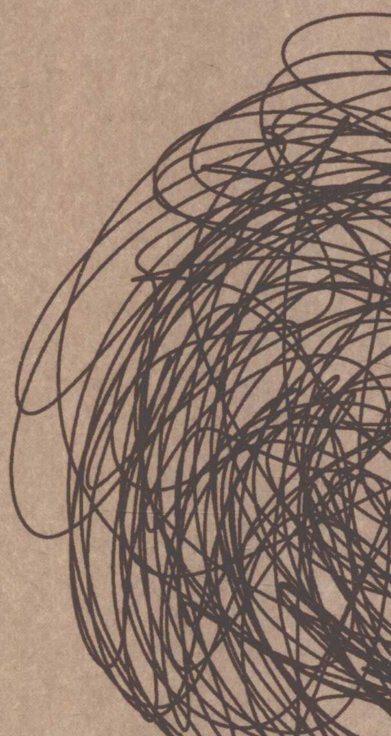
国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

复金兹堡-朗道方程系统的混沌与斑图控制

高继华　谢玲玲/著



$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1+\mathrm{i}\alpha)\nabla^2 A - (1+\mathrm{i}\beta)\left|A\right|^2 A$$

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

复金兹堡-朗道方程系统的混沌与斑图控制

高继华 谢玲玲 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍复金兹堡-朗道方程(CGLE)中混沌与斑图的控制方法，结合前沿课题展示混沌与斑图控制的潜在应用；通过理论分析结合数值模拟计算，探讨模型的动力学行为，介绍研究过程中的新发现。本书主要侧重于CGLE中混沌控制与斑图研究，系统地阐述非线性动力学的基本概念、发展历程、研究方法，为读者提供很好的入门参考；同时结合线性反馈、广义函数反馈等反馈方法，以及相压缩、耦合等非反馈方法，介绍作者具有创新性的研究成果，提供更为丰富的时空斑图研究内容。

本书可作为非线性科学等相关专业的本科生、研究生的参考用书，也可供动力系统控制方面的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复金兹堡-朗道方程系统的混沌与斑图控制/高继华，谢玲玲著. —北京：科学出版社，2018.5

ISBN 978-7-03-057073-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①高… ②谢… Ⅲ. ①金茨堡-朗道理论 Ⅳ. ①O511

中国版本图书馆CIP数据核字(2018) 第064443号

责任编辑：周 涵／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2018年5月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018年5月第一次印刷 印张：15
字数：303 000

定价：118.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

非线性科学作为系统科学的一个重要分支，研究不同系统中的非线性问题，以及非线性现象之间的共性，发展至今，经历了孤立波、混沌、分形以及斑图动力学。

混沌现象从发现到发展，目前已有相对完备的体系。随着计算机技术的普及，对混沌现象的研究在各个领域迅速增多，新的成果不断涌现，尤其在混沌控制与同步方面，出版的相关书籍比较多。但是对时空系统斑图控制研究的系列参考书籍，特别是关于复金兹堡–朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation，CGLE) 的专门著作较少。时空斑图比单个振子具有更高的空间自由度，以及时间、空间上的复杂性，动力学行为更加多样，在一定程度上描述了真实体系的物理或化学过程。

本书主要取材于作者课题组与相关领域研究者的合作研究成果，包括在国内外重要刊物上发表的论文以及硕士学位论文。作者对 CGLE 研究近二十年，此书是在多年科学研究工作基础上对混沌与斑图控制合作研究工作的一个总结，主要侧重于 CGLE 中混沌控制与斑图研究，参考国内外相关论文与专著补充了一些基本知识，如非线性动力学的基本概念、发展历程、研究方法，为读者提供了很好的入门参考。同时结合前沿课题展示混沌与斑图控制的潜在应用；通过理论分析结合数值模拟计算，探讨模型的动力学行为，介绍研究过程中具有创新性的研究成果。

