Wei Ji Fen Ji Qi
Ying Yong Jiao Cheng

微积分及其应用教程

（上册）

主　编　潘　军　徐苏焦
副主编　冉素真　贵竹青

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

微积分及其应用教程

（上册）

主　编　潘　军　徐苏焦
副主编　冉素真　贵竹青

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分及其应用教程. 上册 / 潘军，徐苏焦主编.
—杭州：浙江大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-308-17297-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①潘… ②徐… Ⅲ.①微积分—高等
—学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 201721 号

微积分及其应用教程(上册)

潘 军 徐苏焦 主编

责任编辑 王 波
责任校对 王元新 陈 宇
封面设计 续设计
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排 版 杭州中大图文设计有限公司
印 刷 绍兴市越生彩印有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 15
字 数 328 千
版 印 次 2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-17297-4
定 价 38.00 元

前　言

进入 21 世纪后，世界各国的高等教育界逐渐形成了一种新的认识，即培养大学生实践能力和创新能力是提高大学生社会职业素养和就业竞争力的重要途径."应用型本科"是对新型的本科教育和新层次的高职教育相结合的教育模式的探索，是新一轮高等教育发展的历史性选择.应用型本科需要以应用型为办学定位，其发展同时也需要其他各方面协同发展，这当然也包括应用型本科教材这个相当重要的环节.

"微积分"作为应用型本科院校各相关专业学生必修的一门重要的公共基础课程，不仅肩负着为其他后继课程提供强大的运算工具和逻辑基础的职能，还主要承担着培养学生的逻辑推理、抽象思维、分析和解决问题能力的重任，在高素质应用型人才的培养过程中具有不可替代的作用.目前，国内面向本科生的微积分教材种类繁多，但专门面向应用型本科院校的微积分教材为数尚少.事实上，许多应用型本科院校仍在使用国内流行的普通高校的微积分教材，这也为我们加快应用型本科配套教材的建设提供了天然的动力.本书正是在为了适应新形势发展，夯实应用型本科院校课程教学质量与改革工程的背景下编写的.

浙江海洋大学东海科学技术学院十分重视微积分教材的编写工作，对教材的编写提出了"厚基础、宽应用、分层次"的指导性要求，2014 年开始组织潘军、徐苏焦、冉素真、贵竹青等教师编写《微积分及其应用教程》和《微积分及其应用导学》，这两本教材在学院内试用一年后，现由浙江大学出版社正式出版.

这两本教材的主要特点是以为经济社会发展培养具有较强的实践能力和创新能力的应用型高级人才服务为宗旨，内容设计注重强化知识基础、降低理论难度、体现分层次教学优化模式、面向学科应用的特点.内容体系设计有弹性，它将微积分相对直观的核心内容安排在本科第一学年进行学习，而将难度相对较大、相对较复杂的选学部分(打" * "的内容)放在本科第二学年，通过开展"通识选修课"的形式让学生选学.实践证明，这种分层次教学改革比较适合应用型本科院校的学生求学特点，师生反映良好.

《微积分及其应用教程》分上、下两册，本书为上册，主要内容包括函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程初步.全书由潘军、徐苏焦主编，冉素真、贵竹青等教师参与了部分编写工作.

借本书出版之机，向关心与支持本书的广大师生与读者表示衷心的感谢！由于水平有限，书中不妥或者错误之处在所难免，恳请广大专家、师生和读者批评指正.

编　者

2017 年 5 月于舟山

目　录

第 1 章　一元函数、极限与连续

数学是打开科学大门的钥匙……轻视数学将造成对一切知识的危害。

——英国思想家　培根

数学是这样一种学科：她提醒你有无形的灵魂；她赋予所发现的真理以生命；她唤起心神，澄清智慧；她给我们的内心思想增添光辉；她荡涤尽我们有生以来的蒙昧与无知。

——希腊数学家　普罗克洛斯

本章主要讨论函数、极限与连续的基础知识和基本方法，它是学习微积分学的必要基础. 函数是现代数学的基本概念之一，是微积分的主要研究对象；极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此理解极限概念、掌握极限方法是学好微积分的关键；函数的连续性是函数的一个重要性态，微积分中的其他许多概念或运算都与函数的连续性有关.

