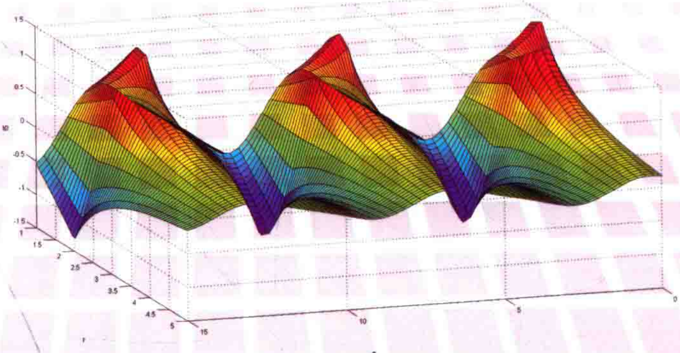
普通高等学校“十二五”规划教材

高等数学

上册

罗敏娜 王 娜 王 涛 曲玉香 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十二五"规划教材

高等数学

上册

主　编　罗敏娜　王　娜　王　涛　曲玉香
副主编　富爱宁　陈文英　孙　丽

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是普通高等学校理工类等专业的高等数学教材，作者根据多年的教学实践经验，结合理工类专业对高等数学的基本要求，再参照教育部最新颁布的研究生入学考试的数学考试大纲编写而成。

本书分上、下两册，上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程。每章都有习题和自测题并配有答案，各章末均有本章小结。内容安排由浅入深，既有基本理论和方法的论述，又有应用背景的介绍；为适合理科学生的知识结构和具体需要，教材编写中进行了一些新的尝试，内容力求涵盖面广，富有启发性、应用性和趣味性。

本教材使用对象为高等院校理工、管理等专业，也可作为自学考试、报考硕士研究生的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．上册/罗敏娜等主编．—北京：中国铁道出版社，2013.8

普通高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-113-16880-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①罗…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 170424 号

书　　名：高等数学·上册
作　　者：罗敏娜　王　娜　王　涛　曲玉香　主编

策　　划：李小军　　　　读者热线：400-668-0820
责任编辑：李小军　徐盼欣
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社（100054，北京市西城区右安门西街 8 号）
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：三河市华丰印刷厂
版　　次：2013 年 8 月第 1 版　　2013 年 8 月第 1 次印刷
开　　本：720mm×960mm　1/16　印张：17.25　字数：346 千
书　　号：ISBN 978-7-113-16880-3
定　　价：29.80 元

前　言

为适应21世纪高等院校学生对数学的要求，多年来我校在数学教学改革方面进行了不懈的探索。编者根据多年的教学实践经验，结合理工，管理等专业对高等数学课程的基本要求，再参照教育部最新颁布的研究生入学考试的教学考试大纲，我校组织编写了《高等数学》上、下册，《线性代数》系列教材。本册为《高等教学》上册。本书在编写过程中，着重介绍高等数学的基本概念、基本理论和基本方法，且尽量体现以下特点：

1. 对基本概念、基本理论和重要定理注重其实际意义的解释说明，力保知识的系统性和连贯性，注重对解题方法的归纳，注重定理的实际应用。

2. 书中的例题和习题尽量体现专业特色，由浅入深，循序渐进。对一些有代表性的典型例题进行着重分析，归纳出该类习题的解题方法和技巧，使学生在以后的练习中“有法可依”。

3. 结构清晰，每章最后均有本章小结，将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，更好地帮助学生复习巩固整章的内容。

4. 每章末配备的习题分为两类，一类是习题，体现了教学的基本要求，供学生平时的练习和巩固；另一类是自测题，供学生进行一章的复习与检验。书末给出了对应习题与自测题的参考答案，供学生参考。

本书包括函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程等六章内容。

本书由罗敏娜、王娜、王涛、曲玉香任主编，富爱宁、陈文英、孙丽任副主编。本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材；中国铁道出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情的支持和帮助，在此一并表示感谢！

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中存在不妥之处在所难免，恳请同行与广大读者不吝赐教。

编　者

2013年6月

目　录

第 1 章 函数、极限与连续

高等数学的主要研究对象是函数，函数描述了客观世界中变量之间的依赖关系. 极限是高等数学中的一个重要概念，它揭示了函数的变化趋势. 极限理论的确立使微积分有了坚实的逻辑基础，并使微积分在当今科学的各个领域得以更广泛、更合理地应用和发展. 函数的连续性与极限密切相关，它反映了函数的一种重要性态. 极限和连续是贯穿于高等数学始终的基本概念，也是学习微积分的理论基础.

本章首先介绍函数的基本概念和性质以及反函数、复合函数、基本初等函数等概念；其次讨论数列极限、函数极限的概念和性质及其计算方法，并在此基础上给出函数连续性的定义，同时揭示初等函数的连续性；最后给出连续函数的几个性质.

