国家自然科学基金（61405137）资助
优秀青年学术带头人计划资助

若干非线性模型光孤子解析理论

郭睿　著

Optical Soliton Analytical Theory for Some Nonlinear Models

China University of Mining and Technology Press

中国矿业大学出版社

61405137)资助
山西省高等学校优秀青年学术带头人计划资助

若干非线性模型光孤子解析理论

郭 睿 著

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书主要研究非线性光纤光学领域中的若干非线性模型，包括约化 Maxwell-Bloch 类模型、广义形式的非线性 Schrödinger-Maxwell-Bloch 类模型、广义非线性 Schrödinger 类模型以及 AB 模型。从分析研究模型的可积性质，构建模型求解的解析算法以及推导模型的孤立子解、呼吸子解并讨论其传输性质等三方面展开阐述。

本书可以作为应用数学、计算物理、光信息等相关研究专业研究生、高年级本科生以及相关领域的研究人员和工程技术人员选用。

图书在版编目(CIP)数据

若干非线性模型光孤子解析理论 / 郭睿著. —徐州：中国矿业大学出版社，2018.11

ISBN 978-7-5646-4195-5

Ⅰ. ①若… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①非线性—线性模型—光孤子—解析理论 Ⅳ. ①TN781

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 239082 号

书　　名 若干非线性模型光孤子解析理论
著　　者 郭　睿
责任编辑 杨　洋
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　**印张** 9.75　**字数** 240 千字
版次印次 2018 年 11 月第 1 版　2018 年 11 月第 1 次印刷
定　　价 36.00 元
（图书出现印装质量问题，本社负责调换）

前　言

非线性科学是研究世界上非线性现象的一门新兴交叉学科。由于现实世界中大部分现象与模型都是非线性的，因此非线性科学越来越引起了人们的研究兴趣。孤子理论作为非线性科学的一个重要分支，近年来得到了人们的广泛重视，学者们在该理论方面也取得了很多研究成果。孤子理论的发展是与非线性模型密不可分的，而对于非线性模型的求解往往又是比较复杂和困难的。

本书针对若干有较强物理意义的非线性模型，从分析模型的可积性质，构建模型解析求解算法，推导模型孤子解以及分析孤子的传输特性等方面进行详细的介绍。本书研究的主要模型包括：光纤通信中描述超短脉冲传输特性的约化 Maxwell-Bloch 类模型，光纤通信中描述掺饵光纤中脉冲传输特性的非线性 Schrödinger-Maxwell-Bloch 类模型及其高维形式，含复杂非线性项和高阶色散项的非线性 Schrödinger 模型及其耦合、向量与离散形式，流体力学中描述边界稳定波包双层介质的常系数以及变系数 AB 模型，采用的方法主要是解析方法，包括高次 Darboux 变换、Painlevé 分析、Lax 可积分析等。本书研究的非线性模型在光纤通信、流体力学等领域中有着很重要的物理意义和比较广泛的实用价值。作者希望本书中所介绍的非线性模型解析求解算法和对孤子传输特性的分析结果能够给光纤通信、流体力学以及非线性物理等领域的研究带来有益的帮助。

本书的出版得到了国家自然科学基金(61405137)以及山西省高等学校优秀青年学术带头人计划的资助。感谢我的硕士生宋江艳、周润和贾榕榕在书稿排版及语句校对等方面做的大量工作。由于作者水平有限，书中难免存在不足和论述不当之处，恳请广大读者提出宝贵意见和批评指正。

作者
2018 年 6 月于太原

目　　录

第1章 绪 论

1.1 非线性科学与孤子概述

非线性科学是新兴的学科，它是研究世界上非线性现象的一门交叉学科[1-4]。在自然科学和工程实践中，大部分现象都不是线性的，很多问题都不能用线性的方法来研究和解决，这就使得对非线性科学的研究显得非常重要。实际上，任何一门科学，无论是自然科学，还是社会科学，都有着它自己的非线性现象和问题，对这些现象和问题的研究促使众多的非线性学科分支的形成[5-7]。非线性科学并不是这些众多的非线性学科分支的简单叠加与综合，它是研究各种具体的非线性现象中共性规律的一门综合性学科。随着对非线性科学研究的深入，目前孤立波、混沌和分形构成了非线性科学的三个主要部分[3,4,7]。

孤立波现象最早在1834年就被观察到了[8,9]，当时，英国造船工程师、科学家J. S. Russell注意到了一种奇特的水波现象，当一条在狭窄的水渠中快速行驶的船突然停止时，水渠中船两侧的水并没有停止运动，而是聚集在船头，剧烈翻腾，从而形成了一个庞大的、外形分明的、光滑孤立的类似于山峰的一个峰状水包。而且，这个峰状水包以非常快的速度仍然继续沿着水渠向前行驶，他还注意到这个峰状水包在行驶过程中保持着形状和速度不发生变化。后来，人们把这种向前平移的在水面上保持形状和速度不变的孤立水峰称为孤立波[8]。孤立波的发现将人们对流体力学中水波的研究带入了一个崭新的领域，在J. S. Russell发现孤立波现象之后的几十年，关于孤立波现象的研究取得了一系列的成果[9-13]。1895年，荷兰的Korteweg教授和他的弟子de Vries在研究浅水波运动时，推导出了著名的KdV方程[14]：

