普通高等教育卓越数学教师教育丛书

数学方法论

叶立军　编著

科学出版社

普通高等教育卓越数学教师教育丛书

数学方法论

叶立军　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书共七章，在介绍数学方法论的研究意义、研究对象的基础上，阐述数学建模、数学抽象、推理等基本数学思想，在此基础上，阐述数学化归思想、类比、归纳、猜想等数学发现的基本方法及其在数学解题中的应用．同时，本书阐述数学美学和数学方法论在数学教育的价值及其教学策略．

本书适合普通高等院校的全日制本科生作为“数学方法论”的教材，也适用于中小学数学教师、教研员、中小学数学爱好者阅读．本书可作为研究生、教育硕士使用的教材或参考书，也可作为数学教师培训的教材．

图书在版编目(CIP)数据

数学方法论/叶立军编著．—北京：科学出版社，2017.12

（普通高等教育卓越数学教师教育丛书）

ISBN 978-7-03-054167-3

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①叶…　Ⅲ．①数学方法—方法论　Ⅳ．①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 199640 号

责任编辑：石　悦　滕亚帆 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍　兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 12 月第　一　版　开本：787×1092 1/16
2017 年 12 月第一次印刷　印张：15
字数：356 000

定价：38.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

“普通高等教育卓越数学教师教育丛书”编委会

丛 书 序

“国家兴衰在于教育，教育好坏在于教师”，高质量的教育取决于高质量的教师，教师是创造未来的关键. 随着基础教育改革的深入，迫切需要能胜任基础教育改革的师资，加强师资队伍建设，保证教育质量是基础教育改革成功的关键.

基础教育改革迫切需要一大批卓越教师，如何培养卓越教师以适应新课程改革的需要，已经成为社会关注的热点话题. 2010 年 6 月，教育部联合有关部门和行业协会共同实施“卓越工程师教育培养计划”. 2012 年，教育部、国家发展和改革委员会、财政部出台《关于深化教师教育改革的意见》，提出要实施卓越教师培养计划，推进教师培养模式改革，建立高等学校与地方政府、中小学（幼儿园、中等职业学校）联合培养教师的新机制. 高师院校相继申报“卓越教师培养体制改革试点项目方案”. 2014 年 8 月，教育部颁布《关于实施卓越教师培养计划的意见》. 同年 12 月，教育部办公厅公布卓越教师培养计划改革项目通知.

然而，随着高等教育改革的深入，应用型、综合性成为高等学校的主旋律，师范院校争相脱去师范帽子，不少高师院校纷纷向综合性大学转型. 地方师范院校转型后，教师教育专业被淡化或者被削弱，许多师范院校远离中小学实践，致使师范性缺失，教师培养质量降低.

针对这一现象，在浙江省数学教学指导委员会的指导下，杭州师范大学、湖州师范学院、温州大学、绍兴文理学院、台州学院、赣南师范大学等地方高院校以提高中学数学教师质量为目的，联合开展了数学教育核心课程建设和教学改革研究. 十多年来，建成国家级精品资源共享课程 2 门、省级精品课程 3 门，出版各类教材 20 多部，其中，国家级规划教材 1 部、省重点教材 3 部、浙江省“十二五”优秀教材 2 部.

同时，积极开展了以培养提高数学教师培养质量的教学改革，先后开展省级教学改革项目 10 多项. 构建了以高校教授、基础教育专家、一线教师协同育人的 PET 模式，实现了高校、基础教育共赢，每年受益学生达上万人，产生了良好的示范和辐射作用. 2016 年，杭州师范大学、湖州师范学院等学校联合申报的成果“课程改革背景下地方高师院校数学教育课程群建设及教学改革的实践探索”获得浙江省高等教育教学成果一等奖.

教材是人类知识及其精神产品的精华，是学校教育资源目标的重要载体，也是教学的重要资源. 高校教材是课程体系和教学内容改革的落脚点，只有将编、选、用三者有机结合，才能充分发挥教材在培养人才中的重要作用.

