厚大 考研 NETM

全国硕士研究生入学统一考试用书

考研必备

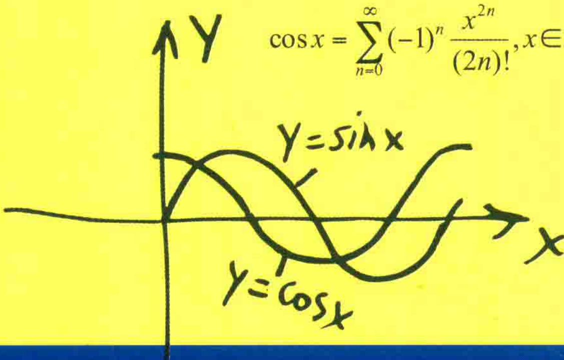
数学核心公式锦囊妙记

（一本通）

铁军 赵俊光／编著

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty).$$



考研必备
数学核心公式180

一册在手，公式我有

紧贴考纲，轻松记忆
框架清晰，图文并茂

中国政法大学出版社

考研必备数学核心公式锦囊妙记

主 编 铁 军 赵俊光

中国政法大学出版社
2017・北京

图书在版编目（CIP）数据

考研必备数学核心公式锦囊妙记/铁军，赵俊光编著. —北京：中国政法大学出版社，2017.9
ISBN 978-7-5620-7747-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①铁… ②赵… Ⅲ.①数学公式—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第220009号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）　58908334(邮购部)
承　印　三河市宇通印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　17.5
字　数　445千字
版　次　2017年9月第1版
印　次　2017年9月第1次印刷
定　价　48.00元

前言

PREFACE

数学公式是考研数学的重要基础，准确、熟练掌握数学公式并注重学科内容的内在联系和公式的综合运用，对于提高解题能力和考研成绩大有裨益.

考研数学试卷考查的都是高等数学、线性代数和概率统计课程中的主要公式、主干知识和核心内容，而且都是核心概念、核心公式、基本理论和常用方法. 在考查基本内容的基础上，着重考查考生的运算能力、逻辑推理能力、应用数学知识分析问题和解决问题的能力.

近年来考研试题更加关注基础，强调重点，注重能力，注意了整体难度的控制，中等和中等难度以下的试题占到了70%以上，尤为凸显了数学公式的重要性. 考研数学试题分为选择题、填空题和解答题三种题型，选择题和填空题中的大部分试题只涉及一个或两个数学公式和知识点，都是基本题；解答题中的基本题也超过了一半，即使在难度较大、综合性较强的试题中，在设问和数学公式的运用上也都做了处理，为考生搭了桥、铺了路.

从编者的考研阅卷经验看，一些考生的基础还不够扎实，首先是对基本概念的掌握不够准确，其次运算能力比较薄弱，反映出公式记忆不够清晰、不够全面，理论理解不够深入，方法掌握不够灵活、不够牢靠. 牢固掌握并灵活运用数学公式是考生分析问题和解决问题能力的基础和高层次表现，为了帮助同学们巧记妙用这些数学公式，我们特意面向考研高端集训营编写了这本《考研数学核心公式锦囊妙记》(高端集训营版).

本书的编写严格依据《2019年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》对各卷种分别规定的考试范围及要求，书中涉及的知识内容编排分别与大纲对照一致(在书中做出标记，数一、二、三均适用的，不用标记，只适用数几的特殊标出)，全书分为高等数学、线性代数、概率论与数理统计和初等数学常用公式四大部分，各部分知识内容均与考试大纲完全一致，以“章”为单位进行编排，且各章标题与大纲相应章标题完全相同，以便考生参照大纲进行考点速记，充分展现以“全面、巧记、妙用”为主旨的特点.

“考研大纲知识结构拓扑图”提纲挈领，将学科不同章节知识梳理，呈现知识全局，提高考生的认知层次．每章在内容编排上主要包括四大板块，“考研大纲最新考试要求”使考生能明确大纲要求考生掌握的考试范围和考试要求，列出反映考试内容且要求考生掌握的概念、性质、公式、理论与计算方法；“核心概念、定理及公式”以最为详尽的方式总结归纳出高等数学、线性代数、概率论与数理统计中的全部公式及相应的知识点，包括定义、性质、定理、公式及其图、表和评注．“考研解题技巧性公式凝练”根据编者近三十年数学建模、高等数学竞赛与考研辅导经验，将可以直接运用且教科书未曾强调或没有列出的考研解题技巧性公式和常见中间结论加以凝练收录其中，做到更全面、更完善；“考研重点题型点睛与锦囊妙计”是本书的又一亮点，通过这部分内容使考生能够透视出考研数学的重点题型以及数学公式的变化规律、每种题型的切入点、突破口和解题方法与技巧，达到“定位”数学公式和知识点并快捷准确巧妙解题的目标．