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1-1-1}$$

Korteweg和de Vries对方程(1-1-1)进行了细致的研究，并求得了该方程的解，他们发现方程(1-1-1)的解正是一个形状不变的脉冲状的孤立波，这与Russell观察到的现象完全一致，这也就第一次在理论上证实了孤立波的存在[14]。到了20世纪50年代，物理学家Fermi、Pasta和Ulam做了著名的FPU实验[15]，他们利用非线性弹簧连接了64个质点，从而形成了一条非线性振动弦，虽然FPU实验并没有得到孤立波解，但是也将孤立波的研究拓展到了流体力学以外的领域。后来，Toda研究了FPU问题模式的非线性振动，并得到了孤立波解[15]，也就正确地解答了FPU问题，这是在KdV方程中发现孤立波解以后，在流体力学以外的领域首次发现的孤立波解，从而又引发了科学家们对孤立波现象的研究兴趣。1962年，科学家Perring和Skyrme深入研究了sine-Gordon模型[16]，他们对该模型进行了数值求解，研究结果发现，sine-Gordon模型存在孤立波解，而且两个孤立波在发生碰撞以后仍然保持着以前的波形，速度和振幅不变。1965年物理学家Zabusky和Kruskal对等离子

体中的孤立波进行了全面细致的研究[17]，他们发现在孤立波的非线性相互碰撞作用前后孤立波的波形不发生改变，这就类似于粒子碰撞的性质，于是 Kruskal 和 Zabusky 把具有这种碰撞性质的孤立波首次命名为孤子[17]。孤子概念的出现是孤子理论发展史上的一个重要的里程碑，之后的几十年，孤子理论发展迅速，并且渗透到许多的领域中，比如流体力学、非线性光纤通信、等离子体物理、流体物理、计算化学、生命科学以及海洋科学等[18-20]。目前，孤子理论已经成为一个比较完整的数学物理学科[21,22]。

1.2 经典孤子方程与孤子理论中的常用数学方法

在对孤子理论的研究过程中，人们发现，孤子理论的发展与非线性偏微分方程的研究是密不可分的[23]。自然科学和工程领域中的众多的物理模型一般需要用非线性偏微分方程来描述，而很多的非线性偏微分方程存在着孤子解[23]。这样我们借助于对非线性偏微分方程的研究，也就可以得到现实世界中很多模型的孤子解，而且可以对这些模型的孤子解的非线性动力学机制进行分析。从这个角度上来讲，孤子理论属于数学学科的一个分支，它与微分方程的研究密切相关，另外研究孤子理论还需要用到很多数学工具和数学算法。近几十年以来，孤子理论蓬勃发展，人们的研究热情也很高，并且取得了很多有意义的成果[24-28]。

1.2.1 经典孤子方程

现实世界中很多非线性模型存在孤子解，我们往往把存在孤子解的方程称为孤子方程，比较经典的孤子方程如下。

(1) KdV 方程，它的一般形式为[14,29]：

$$u_t \pm 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1-2-1}$$

式中，u_t 为时间导数项；$6uu_x$ 为非线性项；u_{xxx} 为色散项。

该方程可用来描述弱非线性、弱色散系统，包括浅水波、等离子体中离子声波，弹性杆中色散纵向波的传播，磁流体动力学波，固体物质中的热脉冲传播等。一些相当广泛的弱非线性相互作用下的波动方程组，它们都可以归结为 KdV 方程。KdV 方程是第一个能够满意地解释 Russell 所观察到的孤波现象的波动方程，不仅如此，KdV 方程闻名于世的另一个原因是随着对 KdV 方程研究的发展，促使了反散射方法的出现，从而开拓了代数、几何学的新的研究方向，使孤子理论成为应用数学和非线性科学的重要分支之一。

KdV 方程有以下形式的行波解

$$u = -\frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}\,(x - ct - x_0)\right] \tag{1-2-2}$$

该行波解的特点是：① 当 $x \to \pm\infty$ 时，$u(x,t) \to 0$，所以孤立波是局域分布的，即分布在空间有限范围内；② 波是单相传播的，且波速为 c；③ 波的振幅 $c/2$ 与波速成正比，所以振幅高的孤立波传播速度更快。

(2) Burgers 方程，它的一般形式为[30]：

$$u_t + u_{xx} - 2uu_x = 0 \tag{1-2-3}$$

式中，u_t 为时间导数项；$2uu_x$ 为非线性项；u_{xx} 为耗散项。

该方程可以用来描述黏滞介质中的流体波和声波以及有限电导率介质中的磁流体波。

(3) KdV-Burgers 方程，即组合形式的 KdV 方程和 Burgers 方程，它的一般形式为[31]：

$$u_t+uu_x+\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}=0 \tag{1-2-4}$$