1.1 函　数

1.1.1 区间与邻域

在中学数学中，我们已经学习了有关数集和区间的内容，现简要整理如下.

常用的数集有：自然数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{Z}^+$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，正实数集 $\mathbf{R}^+$ 等.

区间是一种特殊的实数集，常用来表示变量的取值范围.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则

$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x<b\}$称为开区间；

$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间；

$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid a\leqslant x<b\}$与$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid a<x\leqslant b\}$称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间，a、b 称为这些区间的端点，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 此外还有以下几个无限区间：

$(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}\mid x<b\}$；$(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}\mid x\leqslant b\}$；

$(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x>a\}$；$[a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant a\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}\}$.

在叙述某些数学事实、不需要明确所论区间的类型时，我们常将其简称为“区间”，且习惯上用字母 I 表示.

当要表示变量在某个数(点)的邻近时，常需要用如下邻域的概念.

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$，称开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid |x-x_0|<\delta\}$为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，如图 1-1 所示.

若将邻域 $U(x_0,\delta)$的中心 x_0 去掉，则称其为点 x_0 的去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，如图 1-2 所示，即有

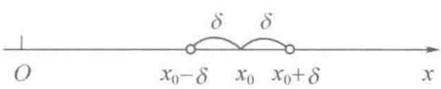

图 1-1

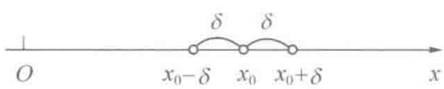

图 1-2

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

当不需要指明邻域的半径时，我们常说“点 x_0 的某一邻域”（或“点 x_0 的某一去心邻域”），并记为 $U(x_0)$（或 $\mathring{U}(x_0)$）.

1.1.2　函数

1. 函数的定义

定义 1.1　如果 X 是一非空实数集，设有一个对应法则 f，使对每一个 $x\in X$，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 X 上的一个函数关系，或称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in X$. 称 X 为定义域，x 为自变量，y 为因变量.

由函数定义可知，函数是由定义域和对应法则确定，与用什么符号表示无关，所以定义域和对应法则是构成函数最本质的两个要素. 如果两个函数的定义域和对应法则分别相同，则这两个函数相等.

注　(1)当 x 取遍 X 中的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

(2)习惯上用小写字母 f、g 或 φ、ψ 等表示函数的记号，定义域 X 也常用 D 或 D_f 表示.

(3)关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题，则应该取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的自然定义域.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域即为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

2. 函数的表示法

表示函数关系的主要方法有解析法、列表法和图像法. 其中图像法是利用函数图像来表示函数，称平面上的点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),x\in X\}$ 为函数 $y=f(x)$，$x\in X$ 的图像. 以下是几个重要的函数：

(1)绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，它的图像如图 1-3 所示.

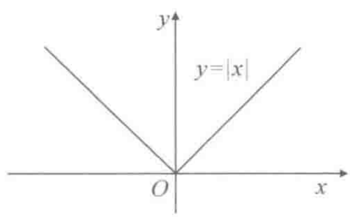

图 1-3

(2)符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为数集$\{-1,0,1\}$，它的图像如图 1-4 所示. 由函数相等的意义，绝对值函数与符号函数有如下的关系：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

(3)取整函数

取整函数 $y=[x]$是这样定义的：当 $n\leqslant x<n+1(n\in\mathbf{Z})$时，$[x]=n$，该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$. 其图像如图 1-5 所示，该图像又称为阶梯形曲线.