对非线性科学感兴趣的人员可将本书作为入门学习资料。同时，本书是作者在混沌与斑图控制领域的研究工作总结，可作为相关专业的本科生、研究生的参考用书，也可供动力系统控制方面的科研人员参考。

本书内容共 8 章。第 1 章介绍混沌与斑图动力学基本概念及研究方法、复金兹堡–朗道方程的推导及其性质。第 2 章研究连续变量线性反馈控制时空混沌，分别介绍随机巡游反馈方法、优化巡游反馈方法、混合巡游反馈方法以及全局负反馈方法。第 3 章介绍广义函数反馈方法抑制混沌运动，包括二次函数反馈方法、速度反馈方法以及其他形式函数反馈方法。第 4 章通过外力控制实现斑图的控制，如局域变量块方法、局域周期信号方法诱导生成靶波；讨论螺旋波波头的竞争行为；分析边界控制对系统变化趋势的影响；利用脉冲阵列控制螺旋波。第 5 章介绍相空间压缩方法实现一维及二维时空混沌的控制。第 6 章研究耦合作用下的斑图动力学行为，从模螺旋波的新发现到产生机制及稳定性行为研究，推广至更广泛的相–模同步行为。第 7 章分析介质不均匀性对系统的影响，如非均匀介质中波的竞争规律；从“能量”特征值的角度分析斑图动力学行为；利用局部参数不均匀性讨论系统频率的变化；研究双层系统中引入局域不均匀性产生周期性振荡的行为。第 8 章

为结束语。

在我们的课题研究过程中，得到许多专家同行的大力帮助与支持，在此表示衷心的感谢。同时，也感谢高加振、谢伟苗、王宇、张超、史文茂、汤艳丰和肖骐诸研究生在编写过程中的帮助。

由于本领域研究发展较快，作者的水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正。

高继华

2018 年 1 月

目　　录

第 1 章　绪　　论

非线性科学是关注各个学科中非线性问题共性的一门跨领域基础性研究学科，研究非线性现象中的规律性与普适性，涉及物理化学、生命科学、社会科学等多个领域。非线性科学发展至今，经历了孤立波、混沌、分形、斑图以及复杂性等方面的研究。

在理论研究中，时空系统的动力学特性通常采用反应扩散方程来建模描述。复金兹堡–朗道方程 (complex Ginzburg-Landau equation，CGLE) 是其中一个典型的振荡介质反应扩散系统。CGLE 是一个非线性偏微分方程，描述了非线性动力系统在霍普夫分岔点附近的一些普遍性质，系统参数简单且包含极为丰富的时空斑图模式，在力学、物理学以及其他领域中用来描述非线性波动和相变现象的重要物理模型，如化学反应的湍流、流体系统的不稳定性、超导中的涡旋问题等，具有丰富的物理背景。国内外的研究小组借助此模型在研究时空混沌与斑图控制方面，已取得一些重要研究结果，将在后续对应的章节中介绍。本书基于非线性动力学，以 CGLE 为时空系统模型，探讨时空混沌、螺旋波等斑图的动力学行为与控制问题。

本章从非线性科学基础知识与基础理论出发，简单介绍非线性科学研究的内容，着重介绍混沌与斑图的发展，包括数学模型及基本理论；以双变量系统为例介绍线性稳定性分析方法，这是非线性科学中常用的工具之一。本章还将详细介绍 CGLE 的由来与方程的主要性质。

1.1　非线性系统和复杂性问题

1.1.1　线性观的成功与非线性的复杂性

在系统科学中，对系统的定义是一些相互作用或相互联系的要素 (部件) 的集合，包含了自然系统与人造系统。根据系统与环境之间的相互作用情况，可分为封闭系统与开放系统。当系统中的状态变量随时间变化而变化时，这样的系统称为动力系统 (dynamical system)[1,2]。例如，草地上兔子的数量、水龙头的水滴速度、海岸线的长度、大气的运动、心脏的跳动、商品价格的涨落等。动力系统在某个时刻的状态 (性质或特征) 可以用一些状态变量 (state variables) 来表示，如运动物体的位置与速度、物种的数量。动力系统中变量的演化以及动力系统的变化趋势是我们