式中，α 为耗散项系数；β 为色散项系数。

该方程可以用来描述湍流等非线性领域中含气泡的液体流动现象，弹性管道中的液体流动现象，以及弹性杆中的非线性波传输现象。

(4) mKdV 方程，即修正 KdV 方程，它的一般形式为[32]：

$$u_t\pm 6u^2u_x+u_{xxx}=0 \tag{1-2-5}$$

它可以用来描述等离子体、浅水波运动等领域中一维小振幅状态下的非线性波传播现象。

(5) Gardner 方程，即组合形式的 KdV 方程和 mKdV 方程，它的一般形式为[33]：

$$u_t+\alpha uu_x+\beta u^2u_x+u_{xxx}=0 \tag{1-2-6}$$

式中，α，β 分别表示二次和三次非线性效应项系数。

该模型可以用来描述量子场论、流体力学、大气与海洋科学以及灰尘等离子体等领域的非线性现象。

(6) sine-Gordon 方程，它的一般形式为[12,22]：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\sin\varphi=0 \tag{1-2-7}$$

该模型可以用来描述超导体传输线中的约瑟夫逊效应，它有两种基本形式的解析解：

① 对应于摆的振动的等离子体波解：

$$\varphi=2\arcsin\left\{K\mathrm{sn}\left[\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{u^2-1}};K\right]\right\} \tag{1-2-8}$$

② 对应于摆的旋转运动的磁通量子波解：

$$\varphi=2\arcsin\left\{\pm\mathrm{cn}\left[\frac{\xi-\xi_0}{K\sqrt{u^2-1}};K\right]\right\} \tag{1-2-9}$$

式中，sn，cn 分别是模为 K 的雅可比椭圆正弦和余弦函数。

等离子体波解(1-2-8)表示在 $\varphi=0$ 处振动的行波。sine-Gordon 方程还可以用来描述受外场作用的一维晶格系统，在外力场势能的极小值附近，该方程有描述固体物理领域非线性现象的声子解：

$$\varphi_\mathrm{k}=A_\mathrm{k}\exp[i(\omega_\mathrm{k}t+kx)]+B_\mathrm{k}\exp[-i(\omega_\mathrm{k}t+kx)] \tag{1-2-10}$$

(7) 非线性薛定谔方程，它的一般形式为[27,28]：

$$iq_t-\mathrm{sgn}(\beta_2)\frac{1}{2}q_{xx}+|q|^2q=0 \tag{1-2-11}$$

它可以用来描述诸多非线性介质中一般小振幅或缓慢变化波包的演化。非线性薛定谔方程在很多非线性科学领域有着重要的应用，可以用来描述众多的非线性现象，比如流体力学领域深水波中的漩涡现象、等离子体中的离子声波现象、倾斜水槽中扭结孤波移动现象和双深水槽中孤波耦合现象、非线性光纤中单模光孤子传输现象等。

在非线性光纤中，当光脉冲在光纤中传输时，色散项使脉冲不断展宽，非线性项使脉冲不断压缩，当二者作用相互平衡时，可产生光孤子，描述这个系统的方程就是非线性薛定谔方程。在反常色散区域 $\mathrm{sgn}(\beta_2)=-1$，这时方程有亮孤子解：

$$\begin{cases} q(x,t)=\operatorname{sech}x\exp\dfrac{it}{2} \quad (x\to\pm\infty) \\ q(0,0)=1 \\ |q|\to 0 \end{cases} \tag{1-2-12}$$

在正常色散区域 $\operatorname{sgn}(\beta_2)=1$，这时方程有暗孤子解：

$$q(x,t)=q_0\tanh(q_0 x)\exp iq_0^2 t \tag{1-2-13}$$

式中，q_0 为确定脉冲幅度和宽度的参量。

近年来的研究表明，暗孤子具有一些优异的性质。比如，相比亮孤子，在相同的损耗光纤中，传输相同的距离暗孤子脉冲幅度衰减以及脉冲展宽更慢。另外，在相同的背景噪声中，暗孤子受影响也比较小。基于这些原因，很多学者认为暗孤子应用于光纤通信也许更为合适。

(8) 离散非线性薛定谔方程，它的一般形式为[34,35]：

$$iq_{nt}-(q_{n+1}-2q_n+q_{n-1})\pm|q_n|^2(q_{n+1}+q_{n-1})=0 \tag{1-2-14}$$

在非线性波导阵列中，同时考虑波导非线性效应和耦合作用时，光的传输可以用离散非线性薛定谔方程来描述，此时光的能量主要集中到一些波导格点，而且在传输过程中不会发生离散衍射。另外，在玻色—爱因斯坦凝聚、分子生物学以及元胞自动机等领域中，离散非线性薛定谔型方程都有着广泛深刻的物理背景和应用价值。

1.2.2 孤子理论中的常用数学方法

(1) Painlevé 分析方法

非线性系统的精确求解往往是很困难的，所以首先对其进行可积性分析。如果非线性系统不存在可移动的奇点(极点除外)，则称该系统具有 Painlevé 可积性。Painlevé 分析是检测一个非线性系统是否 Painlevé 可积的系统性方法[36]。Painlevé 分析有 ARS 和 WTC 两种算法步骤，其中 ARS 算法是 Albowitz、Ramazi 和 Segar 三位数学家在 1980 年提出的，是分析非线性常微分方程 Painlevé 可积性的主要算法；WTC 算法是数学家 Weiss、Tabor 和 Carnevale 在 ARS 算法步骤的基础上加以推广提出的针对非线性偏微分方程 Painlevé 可积性分析的主要算法[37]。下面重点介绍 ARS 算法步骤，主要包括主项分析、共振项分析和相容性分析三步[38]。首先假定：