本书以最新考研数学大纲为基础，涵盖高等数学、线性代数、概率论与数理统计和初等数学中考研常考的全部公式及相应的知识点，包括定义、性质、定理、公式及其图、表和评注．本书适合考研同学使用，也可作为在校大学生学习数学的参考书．

由于编者水平有限和编写时间比较仓促，书中错误疏漏之处，恳请读者批评指正．

编　者

2017 年 9 月

目录

CONTENTS

第一篇 高等数学

考研大纲知识结构拓扑图

- 高等数学
  - 函数、极限、连续
    - 函数的概念、函数的基本性质
    - 数列的极限、函数的极限、无穷小量与无穷大量
    - 极限的存在准则、两个重要极限
    - 函数的连续与间断、连续函数的运算、初等函数的连续性、闭区间上连续函数的性质
  - 一元函数微积分
    - 导数与微分
      - 导数的求法
      - 高阶导数
      - 微分
    - 中值定理与导数的应用
      - 中值定理
      - 洛必达法则
      - 导数的应用
        - 函数的单调性
        - 极值和最值
        - 凹凸性与拐点
        - 函数图形的描绘
        - 导数在经济上的应用
    - 不定积分
      - 不定积分的概念与性质
      - 换元积分法
      - 分部积分法
    - 定积分
      - 定积分的概念和性质
      - 牛顿—莱布尼茨公式
      - 定积分的换元积分法
      - 定积分的分部积分法
      - 反常积分
    - 定积分的应用
      - 求平面图形的面积
      - 求体积
      - 定积分的元素法（数学一、数学二）
      - 求平面曲线的弧长（数学一、数学二）
      - 求旋转曲面的侧面积（数学一、数学二）
      - 定积分在物理上的应用（数学一、数学二）
      - 定积分在经济上的应用（数学三）

- 高等数学
  - 向量代数和空间解析几何（数学一）
    - 空间直角坐标系
    - 向量的坐标
    - 向量的基本运算法则
    - 数量积与向量积
    - 曲面及方程
      - 平面及方程
      - 旋转曲面、柱面
      - 二次曲面
    - 空间曲线及方程 → 空间直线及方程
  - 多元函数微积分
    - 多元函数微分学及应用
      - 多元函数的极限和连续
      - 偏导数
      - 全微分
      - 多元复合函数的求导法则
      - 隐函数的求导公式
      - 方向导数和梯度
      - 多元函数的极值及求法
        - 多元函数的极值与最值
        - 条件极值 → 拉格朗日乘数法
    - 重积分
      - 二重积分
        - 基本概念和性质
        - 计算方法
          - 用直角坐标
          - 用极坐标
      - 三重积分（数学一）
        - 基本概念和性质
        - 计算方法
          - 用直角坐标
          - 用柱面坐标
          - 用球面座标
    - 曲线积分 曲面积分（数学一）
      - 曲线积分
        - 第一类曲线积分 → 求曲线的弧长
        - 第二类曲线积分
          - ↓
        - 格林公式
          - 格林公式的条件和结论
          - 曲线积分与路径无关
          - 全微分求解
          - 变力沿曲线做功
      - 曲面积分
        - 第一类曲面积分 → 求曲面面积
        - 第二类曲面积分 → 高斯公式

- 高等数学
  - 无穷级数（数学一、数学三）
    - 常数项级数
      - 收敛级数的性质
      - 收敛级数的收敛性判别
        - 正项级数
          - 比较审敛法
          - 比值审敛法
          - 根值审敛法
        - 交错级数 → 莱布尼茨判别法
        - 任意项级数
          - 绝对收敛
          - 条件收敛
    - 幂级数
      - 幂级数性质和运算法则
      - 收敛半径和收敛区间
      - 求幂级数的和函数
      - 函数展开成幂级数
    - 傅里叶级数（数学一）
      - 三角级数
      - 收敛定理（狄利克雷（Dirichlet）充分条件）
      - 函数展开成傅里叶级数
        - 正弦级数、余弦级数
        - 周期分别为 2π 和 $2l$ 的函数展开成傅里叶级数
  - 微分方程
    - 基本概念
    - 可分离变量的微分方程
    - 齐次方程
    - 一阶线性非齐次微分方程
    - 可降阶的高阶微分方程（数学一、数学二）
    - 伯努利方程（数学一）
    - 高阶微分方程
      - 阶的结构
      - 二阶常系数线性微分方程
        - 二阶常系数齐次线性微分方程
        - 二阶常系数非齐次线性微分方程
      - 欧拉方程（数学一）

第一章　函数、极限、连续

考研大纲最新考试要求

【数学一】【数学二】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

【数学三】

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.