经过十多年的实践表明，以高校优质教学资源共享为途径，构建高师数学专业“3+X”课程体系，并依托高质量课程、高水平教材、高层次项目，着力推进数学教育课程群建设及教学改革，实施校地共育、多校联动，开展合作研究、协同育人，培养卓越中学数学教师，为基础教育提供强有力的人才支撑，显得尤为有效.

为此，在广泛调研并征求广大专家、一线教师的意见基础上，我们编写了本套丛书，旨在探讨教师教育新的培养模式，大力推进教师教育改革，提高师范生的学习能力、实践能力和创新能力，建立一套具有开拓性和探索性的创新教材体系，培养乐教适教的高素质教师，从而为中学培养卓越数学教师.

本套丛书以《教师教育课程标准（试行）》和《中小学和幼儿园教师资格考试标准及大纲（试行）》为依据，侧重对师范生学习能力、实践能力和创新能力的培养，提倡探索案例教学、项目教学等新的教学模式，形成“开放、研究、探索、创新”的教学机制，并结合各高校“教师教育培养计划”的教学方案来建设对应课程的教材. 在编写过程中，努力形成了如下的特色：①在教材中融入优秀中学教育教学案例；②满足相关专业规范及专业标准；③要将学科前沿知识、课程改革和教育研究最新成果充实到教学内容中，编写内容要强化学生的教学实践能力.

本套丛书由杭州师范大学叶立军教授担任主编，负责策划，湖州师范学院、台州学院、赣南师范大学等学校教师参与编写工作.

本套丛书适合中小学数学教师、教研员阅读，可作为高等师范院校本科生、课程与教学论和数学教育专业研究生以及教育硕士的教材或参考书，也可作为数学教师培训教材.

本套丛书在编撰的过程中，吸收了许多专家学者的著作和研究成果，在此深表衷心的感谢，也感谢科学出版社石悦编辑为本套丛书付出的辛勤劳动.

同时，由于作者学识有限、时间仓促，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正.

叶立军
2017 年 6 月于杭州师范大学

前　言

随着数学教育改革与发展的不断深入，数学思想方法在数学教学中的重要性日趋凸现，人们已经越来越认识到数学思想方法是数学教学的重要内容.

数学方法论是哲学、方法论和数学史等多门学科的交叉科学，其着眼点在于数学的创新. 它是研究数学发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明等的一门学科. 数学思想方法是数学的核心与灵魂，它不仅是数学的重要组成部分，而且是数学发展的源泉与动力.

中外数学家都十分重视数学思想方法的研究与应用. 日本著名数学教育家米山国藏曾说过：科学工作者所需要的数学知识，相对地说是不多的，而数学的精神、思想与方法却是绝对必要的. 数学的知识可以记忆一时，但数学的精神、思想和方法却随时随地发挥作用，可以使人受益终身.

作为数学教师了解数学思想方法的产生、发展和特点，掌握数学中的典型方法，了解数学的创造法则以及数学运动发展规律，形成正确的数学观，并能自觉地用数学方法论观点去指导数学学习与数学教学，从而提高数学教师驾驭教材之能力，是十分重要的.

本书共七章，在介绍数学方法论的学科性质、研究对象、发展简史以及研究意义的基础上，阐述抽象、模型和推理基本数学思想，在此基础上介绍化归思想、类比、归纳、猜想等数学发现的基本方法以及它们在数学解题中的应用. 本书还介绍数形结合、构造法等数学方法在数学解题中的应用.

本书还介绍数学建模、数学美学方法在数学发现中的应用，力图让读者掌握数学方法论在数学解题中的意义、作用以及领悟数学思想.

本书在编撰过程中，力图做到以数学思想为重点，以正确理解数学思想方法，指导数学思想方法的教学为目的. 全书既有理论原理，又有丰富的典型例证分析，富有启发性.

本书的框架设计、内容安排、呈现方式及陈述方式均体现数学新课程标准的理念. 同时，本书定位明确、内容丰富、选材合理、结构严谨、叙述通俗，具有科学性、实用性、时代性、学术性等特点.

感谢科学出版社石悦责任编辑为本书付出的辛勤劳动.

本书在编撰的过程中，吸收了许多专家学者的著作和研究成果，在此深表衷心的感谢.

由于本书作者学识有限，时间仓促，书中难免有不当之处，恳请各位专家、广大师生批评指正.