所感兴趣的内容。研究动力系统中变量随时间演化行为的学科我们称之为动力学。状态变量演化的规律可用连续或离散的微分方程来表示，这种方程称为动力学方程 (dynamical equation)。

按照系统中动力学演化与变量之间的关系，可分为线性系统与非线性系统。借助数学公式可更直观地了解，用线性方程描述的系统即线性系统，用非线性方程描述的系统称为非线性系统。图 1.1 中从线性函数到对线性的偏离，看似无规律的波动曲线，后者的非线性一目了然。

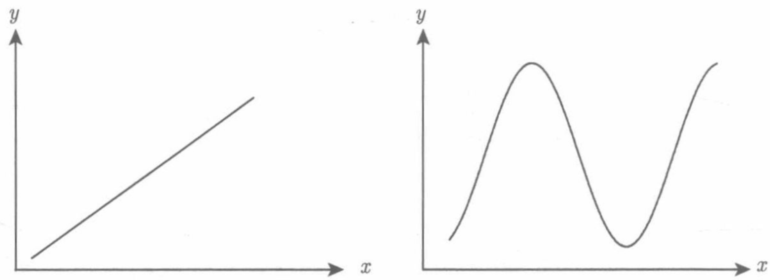


图 1.1　线性与非线性

从数学角度看，线性是简单的比例关系，线性方程的解满足线性叠加原理，任意两个解加在一起构成新的解。人们通过把问题分解为多个小问题，分别求解后加起来得到整个问题的解，如傅里叶变换方法与拉普拉斯方法。确定性系统 (deterministic system) 中后一个状态由前一个状态按照一定的规律演变而来，是可预测的，完全可知的。非线性动力学的解无法通过线性叠加构成。这也是为什么研究非线性系统比线性系统更困难。一方面，因为线性系统中变量之间的关系简单直接，系统随初始状态的变化是稳定且可预测的。线性方程具有可叠加的特性，可以将整体分解为几个部分处理，分别求解后再叠加起来，便得到整体的解。简单的叠加并不适用于非线性系统。另一方面，因为在数学里线性关系和线性方程都是可解的，而非线性方程往往很难得到精确解，需要通过近似求解。相比之下，非线性系统要比线性系统复杂许多。

几百年来，线性系统在科学研究上取得了巨大的成功，牛顿力学三定律、麦克斯韦电磁理论等奠定了现代科学发展的基础。经典力学中的基本规律都是确定性的，“只要给我初始条件，我就可以决定未来的一切”。近代科学的产生与发展实质上是以线性系统这样的简单对象进行研究。线性函数、线性方程等强有力的线性理论为线性系统的研究提供了数学方法与工具。

线性科学在理论与实践上取得了令人瞩目的非凡成果，但同时也造成了一种假象：认为只有线性现象才有普遍规律，非线性现象中不能建立普适方法与规律。在热力学的课堂上，大学老师跳过远离平衡态的耗散结构章节；在科学研究中，更

倾向于建立线性模型或者把非线性模型线性化处理。这种线性观掩盖了复杂的客观世界。

世界的本质是非线性的。现实生活中广泛存在着非线性现象，例如，股票市场的波动、地壳运动与地震、种群的演化、谣言的传播、风中的旗帜、台风的运动等。运动中的钟摆因空气阻力最终会静止，如果没有摩擦力，物体将会保持其运动速度一直运动下去。一些确定性系统中却出现了随机性行为，形成了复杂的结构和变化。复杂性可以体现在多个方面，如系统行为随时间或空间变化的复杂性，形成看似杂乱无章图案的空间变化复杂性。所以说线性关系是非线性关系的特殊情形，是对一部分简单非线性系统的理论近似。非线性是丰富多样化的现实世界中的主导。