6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则，掌握极限的性质及四则运算法则，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

7. 理解无穷小量的概念和基本性质，掌握无穷小量的比较方法．了解无穷大量的概念及其与无穷小量的关系.

8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续)，会判别函数间断点的类型.

9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

核心概念、定理及公式

一、　函数

1.1　函数的概念

定义： 设 x 与 y 是两个变量，D 是一个给定的数集．如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照

一定法则 f 总有确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. 当 x 遍取 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数集 $W=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数的值域.

1.2 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数. 常见的几个分段函数有：

【注】分段函数的定义域是各个"分段"函数定义域的并集.

(1) 绝对值函数(其图形如图 1－1－1 所示)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

(2) 符号函数(其图形如图 1－1－2 所示)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

【注】对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

(3) 取整函数(其图形如图 1－1－3 所示)

设 x 为任一实数，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数，它表示不超过 x 的最大整数.

【注】对于任何实数 x，下列关系成立：

$x-1<[x]\leqslant x$，且存在 α，使得 $x=[x]+\alpha$，其中 $0\leqslant\alpha<1$.

(4) 最大值函数

$$\max\{f(x),\ g(x)\}=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant g(x) \text{ 时}\\ g(x), & \text{当 } f(x)<g(x) \text{ 时}\end{cases}$$

(5) 最小值函数

$$\min\{f(x),\ g(x)\}=\begin{cases}g(x), & \text{当 } f(x)\geqslant g(x) \text{ 时}\\ f(x), & \text{当 } f(x)<g(x) \text{ 时}\end{cases}$$

(6) 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

【注】狄利克雷函数是一个特殊的周期函数，任何正有理数都是它的周期，其周期不唯一，且没有最小正周期.

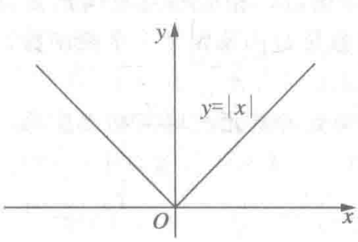


图 1－1－1

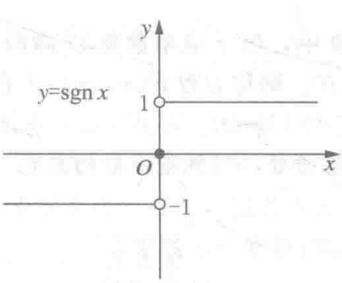


图 1－1－2

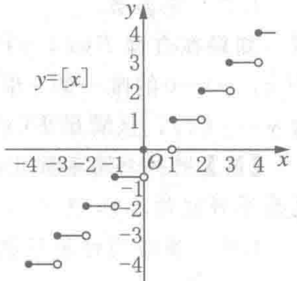


图 1－1－3

1.3 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数：

(1) 常值函数：$y=C$，其中 C 为常数，自变量 $x\in R$.

(2) 幂函数：$y=x^{\mu}$(μ 是常数).

(3) 指数函数：$y=a^{x}$(a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$)，特别地，当 $a=e$ 时，记为 $y=e^{x}$.

(4) 对数函数：$y=\log_{a}x$(a 是常数且 $a>0$，$a\neq 1$)，特别地，当 $a=e$ 时，称为自然对数且记为 $y=\ln x$.

(5) 三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

1.4 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如 $y=\sqrt{1-x^{2}}$，$y=\sin^{2}x$，$y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$ 等都是初等函数.

1.5 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_{φ}，且其值域 $D_{\varphi}\subset D_f$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为由函数 $u=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，其中 x 为自变量，u 称为中间变量.

【注】(1) 不是任何两个函数都能复合成函数，这里必须满足条件 $D_{\varphi}\subset D_f$.

(2) 会把已给的两个函数复合成复合函数.

(3) 会把复合函数拆成简单函数. 其方法是：由内向外或由外向内，层层分解.