§1.1 函数的概念与性质

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

在研究实际问题时，所涉及的几个变量之间往往具有某种确定的关系. 如圆的面积 $S=\pi r^2$，当半径 r 取某一正数时，圆面积 S 就有唯一确定的数值与之相对应. 一般地，可抽象得出函数的定义.

定义 1 设 D 是一个非空实数集合，f 是一个对应法则，在此法则下，对每一个 $x\in D$，在实数集 $\mathbf{R}$ 中都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**函数**，称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x), \quad x\in D.$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，集合 D 称为函数 f 的**定义域**，通常记作 D_f；因变量的取值的全体所构成的集合称为函数的**值域**，通常记作 R_f，即

$$R_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

注 (1)函数概念中的 f 和 $f(x)$ 的含义不同. f 表示从自变量 x 到因变量 y 的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值，有时也常用 $y=y(x)$ 表示函数，这时右边的 y 表示对应法则，左边的 y 表示与 x 对应的函数值.

(2)在数学中，通常用小写或大写的拉丁字母 $f,g,h,\cdots,F,G,H,\cdots$ 和一些希腊

字母 $\phi,\varphi,\psi,\cdots$ 来作为表示函数的记号.

(3)函数的概念反映了自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系,即实数集合 D 到实数集合 $\mathbf{R}$ 之间的对应规律. 确定函数的两个要素是定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同,那么这两个函数是同一函数.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 与 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 定义域不同,所以这两个函数不是同一函数;又如,函数 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 虽然定义域相同,但对于函数

$$y=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{当 } x\geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x<0 \end{cases}$$

可见它们的对应法则不同,所以这两个函数不是同一函数.

(4)函数概念中要求对于任意 $x\in D$,都有唯一确定的 y 值与之对应. 但对于任意 $x\in[-1,1]$,$y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 都有两个 y 值与之对应,不符合函数的定义,这时也可以将其定义为一个函数,称之为**多值函数**,相应地把定义 1 中所指的情形称为**单值函数**. 本书中提到的函数除特别说明都是指单值函数.

2. 函数的表示法

函数常见的表示法一般有三种:解析法、列表法及图像法.

解析法:用数学表达式表示两个变量之间的函数关系,这种表示方法称作**解析法**,这个数学表达式称作函数的**解析式**.

列表法:列一个两行多列的表格,第一行是自变量的取值,第二行是对应的函数值,这种用表格来表示两个变量之间的函数关系的方法称作**列表法**.

图像法:以自变量力的取值为横坐标,对应的函数值 y 为纵坐标,在平面直角坐标系中描出各个点,这些点的连线构成了函数的图像,这种用图像表示两个变量之间函数关系的方法称作**图像法**.

函数的不同表示法具有不同的特点. 解析法的特点是能简明、全面地概括变量间的关系;图像法的特点是直观形象地表示出函数的变化情况;列表法的特点是便于求出函数值. 三种表示法各有不同的特点,所以常常将它们结合起来使用,在中学数学中已经学习过,这里不再举例说明.

3. 几个重要的分段函数

在实际应用中,经常遇到这样的函数:定义域的不同部分用不同的解析式表示,这样的函数称为**分段函数**.

例 1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & \text{当 } x\geqslant 0 \\ -x & \text{当 } x<0 \end{cases};$$

定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$.

例 2　取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数，定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$，其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集.

例如，$[2.6]=2$，$[-1.3]=-2$.

例 3　符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0\\ 0 & \text{当 } x=0;\\ -1 & \text{当 } x<0\end{cases}$$

定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$.

例如，对于任意实数 x，有 $x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|$.

例 4　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1 & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases};$$

定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$.

以上四个函数都是分段函数. 分段函数是用几个解析式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数.

4. 隐函数

若函数 y 可由自变量 x 的某一个解析式表达，例如，

$$y=x^3;\quad y=\log_a x\quad (a>1 \text{ 且 } a\neq 1);\quad y=\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}};$$

则称这种函数为**显函数**；但还有一种形式的函数，自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则不像上面的函数表示那样明显，而是含于一个二元方程 $F(x,y)=0$ 之中，这样确定的函数 $y=f(x)$ 称为**隐函数**.

例如，由方程 $xy-2x+3y-1=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$，这时 y 可以用 x 来表示，即 $y=\dfrac{2x+1}{x+3}$，把一个隐函数化成显函数，这个过程称为隐函数的**显化**；再如，由方程 $xy-e^y=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$，y 无法用 x 的显函数形式来表达.

由此可见，并不是所有由方程确定的隐函数都能表示成显函数的形式.

5. 函数定义域的求法

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 若不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，则规定函数的定义域是使解析式有意义的一切实数构成的集合.