① n 阶非线性常微分系统：

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}=G\left(x,f,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-1}f}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) \tag{1-2-15}$$

式中，有理函数 G 关于变量 x 解析。

② G 在它的包括对数支点在内的可移动代数支点的小邻域内的主要部分为：

$$f_j\sim\alpha_j(x-x_0)^{p_j},x\to x_0 \tag{1-2-16}$$

步骤一——主项分析

在任意 x_0 点，给出系统(1-2-15)以下形式的解：

$$f\sim\alpha(x-x_0)^p,\mathrm{Re}(p)<0 \tag{1-2-17}$$

将解(1-2-17)代入主部(1-2-16)，由同幂次相等，计算可得 p 和 α 的值，主项确定。

步骤二——共振项分析

对主项中 (p,α) 的每一组数值，寻找共振项即系数 α_j 任意的项 j。取

$$f \sim \alpha (x-x_0)^p + \beta (x-x_0)^{p+r}, r>0 \tag{1-2-18}$$

代入原方程,令 β 的一次项系数为零,计算可得:

$$Q(r)=0 \tag{1-2-19}$$

方程(1-2-19)的根即为非线性系统(1-2-15)的共振项。

步骤三——相容性分析

对主项中 (p,α) 的每一组数值,令方程(1-2-19)的最大正整数根为 r_s,记非线性系统(1-2-15)的解形式上为:

$$f \sim \alpha (x-x_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} \alpha_j (x-x_0)^{p+j} \tag{1-2-20}$$

将形式解(1-2-20)代入原非线性系统,并对每一个 j 取最低次幂为零,得:

$$Q(j)\alpha_j = R_j(x_0,\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1})=0 \tag{1-2-21}$$

由方程(1-2-21)可以计算出每一个 α_j 的值,从而可以分析出系统(1-2-15)在每一个共振点处是否相容。

需要指出的是,没有可移动代数支点的非线性系统可能存在本性奇点,所以 ARS 算法对存在本性奇点的非线性系统失效,因此该算法仅是非线性系统 Painlevé 可积的必要条件而非充分条件。

(2) Lax 可积分析方法

对于势函数只与时间变量 t 和一维空间变量 x 相关的非线性系统:

$$u_t = G(u,u_x,u_{xx},\cdots) \tag{1-2-22}$$

如果存在与之等价的线性方程组:

$$\boldsymbol{\Phi}_x = \boldsymbol{M\Phi} \tag{1-2-23a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t = \boldsymbol{N\Phi} \tag{1-2-23b}$$

式中,$\boldsymbol{\Phi}$ 是关于 x 和 t 的 n 维列向量;$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 是 $n\times n$ 矩阵,其元素中包含有谱参数 λ 及势函数 u,则称非线性系统(1-2-22)是 Lax 可积的[22,39]。

下面以 Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS)系统为例来阐述 Lax 可积分析方法。令矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} -i\lambda & q \\ r & i\lambda \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}$,即

$$\begin{cases} \varphi_{1x} = -i\lambda\varphi_1 + q\varphi_2 \\ \varphi_{2x} = r\varphi_1 + i\lambda\varphi_2 \end{cases} \tag{1-2-24}$$

$$\begin{cases} \varphi_{1t} = A\varphi_1 + B\varphi_2 \\ \varphi_{2t} = C\varphi_1 - A\varphi_2 \end{cases} \tag{1-2-25}$$

式中,A,B,C 是含有谱参数 λ 与势函数 q,r 及其各阶导数的函数。

由相容性条件 $\boldsymbol{\Phi}_{xt}=\boldsymbol{\Phi}_{tx}$,计算可得:

$$A_x = qC - rB \tag{1-2-26a}$$

$$q_t = B_x + 2i\lambda B + 2qA \tag{1-2-26b}$$

$$r_t = C_x - 2i\lambda C - 2rA \tag{1-2-26c}$$

假定 A,B,C 是谱参数 λ 的三次多项式,即

$$\begin{cases} A = \sum_{j=0}^{3} a_j \lambda^j \\ B = \sum_{j=0}^{3} b_j \lambda^j \\ C = \sum_{j=0}^{3} c_j \lambda^j \end{cases} \tag{1-2-27}$$

将式(1-2-27)代入式(1-2-26)计算并化简可得：

$$A = a_3^0 \lambda^3 + a_2^0 \lambda^2 + (\frac{a_3^0}{2} qr + a_1^0)\lambda - \frac{i}{4} a_3^0 (qr_x - rq_x) + \frac{a_2^0}{2} qr + a_0^0 \tag{1-2-28a}$$

$$B = ia_3^0 q\lambda^2 + (ia_2^0 q - \frac{a_3^0}{2} q_x)\lambda + \frac{i}{4} a_3^0 (2q^2 r - q_{xx}) - \frac{a_2^0}{2} q_x + ia_1^0 q \tag{1-2-28b}$$

$$C = ia_3^0 r\lambda^2 + (ia_2^0 r + \frac{a_3^0}{2} r_x)\lambda + \frac{i}{4} a_3^0 (2qr^2 - r_{xx}) + \frac{a_2^0}{2} r_x + ia_1^0 r \tag{1-2-28c}$$