物理学是动力系统研究的源头之一，17 世纪中叶，当时牛顿 (Newton) 发明了微分方程，发现了运动定律与万有引力定律，并将其结合起来解释开普勒的行星运动定律。牛顿还解决了太阳–地球运动的二体问题。之后几代科学家试图用牛顿二体问题的分析方法来处理三体问题，但都失败，对于三体问题，仍然找不到除能量之外的其他解析解。至今三体问题仍无法求出普遍适用的解析解。

到了 19 世纪末，庞加莱 (H. Poincaré) 做出了突破性的工作，他提出一种定性而非定量的角度。例如，我们不去关心行星在任何时刻的精确位置，而是问“太阳系是恒稳的呢，还是有些行星最终会往外飞向无穷远呢？”这样的问题。庞加莱创立了一套几何方法来分析这类天体运动问题，这种方法已经在现代动力学中得到广泛应用。庞加莱也是第一个窥见“混沌”存在的人，混沌意味着一个确定性系统会表现出对初始条件敏感的非周期行为，因而不可能进行长期的预测。动力系统的概念是由庞加莱在研究三体问题时提出的，其目的是考察轨道的长期行为。

但到 20 世纪前半时期，混沌仍然未引人注意，而非线性振子的动力学在物理学和工程中的应用则备受关注。例如，在收音机、雷达、锁相和激光等技术中，非线性振子发挥关键性作用；在理论方面，非线性振荡也促使了新数学技术的发展。同时，庞加莱的几何学方法被推广到新的应用领域。

20 世纪 50 年代高速计算机的发明，在动力学发展史上是一道分水岭。计算机使得人们能够以不同以往的方式进行试验，得到非线性系统更直觉的结果。例如，爱德华 • 洛伦兹 (Edward Lorenz) 在 1963 年发现了奇怪吸引子混沌行为，但这种混沌现象在当时并未引起注意。直到 20 世纪 70 年代混沌学才开始兴起。

1971 年吕埃勒 (D. Ruelle) 和塔肯斯 (F. Takens) 在混沌吸引子的基础上，提出了关于湍流的新理论。几年后，生物学家罗伯特 • 梅 (Robert May) 在群体生物学的迭代映射中发现了混沌的行为，并撰写了一篇极具影响力的评论，强调研究简单的非线性系统在教学上的重要性。而后物理学家米切尔 • 费根鲍姆 (Mitchell Jay Feigenbaum) 提出了一个极为重要的发现。他发现存在着一些特定的普遍定律支配着系统由规则转变为混沌的行为，也就是说，完全不同的系统会以同样的方式趋于

混沌。他的工作将混沌与相变联系起来，掀起了物理学家们对动力学的研究热潮。一批物理学家在流体、化学反应、电路、机械振荡和半导体等实验中尝试用混沌思想开展研究。

同时期，动力学领域中还有两方面的重要发展：一是法国数学家曼德勃罗 (Benoit B. Mandelbrot) 创立分形学并指明其可应用于很多学科中。1967 年曼德勃罗在美国《科学》(*Science*) 杂志上提出“英国的海岸线有多长？”这一有趣的问题，初步表述了分形的思想，在随后的文章与论著中进一步阐明分形的研究，奠定了分形学的基础 [3]。二是在新兴的生物数学领域，维夫瑞 (Arthur T. Winfree) 将动力学方法应用到生物周期运动中，尤其是生理节律与心脏系统。