叶立军

2017 年 4 月于杭州师范大学

目　录

第一章　数学方法论简介

数学同其他各门学科一样，在其发展的过程中，形成了一系列适合于自身特点的思想方法．而数学是一门高度抽象又计算精巧的学科，学习数学必须讲究思想方法．在数学发展史中，数学思想方法不断为人们所掌握和运用，并创造出一个又一个成果．因此，《全日制义务教育数学课程标准（2011 年版）》要求我们帮助学生“获得适应社会生活和进一步发展所必需的数学的基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验”“体会数学知识之间、数学与其他学科之间、数学与生活之间的联系，运用数学的思维方式进行思考，增强发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力”．

数学教学有两种不同的水平．低级水平是介绍数学概念，陈述数学定理和公式，指出解题的程式和套路，以便通过考试．高级水平是着眼于数学知识背后的数学思想方法，在解决数学问题的过程中进行深层次的数学思考，经过思维训练，获得数学美学的享受．我国从 20 世纪 90 年代以来，重视数学思想方法的教学已经成为中国数学教育的一大特色．继承和发扬这一优势，是 21 世纪数学教育工作者的一项重要任务．

然而，由于种种原因，当前的数学教学中，对数学思想方法渗透不够甚至缺失．而正因为对数学思想方法缺乏应有的重视，所以，在一定程度上影响了数学人才的培养．因此，把数学思想方法作为一个独立领域加以研究，从方法论的高度，探讨其对象、内容、功能以及孕育、形成与发展的规律，无疑对数学的发展与哲学的研究，都是有重要意义的．

第一节　数学方法论概述

一、什么是数学？

数学具有高度的抽象性、严谨的逻辑性和广泛的使用性．这是关于数学学科特点的传统看法．近些年来，随着数学的发展与人们认识的深化，对数学学科特点又提出一些新的见解．比如，有人指出数学的基本特点是确切性、抽象性、严格性、应用的广泛性、数学美，还特别强调，数学美是数学诸特点中不可忽视的基本特点之一，人类进入以物质装置代替原来由人从事的信息加工处理工作的信息时代（或称信息加工时代、计算机时代）后，数学的上述诸特点进一步显示出来．也有人认为，从当前科学数学化的趋势看，高度的抽象性与广泛的适用性是数学最根本的两个特点．还有人主张，数学的主要特点是它的高度抽象性、严谨逻辑性与数学美，而应用的广泛性是高度抽象性和严谨逻辑性的具体表现．数学作为一门基础科学到底有哪些特点？结合现代科学发展的实际对这一问题加以深入探讨，显然对充分发挥数学的功能、促进数学的发展是有积极作用的．

同时，数学具有多方面的功能，主要表现在三个方面：①科学功能，即数学在自然科学、社会科学和哲学等领域中所起的作用；②思维功能，即数学作为一种思维工具，它在日常思维活动中所起的作用，以及它对思维科学发展的意义等；③社会功能，即数学在社会生产、经济、文化、教育以及在精神文明建设中占有的地位与作用等．数学为什么会有上述功能？怎样才能更好地发挥它的功能？这些问题在科学技术高度发展的今天，都显得特别重要．

二、数学是什么科学？

数学本质的另一个问题：数学究竟是什么科学？是演绎科学，还是经验科学呢？或是实验归纳科学呢？由于人们从不同的角度来认识，因而对这个问题有着不同的看法．

1．从数学所从属的工作领域来看

在 17 世纪以前，毕达哥拉斯学派的数学观占据了统治地位．他们认为“数是一切事物的本质，整个有规定的宇宙的组织，就是数以及数的关系的和谐系统”．伽利略说得更明白：“大自然乃至整个宇宙这本书都是用数学语言写出的”．依他们看来，科学的本质就是数学，世界是数学的描述形式．这一时期数学成了科学的“皇后”．