由零曲率方程化简可得：

$$q_t = -\frac{1}{4} ia_3^0 (q_{xxx} - 6qrq_x) - \frac{1}{2} a_2^0 (q_{xx} - 2q^2 r) + ia_1^0 q_x + 2a_0^0 q \tag{1-2-29a}$$

$$r_t = -\frac{1}{4} ia_3^0 (r_{xxx} - 6qrr_x) - \frac{1}{2} a_2^0 (r_{xx} - 2qr^2) + ia_1^0 r_x - 2a_0^0 r \tag{1-2-29b}$$

适当选取参数值，从方程式(1-2-29)可以得到一系列经典孤子方程。

① KdV 方程

取 $a_0^0 = a_1^0 = a_2^0 = 0, a_3^0 = -4i, r = -1$，得到 KdV 方程：

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

② mKdV 方程

取 $a_0^0 = a_1^0 = a_2^0 = 0, a_3^0 = -4i, r = -q$，得到 mKdV 方程：

$$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0$$

③ 非线性薛定谔方程

取 $a_0^0 = a_1^0 = a_3^0 = 0, a_2^0 = -2i, r = \mp q^*$，得到非线性薛定谔方程：

$$iq_t + q_{xx} + 2q^2 q^* = 0$$

④ Burgers 方程

取 $a_0^0 = a_1^0 = a_3^0 = 0, a_2^0 = -2, u_x = qr = (q_x/q)_x$，得到 Burgers 方程：

$$u_t = 2uu_x - u_{xx}$$

⑤ 标准的 sine-Gordon 方程

如果 A,B,C 按照谱参数 λ 的负幂次展开，比如取 $A = \frac{a}{\lambda}, B = \frac{b}{\lambda}, C = \frac{c}{\lambda}$，其中

$$\begin{cases} a = \frac{i}{4}\cos u \\ b = c = \frac{i}{4}\sin u \\ q = -r = -\frac{u_x}{2} \end{cases}$$

则可得标准的 sine-Gordon 方程：

$$u_{xt} = \sin u$$

(3) Darboux 变换方法

Darboux 变换方法是 1882 年由科学家 Darboux 在研究 Sturm-Liouville 方程的特征值问题时发现的一种求解非线性偏微分方程的方法,这种方法需要方程是 Lax 可积的,即方程必须要具备 Lax 对[40,41]。Darboux 变换方法的主体思想是:利用方程的一组种子解,求得 Lax 对的一组特解,然后求得 Lax 对的一组新解并且得到了满足 Lax 对的一组新的势函数,新势函数与旧势函数之间的关系称为方程的 Darboux 变换。利用得到的新的势函数,我们可以再进行一次迭代,从而得到更新的势函数,这样迭代下去可以得到原方程的多孤子解。由于需要借助于方程的 Lax 对,所以 Darboux 变换方法只能求解 Lax 可积的非线性偏微分方程。考虑量子力学中的定态薛定谔方程:

$$\varphi_{xx} + u\varphi = \lambda\varphi \tag{1-2-30}$$

Darboux 发现了一个很有趣的规律,方程式(1-2-30)在以下变换下:

$$\begin{cases} \varphi' = \varphi_x - \dfrac{f_x(x,\lambda_1)}{f(x,\lambda_1)}\varphi \\ u' = u + 2\left[\ln f(x,\lambda_1)\right]_{xx} \end{cases} \tag{1-2-31}$$

结构是不变的,即 φ' 和 u' 也满足方程式(1-2-30),这就是达布定理。

下面以修正 KdV 方程(mKdV)为例,介绍如何构建 Darboux 变换的方法。mKdV 方程

$$q_t + 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \tag{1-2-32}$$

与线性方程组

$$\boldsymbol{\Phi}_x = U\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \lambda & q \\ -q & -\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi} \tag{1-2-33a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_t = V\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} -4\lambda^3 - 2q^2\lambda & -4q\lambda^2 - 2q_x\lambda - 2q^3 - q_{xx} \\ 4q\lambda^2 - 2q_x\lambda + 2q^3 + q_{xx} & 4\lambda^3 + 2q^2\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi} \tag{1-2-33b}$$

等价。下面寻找合适的变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得 $\boldsymbol{\Phi}' = \boldsymbol{T\Phi}$ 中新的波函数 $\boldsymbol{\Phi}'$ 满足:

$$\boldsymbol{\Phi}'_x = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{\Phi}' = \begin{pmatrix} \lambda & q' \\ -q' & -\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}' \tag{1-2-34a}$$

$$\boldsymbol{\Phi}'_t = \boldsymbol{V}'\boldsymbol{\Phi}' = \begin{pmatrix} -4\lambda^3 - 2q'^2\lambda & -4q'\lambda^2 - 2q'_x\lambda - 2q'^3 - q'_{xx} \\ 4q'\lambda^2 - 2q'_x\lambda + 2q'^3 + q'_{xx} & 4\lambda^3 + 2q'^2\lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}' \tag{1-2-34b}$$

选取合适的谱参数,使得:

$$\boldsymbol{T\Phi} = (\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{S})\boldsymbol{\Phi} = 0 \tag{1-2-35}$$