1.1.2　自然界中的非线性现象

1. 化学振荡

别洛乌索夫–扎布亭斯基 (Belousov-Zhabotinski，BZ) 反应是化学反应扩散系统中最为经典的例子。

1951 年，苏联生物学家别洛乌索夫 (Belousov) 在研究溴酸盐与柠檬酸在铈离子催化下的化学反应过程中观察到了振荡现象，系统在黄色态与无色态之间有规律地周期振荡。这种现象在当时被认为与热力学第二定律相违背，因此别洛乌索夫的研究成果不被认可，论文投稿被拒。七年后他在一位朋友的帮助下才在一个医学会议论文集中发表了论文摘要。1960 年，另一位苏联生物学家扎布亭斯基 (Zhabotinski) 对别洛乌索夫的实验进行了改进，以丙二酸代替柠檬酸，用一系列严谨的实验结果说明溶液中颜色的振荡是由于黄色的四价铈离子浓度的变化，验证了化学反应振荡现象的客观存在。此后，为方便起见，将出现周期振荡现象的这一大类化学反应统称为化学振荡反应或别洛乌索夫–扎布亭斯基反应，简称 BZ 反应。1968 年，维夫瑞在一次会议上了解到 BZ 反应与化学振荡现象并将其介绍到西方，引起了化学及物理界的注意。普利高津 (I.Prigogine) 所在的比利时布鲁塞尔物理化学组建立了耗散结构理论，为振荡反应提供了理论基础。费尔德 (R. J. Field)、克劳斯 (E. Körös)、诺伊斯 (R. M. Noyes) 三位科学家经过多年的努力，研究 BZ 反应的机制，称为 FKN(Field，Körös and Noyes) 机制，并在此机制的基础上提出俄勒冈 (Oregonator) 数学模型，用来解释并描述 BZ 振荡反应的很多性质。该模型后续不断被简化及修正，能模拟 BZ 反应中的振荡与波行为。法国波尔多研究小组研发出一个全混釜开放反应器从实验上来观察研究 BZ 反应的化学波。从此，振荡反应赢得了重视，被系统性地研究并得到了迅速发展。随后人们发现了一大批可呈现化学振荡反应的系统。目前，已有至少 200 种不同的化学振荡系统被发现。

2. 贝纳德对流

1900 年，法国物理学家贝纳德 (E. Benard) 利用流体完成的一个著名实验，称为贝纳德对流 (图 1.2)。

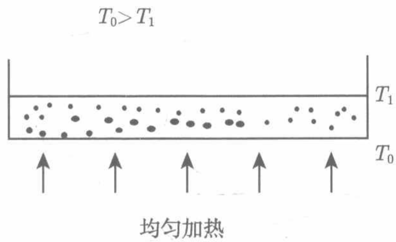


图 1.2 贝纳德对流示意图

取一层流体，上、下各与一片很大的恒温热源板接触，温度分别恒定在 T_1、T_0，要求板的宽度与长度远大于两板之间的距离。

实验中发现：

(1) 当两板温度相等，即 $T_1 = T_0$ 时，流体处于热力学平衡态。

(2) 当加热下板，使得 $T_1 < T_0$ 时，流体内分子间通过无规则碰撞传递能量，形成由下而上的温度梯度，热量不断地从下板通过流体传向上板，流体处于非平衡热传导态。如果两板温度差异不大，$\Delta T = T_0 - T_1 < \Delta T_c$ 在某一临界值内，经过一段时间后，整个流体宏观上仍保持静止。

(3) 当温差超过这一阈值，即 $\Delta T = T_0 - T_1 > \Delta T_c$ 时，流体内分子形成对流传热的形式，大量的分子被组织起来，协同参加了统一的运动，此时流体出现宏观花样，如图 1.3 侧面观察到的贝纳德对流。从上往下俯视观察，显示的是像蜂巢的正六边形格子，如图 1.4 所示。在正六边形格子中，中心液体往上流，边缘液体往下流。在对流

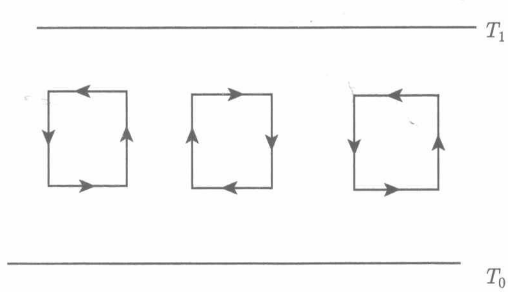


图 1.3 贝纳德对流侧面示意图

$\Delta T = T_0 - T_1 > \Delta T_c$ 时对流发生，对流方向为箭头所指方向

状态下，流体在空间各个方向的对称性被打破，系统内部自发产生了对称性破缺，使系统原本无序的热运动产生了如图 1.4 所示的规则图样，而且按照图 1.3 所示的箭头方向，通过宏观上的对流，将下板的能量传递给了上板。另外，贝纳德对流的图样依据流体厚度、宏观边界条件等方面的差异，也可以是其他形状，如正方形。