到了 17 世纪，这种观点发生了明显变化．数学家阿朗贝尔把数学划归在自然科学之内，确认它是自然科学的一个门类．数学不再被认为是科学的“皇后”，而是科学的“仆人”，是自然科学的工具．直到 20 世纪 80 年代末，我国杰出的科学家钱学森明确提出，“数学应该与自然科学和社会科学并列”，成为现代科学技术的自然科学、社会科学、数学科学、思维科学、系统科学、人体科学、军事科学、文艺理论、地理科学等十大门类的一大门类．他主张“数学应该称为‘数学科学’”．钱学森教授这一科学见解，不仅推动了数学自身的发展与繁荣，而且直接影响了人们的思维方式，影响了其他的科学进步．

科学技术飞速发展，越来越显示出“高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学”．现代高新技术越来越表现为是一种数学技术．正如美国科学院院士格利姆所说：“数学是一种关键的普遍适用的，并授予人以能力的技术”．这样一来，数学就有科学与技术两种品质．

2．从研究数学的方法来看

美籍匈牙利数学家、数学教育家乔治·波利亚认为“用欧几里得方法提出来的数学看来却像是一门系统的演绎科学；但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学”．可见，从数学真理（定理、法则、公式等）的发现或发明的无数事实来看，可以认为它是通过大量实验、归纳而得以发现，进而通过演绎推理而证明它的可靠性和真实性．从这种意义来讲，数学具有两重性．它既是一门系统的演绎科学（从最后被确定的定型的数学来看），又是一门实验性的归纳科学（从创造过程中的数学来看）．

3. 从数学对象来看

数学家笛卡尔把数学称作“序的科学”; 物理学家温伯格把数学看作“模式与关系”的科学，如像生物是有机体的科学，物理是物和能的科学一样，“数学是模式的科学”. 如果把数学看作一种语言，它又可认为“是描述模式的语言”. 随着现代数学的创立与发展，人们对数学的本质的认识逐步深化. 在当今数学哲学界流行一些新颖和较成熟的数学哲学观点.

《现代汉语词典》里，对于模式的解释是“某种事物的标准形式”. 这种标准形式是通过抽象、概括而产生的. 按照这种解释，数学的概念、理论、公式、定理和方法都可以看成一种模式. 显然它们又是一种数学抽象思维活动的产物. 这种抽象不同于其他科学中的抽象. 首先，在抽象的内容上，它仅仅保留了事物的量的特性，而舍去了它的质的内容. 其次，在抽象的度量上，数学中的概念，并非都是真实事物或现象的直接抽象的结果，而是在第一次抽象的基础上，进行多次的再抽象. 换句话说，由概念引出概念. 例如正方形是由长方形引出的概念. 再次，在抽象的方法上，它是一种“建构”的活动. 也就是说，数学的对象是借助于明确的定义得到构造的，数学理论又是建立在逻辑演绎之上来展开的. 我们不妨通过几个例子的研究来说明这点.

例 1　关于数学概念的模式.

我们知道“1”这个数，是对一个人、一棵树、一间房等一类事物的量的特性的刻画，是抽象思维的产物. 实际上，在现实世界里并不存在作为数学研究对象的真正的“1”. 又如，现实世界中，我们只看到圆形的十五的月亮、圆形的水池、圆形的车轮，而数学概念中的“圆”，则是这类事物的标准形式，反映了这类事物都具有的“到一个定点的距离等于定长”的量的特性.

在高等数学中，我们知道瞬时速度 v 可以看成是距离 s 对时间 t 的导数，即 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$；同样，电流强度 I 是电量 Q 对时间 t 的导数，表示为 $I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$；切线斜率是曲线 $y=f(x)$ 的纵坐标 y 对横坐标 x 的导数，记为 $\tan\alpha=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

我们如果将距离、电量、曲线等一类事物都抽象成关于 x 的函数 $f(x)$，那么刻画函数的变化率这一普遍意义的现象，可以用导数这一标准形式——模式来表示. 这样，我们把数学概念都可以看成量化模式.

例 2　关于数学问题的模式.

下面的两个问题，我们如果从质的方面来看，显然是两个不同的问题，但若从量的属性角度来看，却是同一个标准形式.

(1) 某人有两套不同的西装和三条不同颜色的领带，问共有多少种搭配方法?

(2) 有两个军官和三个士兵，现由一个军官和一个士兵组成巡逻队，问共有多少种组成方法?