计算可得:

$$\boldsymbol{S} = -\frac{\lambda_1}{1+\sigma^2}\begin{pmatrix} 1-\sigma^2 & 2\sigma \\ 2\sigma & \sigma^2 - 1 \end{pmatrix} \tag{1-2-36}$$

这里,

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{\Phi}_{22}(x,t,\lambda_1) + \mu_1\boldsymbol{\Phi}_{21}(x,t,\lambda_1)}{\boldsymbol{\Phi}_{12}(x,t,\lambda_1) + \mu_1\boldsymbol{\Phi}_{11}(x,t,\lambda_1)} \tag{1-2-37}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Phi}(x,t,\lambda)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{11}(x,t,\lambda) & \boldsymbol{\Phi}_{12}(x,t,\lambda)\\ \boldsymbol{\Phi}_{21}(x,t,\lambda) & \boldsymbol{\Phi}_{22}(x,t,\lambda)\end{pmatrix} \tag{1-2-38}$$

是线性方程组(1-2-33)的非退化基本矩阵解。

由方程(1-2-35)计算可得 mKdV 方程的新旧势函数之间的变换关系为：

$$q' = q + \frac{4\lambda_1\sigma}{1+\sigma^2} \tag{1-2-39}$$

关系式(1-2-39)就是 mKdV 方程的一次 Darboux 变换，利用此算法可以得到方程的单孤子解，比如选取初始解为平凡解 $q=0$，则计算线性矩阵基本解为：

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{pmatrix}e^{\lambda x-4\lambda^3 t} & 0\\ 0 & e^{-\lambda x+4\lambda^3 t}\end{pmatrix} \tag{1-2-40}$$

对任意的特征值 λ_1 及 $\mu_1=e^{2\alpha_1}$，计算可得 $\sigma=e^{-2\lambda_1 x+8\lambda_1^3 t-2\alpha_1}$，从而有：

$$T=\lambda I-\frac{\lambda_1}{\cosh v_1}\begin{pmatrix}\sinh v_1 & 1\\ 1 & -\sinh v_1\end{pmatrix} \tag{1-2-41}$$

其中 $v_1 = 2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1$，计算可得 mKdV 方程的单孤子解为：

$$q' = 2\lambda_1 \operatorname{sech}(2\lambda_1 x - 8\lambda_1^3 t + 2\alpha_1) \tag{1-2-42}$$

(4) 行波法

行波法是求解非线性偏微分方程的直接而有效的方法之一[5]。它的主体思想是约化偏微分方程为常微分方程，从而可以利用常微分方程的求解方法通过变形公式求得偏微分方程的解[5]。对于给定的非线性偏微分方程

$$F(x,t,u)=0 \tag{1-2-43}$$

求方程行波解的基本步骤是，将方程(1-2-43)的解记为：

$$\begin{cases}u=u(\xi)\\ \xi=x-ct\end{cases} \tag{1-2-44}$$

式中，c 为表示波速的常数。

将方程式(1-2-44)代回方程式(1-2-43)中，经过简单计算，就可以把方程式(1-2-43)约化为常微分方程，进而可以求得偏微分方程式(1-2-43)的行波解。

(5) 双线性导数方法

1971 年，日本科学家 Hirota 教授首先提出了求解非线性偏微分方程的双线性导数法，也称为广田直接法[42]。这种方法的主体思路：首先定义双线性导数

$$D_x^m D_t^m u(x,t)v(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x'}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t'}\right)^n u(x,t)v(x,t)\Big|_{x'=x,t'=t} \tag{1-2-45}$$

在双线性导数的定义下，对势函数引入适当的变换，将非线性偏微分方程约化为双线性方程。然后，再把双线性方程中的变量按小参数展开成幂级数形式，并选取合适的条件进行常数项截断，从而可以求得原来的非线性偏微分方程的单孤子以及多孤子解析解。由于求解过程中不需要原方程的 Lax 对，所以双线性导数法适用范围比较广泛，可以用来求解一大批非线性偏微分方程。

(6) 反散射方法

反散射方法可以说是最早发现的求解非线性偏微分方程的解法之一[37,43]。1967 年，科学家 Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura 在研究 KdV 方程初值问题时，发现 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1-2-46}$$

和静态的 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \tag{1-2-47}$$

之间存在可以相互转化的变换关系，即通过变换

$$u = \frac{1}{\psi}\psi_{xx} + \lambda \tag{1-2-48}$$

方程式(1-2-46)可以转化为方程式(1-2-47)，这个变换称为 GGKM 变换[43]。基于这种变换，Gardner、Greene、Kruskal 和 Miura 等创建了求解非线性偏微分方程的反散射方法，它的主体思想：利用散射数据，确定静态 Schrödinger 方程中势函数 u，这个过程一般是通过求解 Gelfand-Levitan-Marchenko(GLM)积分来实现的[37]。