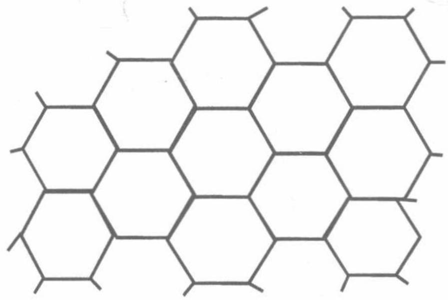


图 1.4　贝纳德对流俯视示意图

1.1.3　非线性科学研究的国内外发展

非线性科学是研究复杂现象共性问题的新学科。混沌、分形与孤立子是非线性科学发展较早的几个领域。混沌将越分越细的科学与技术横向联系起来，因而在科学中占据重要位置，被认为是相对论、量子力学之后的又一次科学革命。20 世纪 40 年代，以一般系统论、控制论、信息论为代表；60 年代，耗散结构、协同学、突变理论等自组织理论先后诞生；70 年代，确定性系统中混沌现象的广泛研究激发了人们对复杂性问题的探索。国际上，非线性科学研究中心或研究机构在各学术团体、大学、实验室、技术公司里接踵而建。

我国非线性科学的研究起步稍晚，在国家的支持下，经过“攀登计划”、“八五”、“九五”和 973 计划，研究水平有了很大的发展。国内前期的非线性科学研究曾一直笼统地称为系统科学。以科学家钱学森为代表的研究队伍便是其中一个学派，该学派侧重于系统工程的应用。

1983 年，郝柏林发表《分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其他 —— 关于确定论系统总的内在随机性》长篇综述，将非线性科学的基本内容与方法介绍到中国，起了很大的启蒙作用，推动了国内非线性科学事业的发展。

1991 年，关于复杂性科学第一次研讨会在中国科学院召开，促进了国内非线性科学研究的深入发展。《世界科学》期刊对非线性科学进行大力宣传、普及以及推广。中国科学院理论物理研究所常年举办非线性问题学术讨论会，介绍优秀的非线性专著以及国际上相关领域的发展，加强学术交流。

1992 年，国家“攀登计划”把非线性科学列入其中。

在“八五”计划期间把“非线性科学”作为国家十项重大课题之一，定下 15 个课题。

“非线性科学中的若干前沿问题”是国家 973 计划项目之一。

1.1.4 动力系统理论基本概念介绍

动力系统理论研究的是系统状态变量随时间演变的变化规律，起源于 19 世纪末对常微分方程的研究，代表著作有法国数学家庞加莱《微分方程定义的积分曲线》系列论文，李雅普诺夫 (Lyapunov)《运动稳定性通论》，美国数学家伯克霍夫 (George David Birkhoff)《动力系统》等。

动力系统的分类：从物理角度考虑系统的演化行为可分为保守系统 (相空间体积不变) 与耗散系统 (相空间体积收缩)。从数学形式的不同分为连续动力系统与离散动力系统。按相空间维数可分为有限维动力系统与无穷维动力系统。

为了后续方便理解，简单介绍非线性动力学中常用的几个概念：相空间、分岔、李雅普诺夫指数、非线性动力系统模型。

1. 相空间

相空间 (phase space) 是一个假想的空间，由动力系统中的变量组成。系统某一时刻的状态在相空间中可用一个点来表示，如图 1.5 所示，以变量 x_1，x_2 为坐标轴构造这样一个空间，$(x_1(0), x_2(0))$ 是系统初始状态，随时间变化到下一个状态 $(x_1(t), x_2(t))$，在相空间中成一条曲线，这个曲线称为变量的轨迹 (trajectory)，轨迹可理解为状态的时间序列。这些轨迹曲线与初始条件相关。邻近的初始条件轨迹的集合构成流 (flow)，表示系统的运动趋势。