这类问题，如果我们都舍去各自的质的内容. 那么它们就可以抽象成如图 1-1 的形式.

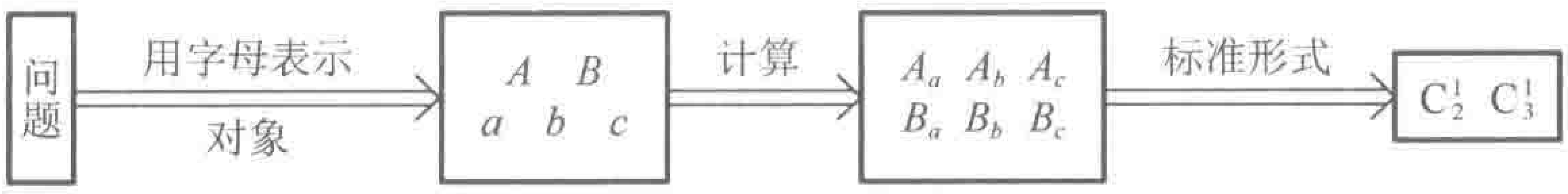

图 1-1

从方框图的推演可以看到，实际问题化归成了数的组合问题．这个过程就是关于量化模式的一种建构和研究．

三、方法与数学方法

什么是方法？有人认为“方法是一个元概念，不能逻辑地定义”；《哲学百科全书》(美)：“按给定程序达到既定成果必须采取的步骤”；《苏联大百科全书》：“方法表示研究或认识的途径、理论或学说，即从实践上或理论上把握现实的、为解决具体课题而采用的手段或操作的总和．”概而言之，方法是人们在认识和改造客观世界中所采用的方式、手段的统称．

数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法．人们通过长期的实践，发现了许多运用数学思想的手段、门路或程序，同一手段、门路或程序被重复使用了多次，并且达到了预期的目的，便成为数学方法．

因此，确切地说，数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法，即用数学语言表达事物的状态、关系和过程，经过推导、运算和分析，以形成解释、判断和预言的方法．

数学方法就是提出、分析、处理和解决数学问题所采用的思路、方式、逻辑手段等概括性的策略，也就是从数学角度提出问题、解决问题（包括数学内部问题和实际问题）的过程中采用的各种方式、手段、途径等，其中包括变换数学形式．

数学方法具有以下三个基本特征：一是高度的抽象性和概括性；二是精确性，即逻辑的严密性及结论的确定性；三是应用的普遍性和可操作性．

数学方法在科学技术研究中具有举足轻重的地位和作用：一是提供简洁精确的形式化语言；二是提供数量分析及计算的方法；三是提供逻辑推理的工具．现代科学技术特别是计算机的发展，与数学方法的地位和作用的强化正好是相辅相成．

宏观的数学方法包括模型方法、变换方法、对称方法、无穷小方法、公理化方法、结构方法、实验方法．微观的且在中学数学中常用的基本数学方法大致可以分为以下三类：

（1）逻辑学中的方法．例如，分析法（包括逆证法）、综合法、反证法、归纳法、穷举法（要求分类讨论）等．这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则，又因运用于数学之中而具有数学的特色．

（2）数学中的一般方法．例如，建模法、消元法、降次法、代入法、图象法（也称坐标法．代数中常用图象法，解析几何中常用坐标法）、向量法、比较法（数学中主要是指比较大小，这与逻辑学中的多方位比较不同）、放缩法、同一法、数学归纳法（这与逻辑学中的不完全归纳法不同）等．这些方法极为重要，应用也很广泛．

（3）数学中的特殊方法．例如，配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法（也称为中间变量法）、拆项补项法（含有添加辅助元素实现化归的数学思想）、因式分解方

法，以及平行移动法、翻折法等．这些方法在解决某些数学问题时起着重要作用，不可等闲视之．

例 3 求和：$\arctan 1+\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{7}+\cdots+\arctan\dfrac{1}{1+n+n^2}$．

思考与分析 可以考虑分解组合的方法，变换问题的数学形式．

$$\arctan\frac{1}{1+k+k^2}=\arctan\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}.$$