1.6 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$，如果对每一个 $y\in Z(f)$，都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $Z(f)$ 上以 y 为自变量的函数，记此函数为 $x=f^{-1}(y)$，$y\in Z(f)$，并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的直接函数.

在 $x=f^{-1}(y)$ 中 y 为自变量，x 为因变量. 习惯上，常用 x 做自变量，y 做因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 通常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z(f)$.

【注】(1) $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合；而在同一直角坐标系中，$y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

(2) $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

(3) $y=f(f^{-1}(y))$，$x=f^{-1}(f(x))$.

1.7 隐函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 取某数集 D 内的任一值时，相应地总有满足该方程 $F(x,y)=0$ 的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在该数集 D 内确定了一个隐函数，记为 $y=y(x)$，且满足 $F(x,y(x))=0$.

【注】把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的.

1.8 参数方程表示的函数(数学一、数学二)

设 y 与 x 的函数关系是由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\phi(t)\end{cases}$ 确定的，则称此函数关系所表达的函数为由

参数方程所确定的函数.

1.9　函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在实数集 D 上有定义，且 D 关于原点对称. 若任取 $x \in D$，恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若取 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

【注】(1) 在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于坐标原点 $O(0,0)$ 对称.

(2) 判断奇偶性的方法

① 若 $f(x)$ 的定义域不对称于原点，则 $f(x)$ 必非奇非偶.

② 若 $f(x)$ 的定义域对称于原点时，计算 $f(-x)$，并将 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 及 $-f(x)$ 进行比较，再依据定义.

③ 利用下述结果：设 $f(x)$，$g(x)$ 都定义在 $(-a, a)$ 内，那么，若 $f(x)$，$g(x)$ 都是偶函数，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x) \cdot g(x)$ 也是偶函数；若 $f(x)$，$g(x)$ 都是奇函数，则 $f(x) \pm g(x)$ 为奇函数，而 $f(x) \cdot g(x)$ 为偶函数；若 $f(x)$ 为奇(偶)函数，$g(x)$ 为偶(奇)函数，则 $f(x) \cdot g(x)$ 为奇函数.

1.10　函数的周期性

对函数 $y = f(x)$，若存在常数 $T > 0$，使得对定义域内的每一个 x，$x \pm T$ 仍在定义域内，且有 $f(x+T) = f(x)$，则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

1.11　函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 且 $x_1 < x_2$ 时，均有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上严格单调增加(或严格单调减少). 在上述定义中把“$<$”换成“$\leqslant$”称为单调增加或单调不减，“$>$”换成“$\geqslant$”称为单调减少或单调不增.

【注】判断函数单调的方法　通常是利用导数判断，也可以按下法进行：任取 x_1，$x_2 \in I$，设 $x_1 < x_2$，将 $f(x_2) - f(x_1)$ 与零比较；若函数恒正(负)，可将 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}$ 与常数 1 比较.

1.12　函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 在一个数集 X 上有定义，

(1) 若存在正数 M，使得对于每个 $x \in X$，都有 $|f(x)| < M$ 成立，称 $f(x)$ 在 X 上有界.

(2) 若存在常数 M，使得对于每个 $x \in X$，都有 $f(x) < M$ 成立，称 $f(x)$ 在 X 上有上界.

(3) 若存在常数 M，使得对于每个 $x \in X$，都有 $f(x) > M$ 成立，称 $f(x)$ 在 X 上有下界.

(4) 若对于任意正数 M(无论它多么大)，总存在 $x_0 \in X$，使得 $|f(x_0)| \geqslant M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(5) $f(x)$ 在 X 上有界的充要条件是 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界.

【注】(1) 有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必有界.

(2) 一个函数是否有界，不仅与函数表达式有关，而且与给定集合 D 有关. 例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界，但在 $(1, +\infty)$ 内却有界.

二、极限

2.1 数列的极限

定义 如果数列$\{x_n\}$与常数a有下列关系：对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正整数N，使得对于$n>N$时的一切x_n，不等式$|x_n-a|<\varepsilon$都成立，则称常数a是数列$\{x_n\}$的极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$或$x_n\to a(n\to\infty)$.

2.2 收敛数列极限的唯一性

定理 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限. 也就是说，如果数列$\{x_n\}$收敛，则其极限唯一.

2.3 数列的有界性

定义 (1) 对于数列$\{x_n\}$，如果存在正数M，使得对一切x_n都满足不等式$|x_n|\leqslant M$，则称数列$\{x_n\}$是有界的；如果这样的正数M不存在，就说数列$\{x_n\}$是无界的.