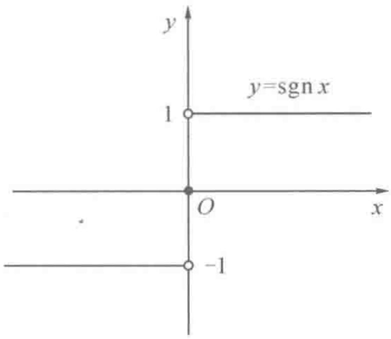

图 1-4

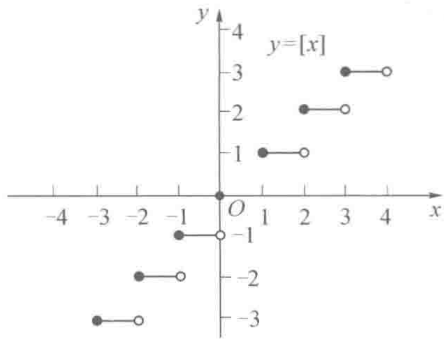

图 1-5

取整函数有下面的性质：

(1)$[x]\leqslant x<[x]+1$ 或 $x-1<[x]\leqslant x$，$x\in\mathbf{R}$；

(2)$[x+n]=[x]+n$，$x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{Z}$.

像绝对值函数、符号函数和取整函数，这类在其定义域的不同范围具有不同的解析表达式的函数称为分段函数.

1.1.3 函数的特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$的定义域 X 关于原点对称，若对于任意 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；若对于任意 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$为奇函数. 既不是偶函数也不是奇函数的函数称为非奇非偶函数.

在平面直角坐标系中，偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称. 在集合 X 上既是偶函数又是奇函数的函数是常数函数 $y=0$.

2. 函数的单调性

定义 1.3 设 $y=f(x)$为定义在 X 上的一个函数，区间 $I\subseteq X$，若对任意 x_1、$x_2\in I$，如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$($f(x_1)<f(x_2)$)，则称此函数在 I 内是单调增加(严格单调增加)的；如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$)，则称此函数在 I 内是单调减少(严格单调减少)的.

一个函数如果在某区间 I 内单调增加或单调减少，就称此函数在 I 内具有单调性，且区

间 I 称为此函数的单调区间. 从图形上看，单调增加函数的图像是沿 x 轴正向上升的曲线，单调减少函数的图像是沿 x 轴正向下降的曲线.

3. 函数的周期性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 X，如果存在一个正数 l，使得对一切 $x\in X$ 有 $f(x\pm l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 X 上的周期函数，l 为 $f(x)$ 的一个周期.

显然，若 l 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $nl(n\in\mathbf{Z},n\neq 0)$ 也是 $f(x)$ 的一个周期. 若在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个最小的正周期，则称此最小正周期为 $f(x)$ 的**基本周期**，或简称周期. 我们通常所称的周期即为基本周期.

4. 函数的有界性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数，若存在 $M>0$ 使得对任意 $x\in X$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 为 X 上的有界函数. $M(-M)$ 称为 $y=f(x)$ 的一个上(下)界.

若不存在这样的 M，即对任意 $M>0$，存在 $x\in X$，使得 $|f(x)|>M$，则称 $y=f(x)$ 为 X 上的无界函数.

从图形上看，有界函数的图像一定介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间；无界函数的图像一定会沿着 y 轴正向向上无限延伸或者沿着 y 轴负向向下无限延伸.

一个函数的有界性与自变量 x 取值区间有关，如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域中是无界函数，但在区间 $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)(a>0)$ 上是有界函数.

例 1.1 证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在其定义域上是有界函数.

证明 易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由基本不等式 $x^2+1\geqslant 2|x|$ 可得

$$|f(x)|=\frac{|x|}{x^2+1}\leqslant\frac{1}{2}(x\in(-\infty,+\infty)),$$

所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在定义域上是有界函数.

1.1.4 复合函数与反函数

1. 复合函数

对于函数 $y=\sin x^3$，我们可以引入中间变量 u，使得函数 $y=\sin x^3$ 可看成函数 $y=\sin u$，$u=x^3$ 的合成，从而将较复杂的函数看成两个较简单的函数的合成，以便于对其进行研究，这就需要给出复合函数的概念.

定义 1.6 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的值域为 Z_g，且 $D_f\cap Z_g\neq\varnothing$，则称 $y=f(g(x))=f\circ g(x)$ 为复合函数，x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量，其定义域 $D_{f\circ g}=\{x\,|\,x\in D_g,g(x)\in D_f\}$.