联想正切的差角公式 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$，$\alpha-\beta=\arctan\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$．

解 令 $\tan\alpha=k$，$\tan\beta=k+1$，则有

$$\begin{aligned}&\arctan 1+\arctan\frac{1}{3}+\arctan\frac{1}{7}+\cdots+\arctan\frac{1}{1+n+n^2}\\&=\arctan 1+(\arctan 2-\arctan 1)+(\arctan 3-\arctan 2)+\cdots+\left[\arctan(n+1)-\arctan n\right]\\&=\arctan(n+1).\end{aligned}$$

我们可以把数学方法分成四个层次．

1．基本的和重大的数学方法

这是一些哲学范畴的数量侧面，如模型化方法、概率统计方法、拓扑方法等．

（1）运动与静止．这是一对哲学范畴，它的数量化就是常量数学和变量数学．函数思想反映物质运动时的变量之间的依赖关系，微积分思想则是跨越无限成为研究函数变化率的锐利工具．中学里学习变量、函数，研究函数的性质，把函数作为一种模型，就是为了从数量上把握运动．

（2）偶然与必然．这对哲学范畴的数量化，形成了确定性数学和随机性数学．概率论是研究随机现象的数学，数理统计方法则是通过分析数据的随机性产生的学科．今天，我们重视概率与统计方法，正因为世界上充满着偶然性，而且偶然性后面具有一种必然性．掷硬币可以随机地出现两种情况，但是在大数量的投掷下，最后呈现各为 1/2 的概率．人们设法用背后存在着的必然规律把握偶然、认识偶然．

（3）现象与本质．任何事物都有现象和本质两个方面，在数量关系上也是如此．给定一个情景，其中有各种量，以及各种量之间的关系．那么，哪些量是重要的本质？哪些量是无关的，可以忽略的？哪些关系反映了数量变化的本质？这就是数学模型方法．数学建模过程，就是透过现象看本质，建立起一种可以分析研究的模型，借以观察变化，获得特性，推测未来．一个著名的例子是欧拉的多面体定理．不管一个多面体的形状多么奇特，尺寸如何变化，总有公式：点数＋面数－棱数＝2．多面体的外形是现象，它的拓扑特性才是本质．

（4）原因与结果．世界上万物都有一定的因果关系．揭露因果关系是各门学科的任务．数学承担的任务，是彼此间的逻辑关系．它可以不管哪个原因导致哪个结果，却一般地讨论因果之间的逻辑联系：充分条件、必要条件、排中律、传递性等．

其他如精确与近似（计算数学），整体与局部（函数的整体性质与局部性质），同一

与差异（模糊数学）等，都是考察重大数学思想方法的视角.

2. 与一般科学相应的数学方法

例如，联想类比、综合分析、归纳演绎、数学实验等.

数学方法是一般科学方法的特例. 自古以来，人类在认识世界的过程中积累了许多科学方法. 例如，归纳与演绎. 数学是一门演绎的科学，主要是运用演绎的论证，达到数学的真理性. 同时，数学也使用一般的归纳法. 在进行数学猜想的时候就要根据已知的事实，归纳地得到一些结果，然后再进行演绎的论证. 合情推理正是建立在归纳的基础上. 其他如观察、类比、联想等一般科学方法，都可以用于数学.

又如，数学实验. 数学也有实验，往往是思想实验. 即假定某条件，就会有某种结果，因而可以达到目的或者否定命题. 随着信息技术的不断发展，计算机和计算器技术在数学中得到推广使用，人们也常常做一些计算性的检验，通过计算一些特例得到普遍的猜想，甚至用近似方法逼近最后的结果. 方兴未艾的“计算机模拟实验”正在成为一种常用的数学方法. 例如，“100 以内的自然数，有哪些能够表示为自然数的等差数列之和？”计算机用枚举法就可以把所有的解找出来，这就是数学实验.

数学思想方法是数学过程中潜移默化渗透的，纯粹在教学中讲解是没有价值的，只能在实践中慢慢体会，逐步形成.

3. 数学中特有的方法

例如，数学等价、数学表示、公理化、关系映射反演、数形转换等方法，这些方法在数学中产生并应用（也部分地迁移到其他学科）.