除了上述几种主要方法以外，在求解非线性偏微分方程时目前还有对称约化方法、李群法以及朗斯基技巧与普法夫技巧等[44]。

1.3 本书的理论背景及内容安排

随着科学技术的发展，特别是 21 世纪以来，各个学科的融合现象越来越多，这也促使了众多交叉学科的形成，非线性科学是目前引起人们极大研究兴趣的一门贯穿于很多自然科学和社会科学领域的交叉学科[3,4,18,19]。由于光纤通信、应用物理以及流体力学等领域中很多实际问题都可以转化为非线性模型，这就使得对非线性模型的研究显得比较重要。可积性质与孤子解是研究非线性模型的两个主要方面。可积性质包括模型的 Painlevé 可积性质、Lax 可积性质以及无穷守恒律等方面[21,22]，对这些性质的研究可以使我们更加清楚地分析非线性模型。

本书将重点研究光纤通信以及流体力学等领域中若干的非线性模型，从可积性、孤子解以及孤子的相互作用机制等方面进行详细的研究。研究的模型主要包括：光纤通信中描述超短脉冲传播的约化 Maxwell-Bloch 类模型[45-53]，光纤通信中描述掺饵光纤中脉冲传播的非线性 Schrödinger-Maxwell-Bloch 类模型及其高维形式[54-63]，含复杂非线性项和高阶色散项的非线性薛定谔模型及其耦合、向量与离散形式[64-69]，流体力学中描述边界稳定波包双层介质的常系数以及变系数一类非线性模型[70-73]，采用的方法主要是解析方法，包括高次 Darboux 变换、Painlevé 分析、Lax 可积分析等。

第2章 约化 Maxwell-Bloch 类模型光孤子解析理论

电磁波在介质中传播时，如果波的持续时间小于张弛时间，那么这种波称为超短脉冲[26,74]。超短脉冲经常可以在掺饵光纤、超晶格以及激光液晶中发现[26,28,75,76]。一般情况下，产生超短脉冲有两种可能：一是利用光纤光栅压缩机压缩原始脉冲；二是直接从激光系统中得到超短脉冲[26,28,77,78]。近些年来关于如何产生超短脉冲的研究很多，这也就使得研究超短脉冲在不同介质中的传播特性成为一个很重要的内容[26,28]。

在非线性光纤通信中，光纤中光场的传输一般用 Maxwell 方程组来描述[26-28]，该方程组在国际单位制中可以写成以下形式[26-28,79]：

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\tag{2-0-1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\tag{2-0-1b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\tag{2-0-1c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\tag{2-0-1d}$$

式中，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 分别表示电场强度矢量和磁感应强度矢量；$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$ 分别表示电位移矢量和磁场强度矢量；$\boldsymbol{J}$ 表示电流密度矢量；ρ 表示电荷密度；$\boldsymbol{J}$，ρ 是电磁场的源[26-28,79]。

在光纤通信和光纤转换介质中，能量衰减总是存在的，因此光纤损耗不可避免，光波也往往被损耗[45-46,80-81]。为了使以孤波为基础的通信系统更具有竞争力和经济价值，这些衰减必须要处理[45-46,82]，光纤放大器就是来避免这样的损耗的，比如掺饵放大器[45-46]。自感应透明现象适用于二能级介质中光波的无损耗传播，并且在以孤波为基础的通信系统中起到了最小化能量衰减的作用[45-46]。当两层介质的能量差恰好与光波信号的频率一致时，相干吸收将会发生，介质对于特殊的波长也会变为光学透明的[45-46]。在掺杂了二能级介质的光纤中，超短脉冲的传播通常由约化 Maxwell-Bloch（MB）类模型来描述，本章主要针对标准形式的约化 MB 模型和广义形式的约化 MB 模型及其非齐次情形三类非线性模型展开研究。

2.1 标准形式的约化 MB 模型

在掺杂了二能级介质的光纤中，超短脉冲的传播通常由以下模型来描述[45-51]：

$$E_x+\frac{1}{c}E_t=-\left(\frac{2\pi n_A d}{c}\right)\langle r_{1u}\rangle\tag{2-1-1a}$$

$$\begin{cases} r_{1t} = -\omega_a r_2 \\ r_{2t} = \omega_a r_1 + \dfrac{2d}{\hbar} E r_3 \\ r_{3t} = -\dfrac{2d}{\hbar} E r_2 \end{cases} \tag{2-1-1b}$$

该模型来源于系统(2-0-1)，x 和 t 表示归一化的距离和时间；E 是电场的数值；r_1 和 r_2 分别表示二能级介质极点的实部和虚部；r_3 表示两个能级的密度差；d 表示双极子算子的矩阵元素在电场方向上的投影；n_A 是共振介质的中心；c 表示真空中的光速；$\hbar$ 是普朗克常数；ω_a 表示共振频率；$\langle\rangle$ 表示以频率为特征的所有介质的总和[45-51]。

通过变换[45]：

$$\begin{cases} \tau = t - x/c \\ \zeta = (4\pi n_A d^2 / c\hbar) x \\ q = (2d/\hbar) E \end{cases} \tag{2-1-2}$$

系统(2-1-1)可以转化为标准形式的约化 MB 模型：

$$\begin{cases} q_\zeta = \omega_a r_2 \\ r_{1\tau} = -\omega_a r_2 \\ r_{2\tau} = \omega_a r_1 + q r_3 \\ r_{3\tau} = -q r_2 \end{cases} \tag{2-1-3}$$