由定义知，只有当 $y=f(u)$ 的定义域与 $u=g(x)$ 的值域的交集非空时，这两个函数才可

以复合成函数 $y=f(g(x))$，否则复合而成的函数 $y=f(g(x))$ 的定义域是空集，即这样的复合函数是没有意义的. 例如，$y=\sqrt{u}$ 的定义域是 $[0,+\infty)$，$u=-x^2-1$ 的值域是 $(-\infty,-1]$，所以函数 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 不存在. 另外复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

2. 反函数

正方形的面积 S 与其边长 a 之间，若已知 a 的值，则 S 由 $S=a^2(a>0)$ 确定，这里 a 是自变量，S 是因变量；若已知 S 的值，则 a 由 $a=\sqrt{S}(S>0)$ 确定，这里 S 是自变量，a 是因变量. 可称函数 $a=\sqrt{S}$ 为函数 $S=a^2$ 的反函数.

定义 1.7 设 $y=f(x)$ 是定义在 D_f 上的一个函数，值域为 Z_f，如果对于任意 $y\in Z_f$ 有一个唯一确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D_f$ 与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，则称这个定义在 Z_f 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数，或称它们互为反函数.

注 (1)对于函数 $y=f(x)$，x 为自变量，定义域为 D_f，y 为因变量，值域为 Z_f；对于函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，定义域为 Z_f，x 为因变量，值域为 D_f.

(2)对于 $x=f^{-1}(y)$，由于我们习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，故此函数也可记为 $y=f^{-1}(x)$，但定义域和值域仍然分别为 Z_f 和 D_f. 由于在函数 $x=f^{-1}(y)$ 中 x 与 y 进行了互换，因此在图形上看，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.2 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^2-1(x\leqslant 0)$；　　(2) $y=\dfrac{2x}{x+1}$.

解 (1)因为 $x\leqslant 0$，所以由已知解得 $x=-\sqrt{y+1}$，且 $y\geqslant -1$，于是所求反函数是

$$y=-\sqrt{x+1},x\in[-1,+\infty).$$

(2)由已知解得 $x=\dfrac{y}{2-y}$，且 $y\neq 2$，于是所求反函数是

$$y=\frac{x}{2-x},x\in(-\infty,2)\cup(2,+\infty).$$

1.1.5 初等函数

在中学数学中，我们已经学习了指数函数，对数函数，幂指数为 1、2、3、-1、$\dfrac{1}{2}$ 的幂函数，正弦函数、余弦函数和正切函数这三个三角函数，上述这些函数的图像与性质在中学教材中已有详述，这里不再重复. 下面再对其他函数的有关内容做些补充.

1. 常值函数

常值函数 $y=C$（C 为常数）的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为单元素集 $\{C\}$，其图像是通过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的直线.

2. 幂函数

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为常数），由于 μ 取值的不同，其图像与性质都有显著的不同，必须对 μ 的取值进行分类讨论，我们将在《微积分及其应用导学（上册）》①1.1 节中详述，这里再补充当 μ 取 $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$、-2、$-\frac{1}{2}$ 时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 的图像与某些性质.

$y=x^{\frac{1}{3}}$ 的定义域和值域都为 $\mathbf{R}$，奇函数；$y=x^{\frac{2}{3}}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$，偶函数. 它们的图像如图 1-6 所示. $y=x^{-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，偶函数；$y=x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域和值域都为 $(0,+\infty)$；它们的图像如图 1-7 所示.

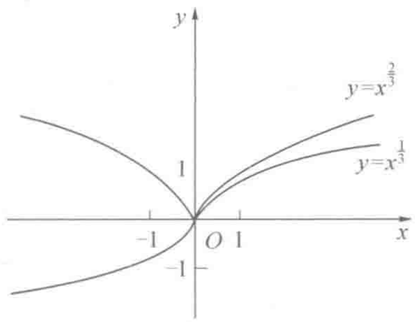

图 1-6

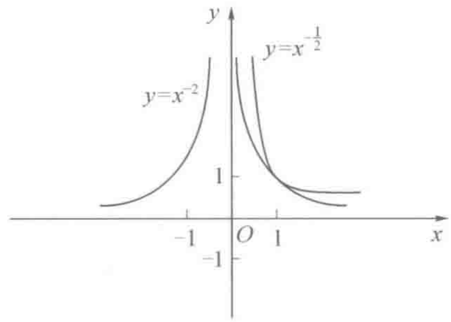

图 1-7

3. 余切函数、正割函数与余割函数

余切函数 $y=\cot x$，其中 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，定义域为 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $\mathbf{R}$，其图像如图 1-8 所示.

