种称为列举法, 即把集合的所有元素一一列举出来. 例如, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 表示集合 A 由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成.

另一种称为描述法, 即对集合中所有元素具有的特征加以描述, 其一般形式为 $D = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$. 例如, $D = \{x \mid |x-2| \leq 1\}$ 就表示由所有满足条件 $|x-2| \leq 1$, 即满足 $1 \leq x \leq 3$ 的实数 x 构成的集合.

本书中主要讨论由数构成的集合, 即集合的元素都是数, 也称为数集. 除非特别声明, 以后本书中提到的数均指实数.

常用的实数集合有:

$\mathbf{N}$ ——自然数集, 即由所有非负整数组成的集合;

$\mathbf{Z}$ ——整数集, 即由所有整数组成的集合;

$\mathbf{Z}^+$ ——正整数集, 即由全体正整数组成的集合;

$\mathbf{Q}$ ——有理数集, 即由全体有理数组成的集合;

$\mathbf{R}$ ——实数集, 即由全体实数组成的集合.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 即若 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 显然 $\mathbf{Z}^+ \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

如果 $A \subset B$, 且 $B \supset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$.

集合 $\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的并集(union set), 记作 $A \cup B$; 集合 $\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为集合 A 与集合 B 的交集(intersection set), 记作 $A \cap B$.

关于集合的一些其他运算, 中学数学已进行了详细讨论, 在此不再一一赘述.

高等数学中最常遇到的实数集合是区间(interval), 其定义如下:

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a, b) , 即 $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$, 其中, a, b 分别称为区间 (a, b) 的左、右端点. 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$.