求函数的定义域应注意以下几点：

(1)当函数是多项式($P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$)时，定义域为$(-\infty,+\infty)$；

(2)分式函数的分母不能为零；

(3)偶次根式的被开方式必须大于等于零；

(4)对数函数的真数必须大于零；

(5)反正弦函数与反余弦函数的定义域为$[-1,1]$；

(6)如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集；

(7)分段函数的定义域是各个表达式的定义域的并集.

例 5 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$；　　(2)$y=\ln(x-1)+\arcsin\dfrac{x}{2}$.

解 (1)要使 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x^2-1}$有意义，必须满足

$$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ x^2-1\neq 0\end{cases};$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant -2\\ x\neq \pm 1\end{cases}.$$

所以函数的定义域是$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(2)要使 $y=\ln(x-1)+\arcsin\dfrac{x}{2}$有意义，必须满足

$$\begin{cases}x-1>0\\ \left|\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1\end{cases};$$

即

$$\begin{cases}x>1\\ -2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}.$$

所以函数的定义域是$\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$.

例 6 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2 & 当\ 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求函数 $f(x+3)$的定义域.

解 由于

$$f(x)=\begin{cases}1 & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1\\ -2 & 当\ 1<x\leqslant 2\end{cases};$$

则

$$f(x+3)=\begin{cases}1 & 当\ 0\leqslant x+3\leqslant 1\\ -2 & 当\ 1<x+3\leqslant 2\end{cases};$$

即

$$f(x+3)=\begin{cases}1 & 当-3\leqslant x\leqslant -2 \\ -2 & 当-2<x\leqslant -1\end{cases}.$$

所以函数 $f(x+3)$ 的定义域是 $[-3,-1]$.

例 7　已知函数 $f(e^x-1)=x^3+2$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

解　令 $t=e^x-1$，则 $x=\ln(t+1)$，由此可得

$$f(t)=\ln^3(t+1)+2;$$

即

$$f(x)=\ln^3(x+1)+2.$$

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

1.1.2　函数的几种基本性质

1. 有界性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 若存在常数 $M>0$，使得对于任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上**有界**，否则称**无界**.

函数的有界性还可以等价地表述为：如果存在常数 M_1，M_2，使得对于任意 $x\in X$ 有 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，M_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的**下界**，M_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的**上界**.

无界函数可能有上界而无下界，也可能有下界而无上界，或既无上界又无下界，函数 $f(x)$ 的有界性与讨论的数集 X 有关.

例如，函数 $y=\sin x$，因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的，而在 $(1,2)$ 及 $[1,+\infty)$ 内是有界的.

2. 单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，

若恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递增函数**；

若恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调递减函数**.

单调递增函数与单调递减函数统称为**单调函数**，对应的区间 I 称为函数的**单调区间**，如图 1-1 所示.

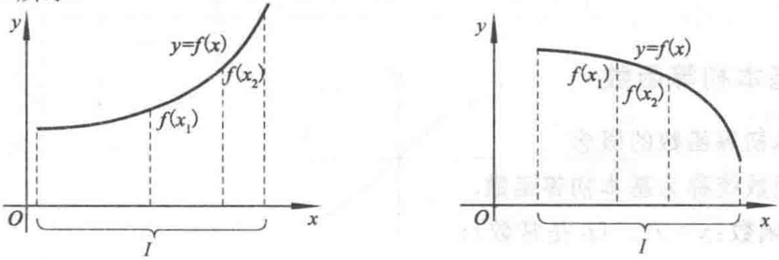


图 1-1

例如，函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间$[-1,1]$上是单调递增函数，函数 $y=\arccos x$ 在闭区间$[-1,1]$上是单调递减函数.

函数的单调性是针对某个区间而言的. 例如，函数 $y=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$内是单调递减的，在区间$[0,+\infty)$内是单调递增的，而在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3. 奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，

若对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为**偶函数**；

若对于任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

由定义知，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是奇函数；函数 $y=\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是偶函数；函数 $y=\sin x+\cos x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是非奇非偶函数.

例 8 判断函数 $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$在区间$(-1,1)$内的奇偶性.

解 对于任意 $x\in(-1,1)$，有

$$f(-x)=\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\frac{1+x}{1-x}=-f(x).$$

所以函数 $f(x)$在区间$(-1,1)$内是奇函数.

4. 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个不为零的正数 T，使得对于任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ $(x\pm T\in D)$恒成立，则称函数 $f(x)$为**周期函数**，T 称为函数 $f(x)$的**周期**.

周期函数的周期通常是指其最小正周期. 例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=|\sin x|$都是以 π 为周期的周期函数.

注 不是所有的周期函数都有最小正周期. 例如，常数函数 $y=C$(C 为常数)，显然任意正数都是其周期，而无最小正数.

§1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

1. 基本初等函数的概念

下列函数统称为**基本初等函数**.