其中 r_1，r_2 和 r_3 满足[68]：

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1 \tag{2-1-4}$$

关于模型(2-1-3)的研究，文献[45]得到了该系统的 Lax 对；文献[47]和[49]分别利用反散射方法和双线性方法得到了该系统的某些孤子解；文献[50]分析了该系统的 Painlevé 性质并且构建了系统的 Bäcklund 变换。基于以上研究，本小节主要从以下几方面研究模型(2-1-3)：① 利用符号计算构建该系统的无穷守恒律；② 构建该系统的 N 次 Darboux 变换解析算法；③ 利用构建的求解算法，推得系统的单孤子与多孤子解析解；④ 利用图形模拟，分析孤子的动力学传输机制。

2.1.1　Lax 对与无穷守恒律

文献[45,47]给出了模型(2-1-3)的 Lax 对：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_\tau = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Psi} = (\lambda\boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{U}_0)\boldsymbol{\Psi} \\ \boldsymbol{\Psi}_\zeta = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\Psi} = \left(\dfrac{\lambda\omega_a}{4\lambda^2 - \omega_a^2}\boldsymbol{V}_1 + \dfrac{\omega_a^2}{4\lambda^2 - \omega_a^2}\boldsymbol{V}_0\right)\boldsymbol{\Psi} \end{cases} \tag{2-1-5}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}_3$，$\boldsymbol{U}_0$，$\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_0$ 都是 2×2 的矩阵，而且

$$\boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{U}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{i}{2}q \\ -\dfrac{i}{2}q & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = \begin{pmatrix} ir_3 & r_2 \\ r_2 & -ir_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{r}_1 \\ -\dfrac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{r}_1 & 0 \end{pmatrix}$$

这里，$\boldsymbol{\Psi}=(\psi_1,\psi_2)^{\mathrm{T}}$ 表示特征向量，上标 T 表示向量的转置；λ 是与 ζ 和 τ 无关的谱参数。根据相容性条件 $\psi_{\zeta\tau}=\psi_{\tau\zeta}$，可以得到零曲率方程：

$$\boldsymbol{U}_\zeta-\boldsymbol{V}_\tau+\boldsymbol{UV}-\boldsymbol{VU}=0 \tag{2-1-6}$$

利用符号计算[72-74]，发现方程(2-1-6)与模型(2-1-3)等价。

无穷守恒律是非线性发展方程完全可积的一个具体体现[21,37,83-93]。根据文献[21,37]的方法，得到了模型式(2-1-3)的无穷守恒律。令 $\Gamma=\psi_2/\psi_1$，$w=iq\Gamma/2$，Lax 对式(2-1-5)可以被改写为以下的 Riccati 方程的形式：

$$w_\tau-\frac{q_\tau}{q}w-\frac{1}{4}q^2-2i\lambda w+w^2=0 \tag{2-1-7}$$

然后，把 w 展开为幂级数的形式：

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n/\lambda^n \tag{2-1-8}$$

并且把这个幂级数形式代入方程式(2-1-7)，取 λ 的同次幂可以得到以下的递推关系式：

$$\begin{cases}w_1=\dfrac{i}{8}q^2\\[2ex] w_{n+1}=-\dfrac{i}{2}w_{n\tau}+\dfrac{iq_\tau}{2q}w_n-\dfrac{i}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}w_jw_{n-j}\quad(w_0=0,n=1,2,\cdots)\end{cases} \tag{2-1-9}$$

把这个递推式再代入相容性条件 $(\psi_{1\zeta}/\psi_1)_\tau=(\psi_{1\tau}/\psi_1)_\zeta$ 中就得到了模型式(2-1-3)的无穷多个守恒律：

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial\zeta}=\frac{\partial J_i}{\partial\tau}\quad(i=1,2,3,\cdots) \tag{2-1-10}$$

式中，ρ_i，$J_i(i=1,2,\cdots)$ 分别表示守恒密度和哈密顿流。

对于 $i=1,2,3$ 的三种情况，式(2-1-10)分别表示能量、动量和哈密顿守恒量[21,37]：

$$\begin{cases}\rho_1=\dfrac{i}{2}q^2\\[2ex] J_1=i\omega_ar_3\end{cases} \tag{2-1-11a}$$

$$\begin{cases}\rho_2=\dfrac{1}{4}qq_\tau\\[2ex] J_2=\dfrac{\omega_a}{4}qr_2\end{cases} \tag{2-1-11b}$$

$$\begin{cases}\rho_3=-\dfrac{i}{8}\omega_a^2q^2+\dfrac{i}{32}q^4-\dfrac{i}{8}qq_{\tau\tau}\\[2ex] J_3=\dfrac{i}{8}\omega_a^2qr_1-\dfrac{i}{8}\omega_ar_2q_\tau\end{cases} \tag{2-1-11c}$$

2.1.2 N 次 Darboux 变换

在 Lax 对(2-1-5)的基础之上，本节将构建模型(2-1-3)的 N 次 Darboux 变换[40,41,96-98]。令变换为：

$$\boldsymbol{\Psi}'=\boldsymbol{T\Psi} \tag{2-1-12}$$

其中，$\boldsymbol{T}$ 是一个待定的 2×2 矩阵，而且我们要求 $\boldsymbol{\Psi}'$ 满足：