(2) 对于数列$\{x_n\}$，如果存在正数M，使得对一切x_n都满足不等式$x_n\leqslant M$(或$x_n\geqslant M$)，则称数列$\{x_n\}$是有上界的(或有下界的)；

(3) 数列$\{x_n\}$是有界数列的充要条件是数列$\{x_n\}$既有上界又有下界.

(4) 单调增加且有上界的数列是有界数列，单调减少且有下界的数列也是有界数列.

2.4 收敛数列的有界性

定理 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

2.5 收敛数列的保号性

定理 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，且$a>0$(或$a<0$)，那么存在正整数N，当$n>N$时，有$x_n>0$(或$x_n<0$).

推论 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\geqslant 0$(或$x_n\leqslant 0$)，且数列$\{x_n\}$收敛于a，那么$a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

2.6 子数列

定义 在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列. 数列$\{x_{2n}\}$称为数列$\{x_n\}$的偶子列，数列$\{x_{2n-1}\}$称为数列$\{x_n\}$的奇子列.

2.7 收敛数列与其子数列间的关系

定理 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是a.

2.8 数列极限存在的充要条件

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$.

2.9 (自变量趋于有限值时)函数的极限

定义 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A，对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$).

2.10 (自变量趋于无穷大时)函数的极限

定义 设$f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义. 如果存在常数A，对于任意给定的正数ε，总存在着正数X，使得当x满足不等式$|x|>X$时，对应的函数数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to$

$A(x \to \infty)$.

2.11　单侧极限

(1) 左极限

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$.

(2) 右极限

定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 x 满足不等式 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

(3)(自变量趋于正无穷大时) 函数的极限

定义　设 $f(x)$ 当 x 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $x > X$ 时，对应的函数数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to +\infty)$.

(4)(自变量趋于负无穷大时) 函数的极限

定义　设 $f(x)$ 当 x 小于某一负数时有定义. 如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在着正数 X，使得当 x 满足不等式 $x < -X$ 时，对应的函数数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则常数 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to -\infty)$.

2.12　单侧极限与双侧极限之间的关系

定理　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

2.13　函数极限的唯一性

定理　当 $x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 时，如果极限 $\lim f(x)$ 存在，那么这极限唯一.

2.14　函数极限的局部保号性

定理　(1) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，而且 $A > 0$(或 $A < 0$)，那么存在常数 $\delta > 0$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$). 当 $x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$ 时，也有类似的结论成立.

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，而且 $A > 0$(或 $A < 0$)，那么存在常数 $X > 0$，使得当 x 满足不等式 $|x| > X$ 时，有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$). 当 $x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 时，也有类似的结论成立.

2.15　函数极限的局部保号性的推广

定理　(1) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A(A \neq 0)$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有 $|f(x)| > \dfrac{1}{2}|A|$. 当 $x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$ 时，也有类似的结

论成立.

(2) 如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$). 特别地，如果在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$)，而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，那么 $A>0$(或 $A<0$). 当 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，也有类似的结论成立.

(3) 在自变量的同一变化过程，如果 $\varphi(x)\geqslant\phi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\Psi(x)=b$，那么 $a\geqslant b$.

2.16 函数极限的局部有界性

定理1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$A$ 为常数，那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该去心邻域内时，就存在正数 M，都有 $|f(x)|<M$ 成立，即 $f(x)$ 在该去心邻域内是局部有界的. 对 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$ 的情形也有类似的结论.

定理2 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$A$ 为常数，那么就存在正数 X 和 M，使得当 $|x|\geqslant X$ 时，都有 $|f(x)|<M$ 成立，即 $f(x)$ 在 $|x|\geqslant X$ 内是局部有界的. 对 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 的情形也有类似的结论.

【注】无穷大量在其定义域内一定是无界变量.

2.17 函数极限与数列极限的关系(海涅定理)

定理 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in N^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$. 当 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，也有类似的结论成立.

2.18 无穷小

定义 当 $x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，如果函数 $f(x)$ 的极限为零，即 $\lim f(x)=0$，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$ 等其他情形)时的无穷小. 特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

2.19 无穷大

定义 如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，就称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大. 记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$). 当 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，也有类似的无穷大的定义.

【注】当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$，按函数极限定义来说，极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说“函数的极限是无穷大”，并记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

2.20 函数极限与无穷大的定义对比列表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $\|f(x)\|>M$.	$\forall M>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，即有 $f(x)<-M$.