(1)幂函数：$y=x^\mu$ (μ 是常数)；

(2)指数函数：$y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)；

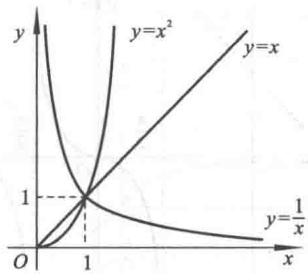
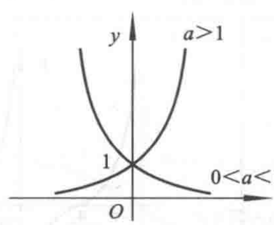
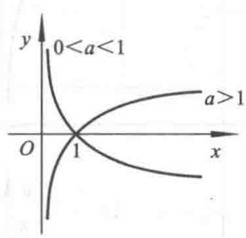
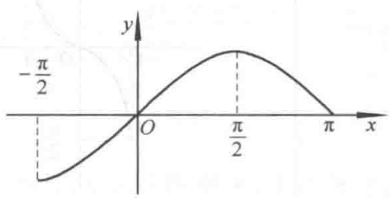
(3)对数函数：$y=\log_a x$　$(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(4)三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$；

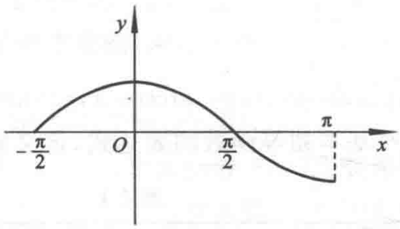
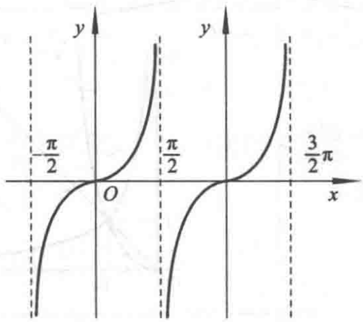
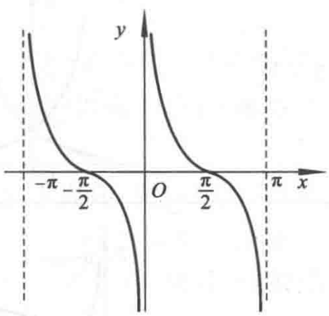
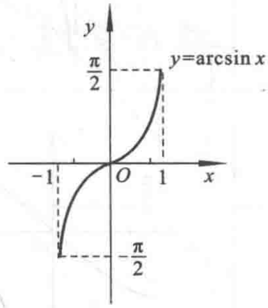
(5)反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

表 1-1 列出了一些基本初等函数的表达式、定义域、图像及简单特性.

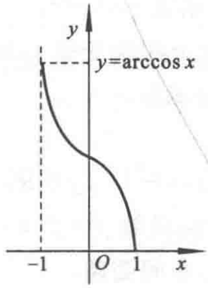
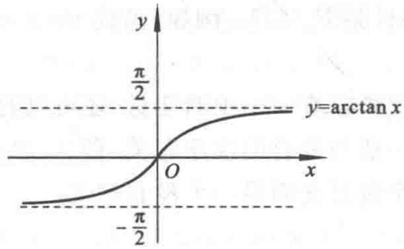
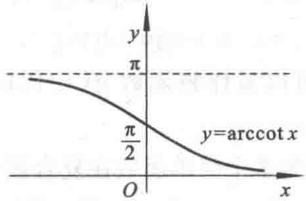
表 1-1

名称	表达式	定义域	图像	简单特性
幂函数	$y=x^\mu$	随 μ 而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		经过点(1,1)，在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，为增函数；当 $\mu<0$ 时，为减函数
指数函数	$y=a^x$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且都经过点(0,1)，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
对数函数	$y=\log_a x$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，都经过点(1,0)，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的有界的奇函数，值域为 $[-1,1]$

续表

名称	表达式	定义域	图　　像	简单特性
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的有界的偶函数，值域为$[-1,1]$
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$		以 π 为周期的奇函数，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是增函数
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$		以 π 为周期的奇函数，在$(0,\pi)$内是减函数
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		$y=\sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数为 $y=\arcsin x$ 是单调增加函数，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

续表

名称	表达式	定义域	图　像	简单特性
反余弦	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数为 $y=\arccos x$ 是单调递减函数，值域为 $[0,\pi]$
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调递增的有界奇函数，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调递减的有界函数，值域为 $(0,\pi)$

2. 常用三角函数公式

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$；

(2) $\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$；

(3) $1+\tan^2 x=\sec^2 x$，$1+\cot^2 x=\csc^2 x$；

(4) $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$，$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

1.2.2　复合函数

客观事物往往是错综复杂的，因而表示自然规律、生产规律的函数结构也是复杂的. 微积分中为了便于理解、计算，需要把复杂的函数分解为几个简单的函数，有时也