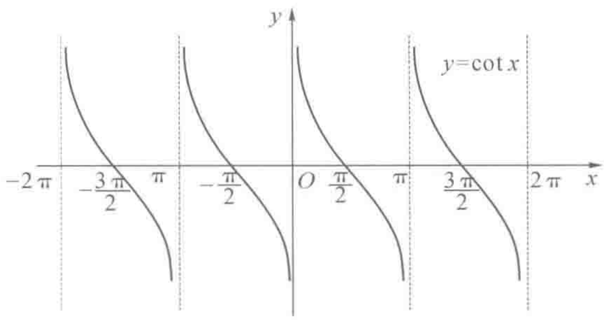

图 1-8

正割函数 $y=\sec x$，其中 $\sec x=\frac{1}{\cos x}$，定义域为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，偶函数，其图像如图 1-9 所示.

余割函数 $y=\csc x$，其中 $\csc x=\frac{1}{\sin x}$，定义域为 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$，值域为 $(-\infty,-1]$

① 徐苏焦、潘军. 微积分及其应用导学(上册). 杭州：浙江大学出版社，2017. 下同

$\cup[1,+\infty)$，奇函数，其图像如图 1-10 所示.

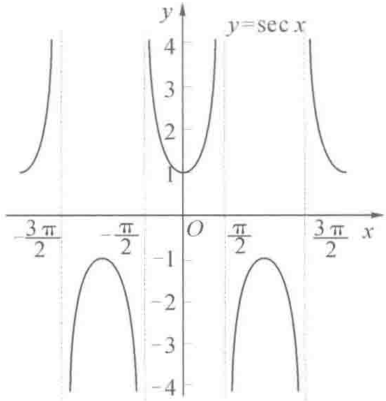

图 1-9

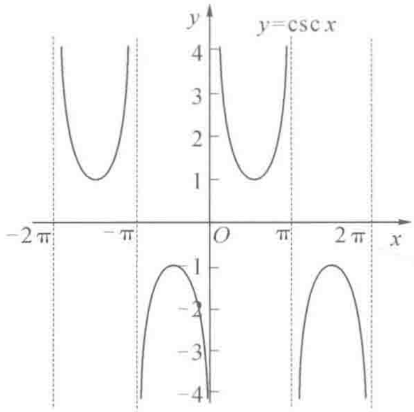

图 1-10

4. 反三角函数

当 $y=\sin x$ 的自变量 x 的取值限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调增加，此时它存在反函数 $y=\arcsin x$，称为反正弦函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，图像如图 1-11 所示.

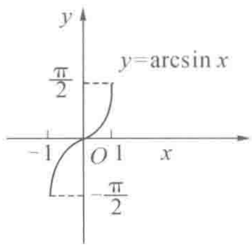

图 1-11

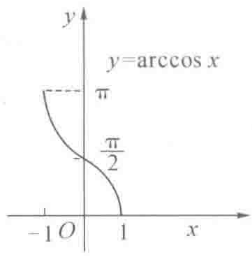

图 1-12

当 $y=\cos x$ 的自变量 x 的取值限制在 $[0,\pi]$ 时，$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上严格单调减少，此时它存在反函数 $y=\arccos x$，称为反余弦函数，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$，图像如图 1-12所示.

当 $y=\tan x$ 的自变量 x 的取值限制在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调增加，此时它存在反函数 $y=\arctan x$，称为反正切函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，图像如图 1-13 所示.

当 $y=\cot x$ 的自变量 x 的取值限制在 $(0,\pi)$ 时，$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上严格单调减少，此时它存在反函数 $y=\operatorname{arccot} x$，称为反余切函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,\pi)$，图像如图 1-14 所示.