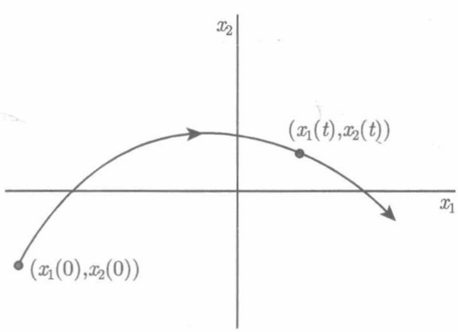


图 1.5 相空间轨迹

接下来通过一个简单的例子来介绍不动点与稳定性。考虑简单的一维动力系统

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x^2 - 1$$

借助几何方法与流体中的向量场来展开讨论。想象有一个粒子，以一定的速度沿着 x 轴方向流动，如图 1.6 所示，x 是它的位置坐标，$\partial x/\partial t$ 则表示粒子的运动速度，x^2-1 代表在 x 轴的向量场 (或流场)，是粒子在 x 位置时的运动速度。当 $x=\pm 1$，$x^2-1=0$ 时，即 $\partial x/\partial t=0$，所以 $x=\pm 1$ 是两个不动点。当粒子的位置在 $-1<x<1$ 时，粒子向左运动，即 $\partial x/\partial t<0$；当 $x>1$ 或 $x<-1$ 时，粒子向右运动，$\partial x/\partial t>0$。从流体力学看，当 $\partial x/\partial t>0$ 时流体向右流动，$\partial x/\partial t<0$ 时流体向左流动，$\partial x/\partial t=0$ 时静止，在 $\partial x/\partial t=0$ 的点就称为不动点 (fixed points) 或平衡态 (equilibrium)。$x=-1$ 是稳定不动点 (stable fixed point，不随时间变化的状态)，也称为吸引子 (attractor)，因为附近的流体都汇集到这里，当系统状态发生偏离时自动地回到原来的位置；$x=1$ 是不稳定的不动点，附近的流体从这里流出，像一个源头，当系统状态发生偏离时，会自动地从这里离开。

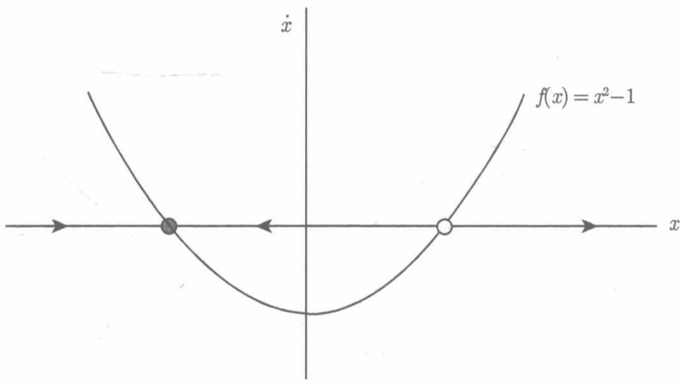


图 1.6　方程的向量场

2. 分岔

分岔 (bifurcation)，也称分歧或分支，指动力系统中参数值跨越临界值 (即分岔点) 所导致系统稳定状态定性变化的现象，如图 1.7(a) 所示。在非线性系统中，分岔是一个普遍现象。分岔的出现通常意味着系统的解是结构不稳定的。结构稳定性是指系统自身参数发生微小变化时，系统的解不会发生本质变化。除了结构稳定性，系统的另一种稳定性是状态稳定性，也称李雅普诺夫稳定性，将在后续章节中详细介绍。

霍普夫分岔 (Hopf bifurcation) 是分岔现象中一种典型的动态分岔，如图 1.7(b) 所示，参数 μ 在超过分岔点 μ_c 后系统失稳，由稳定解突变为周期振荡的极限环。