例如，公理化方法. 欧式几何公理体系是公理化方法的典范. 自然数公理、实数系公理、复数系公理，也是大家熟知的. 高等数学中“群”的定义，实际上是“群”的公理. 在社会科学中，也有类似的思想. 例如，我国宪法的总纲，就是一组公理式的断语，由此派生出其他的论述和规律.

数学中最常用的是化归方法，即把需要证明的结果经过逻辑和等价的变换，归结为已知的事实. 中学数学解题多半要用化归方法加以证明和求解. 例如，分式方程、无理方程等往往化成一元二次方程来处理. 徐利治先生的一项创造性的概括——“关系，映射，反演”方法，也是一种化归，并为大家所一致重视，得以广泛应用. 例如，为了计算两数的乘法（关系），用对数（映射）将它化为两个数的加法，再用反对数求得结果（反演）. 值得指出的是，这一方法关键在于映射的选取，要使得映射的前后能够保持某种性质的不变性，例如，同构也是一种重要的数学方法. 对数映射将数的乘法对应为数的加法，这是同构. 没有同构，反演也就无从说起了.

4. 中学数学中的解题方法或技巧

它们在数学方法中具有特殊的基础意义，其内容丰富，变化无穷.

事实上，数学方法按不同标准有不同的分类.

(1) 按作用的范围可以分为三个不同的层次：一是一般的逻辑方法，如分析、综合、

类比、联想、归纳、演绎、猜想等，它们不仅适用于数学，而且适应于其他学科领域．二是全局性的数学方法，如极限方法、关系映射反演方法、数学模型方法等，这些方法的作用范围广，有的甚至影响着一个数学分支和其他学科的发展方向．三是技巧性的数学方法，如换元法、待定系数法、配方法等，它们往往和具体数学内容联系在一起，是解决某类数学问题的方法．

（2）按数学方法的运用功能可以分为数学发现方法、数学证明等．

四、数学方法的特点

数学方法具有以下几个特点．

1．概括性

数学知识的学习离不开概括，且较之其他学科的知识更抽象、更概括．例如，物理学中的匀速直线运动的运动规律 $s=vt$ 和简谐运动的运动规律 $a=-\frac{k}{m}x$（m，x，a 分别表示小球的质量、离开平衡位置的位移和运动的加速度，k 是常数）均是对现实世界具体事物的抽象和概括，而数学上的正比例函数概念则是在上述基础上的再抽象和再概括．数学思想方法是不断从数学概念、数学命题和数学理论中提炼和概括的产物．正是由于数学对象本身的概括性以及数学思想方法又是对数学知识的提炼和再概括，这就使得概括性成为数学思想方法最本质的特征．

数学思想方法一旦形成，便舍弃了具体的数学内容，只以形式而存在，从而可以运用到一切合适的场合之中．例如，数学中的关系映射反演法的建立标志着一般的化归方法达到更高更新的抽象概括程度，因而成为数学研究各个领域中有普遍应用价值的一般方法．

2．隶属性

数学思想方法高度的概括性，使它不同于具体的数学知识，而以元认知的形态与数学知识浑然一体地存在着，成为数学科学体系中两个不可分割的部分．数学知识内部蕴涵着丰富的数学思想方法，数学思想方法隶属于数学知识．形象地说，数学思想方法是生长在数学知识这块“皮”上的“毛”．数学知识成为数学思想方法的载体，数学思想方法通过数学知识来显化．例如，多项式恒等定理中蕴含着待定系数法，待定系数法在因式分解、化部分分式、求函数解析式、解方程（组）等数学内容中得到显化．正是由于这种隶属性，进行数学思想方法的教学时，应注意对教材的挖掘，从数学知识的教学开始，通过数学活动逐步明示相应的思想方法．

3．层次性

层次性是由数学特点决定的．在全部数学内容中均包含着从客观现实到逐级抽象结果的不同层次．数学思想方法是概括的结果，概括程度的高度决定了数学思想方法具有不同的层次．思想又是方法的结晶与升华，思想相对于方法通常居于更高层次．除了按其对认识的研究范围将数学思想方法分为宏观和微观之外，又有人将数学思想方法分为