



普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数

LINEAR
ALGEBRA

高兴慧 主编



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数

高兴慧 主编



西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书根据高等院校理工类专业线性代数课程的教学大纲编写而成,内容设计简明,结构体系完整,注重数学概念的实际背景,强调数学的思想和方法.全书共分五章:行列式、矩阵、线性方程组、矩阵特征值与特征向量以及二次型.每节后配有习题,书末附有习题答案.

本书可作为普通高等院校(少课时)、成人教育学院、民办院校等的本科专业以及具有较高要求的高职高专院校相关专业的线性代数教材,也可作为有关教师和科技工作者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/高兴慧主编. —西安:西安电子科技大学出版社,2018.9

ISBN 978-7-5606-5106-4

I. ① 线… II. ① 高… III. ① 线性代数—高等学校—教材 IV. ① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 228793 号

策划编辑 刘百川 成 毅

责任编辑 文瑞英 雷鸿俊

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com

电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西利达印务有限责任公司

版 次 2018年9月第1版 2018年9月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 8

字 数 184千字

印 数 1~3000册

定 价 19.00元

ISBN 978-7-5606-5106-4/O

XDUP 5408001-1

* * * 如有印装问题可调换 * * *

■ 前 言

线性代数是理工类专业的重要基础课程. 随着我国高等教育的迅速发展, 线性代数的教学时数不断减少, 为了适应新形势下的高等教育, 我们经过大量的调研与论证, 总结多年的教学经验, 对线性代数教学内容进行了优化组合, 调整了知识结构, 编写了本书, 希望使学生较为系统地掌握线性代数的知识与技能.

与同类教材相比, 本书在章节结构上进行了适度的调整, 比如将“克莱姆规则”这一节内容从“行列式”这一章调整到了“线性方程组”这一章中. 这样的调整使学生更容易理解从特殊到一般的解决问题的方法, 同时将解线性方程组的各种方法放到同一章中, 加以类比, 使学生更容易系统、全面地掌握求解线性方程组的方法.

本书的特点是: 加强基础知识、基础理论和基本方法的教学, 同时适当地开拓知识面. 本书的教学目的是: 丰富学生的知识与提高学生的能力, 因此配置的习题大多数是为了巩固知识和训练基本方法, 也有一些习题是为训练学生解题技巧与钻研数学的能力.

本书共 5 章. 第 1 章主要介绍行列式的定义、性质及计算方法; 第 2 章主要介绍矩阵的运算、矩阵的初等变换、初等矩阵、可逆矩阵、分块矩阵以及矩阵的秩; 第 3 章主要介绍线性方程组的求解方法, 包括克莱姆规则和行初等变换法、向量的线性相关性、极大线性无关组、向量空间及线性方程组解的结构; 第 4 章主要介绍矩阵的特征值与特征向量、相似矩阵与矩阵可对角化的条件以及实对称矩阵的对角化; 第 5 章主要介绍化实二次型为标准形的方法以及正定二次型的判定等问题.

本书的编写与出版得到了延安大学的领导和教材科的大力支持, 在此一并表示诚挚的感谢. 限于编者水平, 书中难免存在不足之处, 恳请各位读者批评指正.

编 者

2018 年 7 月

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 排列	1
1.2 n 阶行列式	2
1.3 行列式的性质	6
1.4 行列式按行(列)展开	13
第 2 章 矩阵	20
2.1 矩阵的概念及运算	20
2.2 矩阵的初等变换与初等矩阵	27
2.3 可逆矩阵	31
2.4 分块矩阵	37
2.5 矩阵的秩	41
第 3 章 线性方程组	45
3.1 克莱姆规则	45
3.2 消元法	49
3.3 n 维向量及其线性运算	57
3.4 向量的线性相关性	59
3.5 向量组的极大线性无关组	63
3.6 向量空间	67
3.7 齐次线性方程组解的结构	71
3.8 非齐次线性方程组解的结构	76
第 4 章 矩阵的特征值与特征向量	80
4.1 向量的内积	80
4.2 矩阵的特征值与特征向量	85
4.3 相似矩阵与矩阵的对角化	89

4.4 实对称矩阵的对角化	95
第 5 章 二次型	100
5.1 二次型及其矩阵	100
5.2 化二次型为标准形	103
5.3 正定二次型	107
习题答案	110
参考文献	121

第1章 行列式

解方程是代数中一个基本的、重要的问题. 在中学代数中, 我们解过一元、二元、三元甚至四元一次方程组. 一般地, 我们把多元一次方程组叫做线性方程组.

在这一章里, 我们着重研究在讨论线性方程组时要用到的一个有力工具——行列式.

1.1 排列

下面我们利用排列来给出行列式的定义, 在此之前先对排列这个概念作一些讨论.

一、排列与反序

定义 1 由 n 个数码 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序组, 称为一个 n 级排列 (简称排列).

例如, 123 和 312 都是 3 级排列, 而 13452 是 5 级排列.

n 个数码的不同排列共有 $n!$ 个.

定义 2 在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 如果某一个较大数码排在某一个较小数码的前面, 则称这两个数码构成一个反序. 一个 n 级排列中反序的总数, 称为这个排列的反序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$.

具有自然顺序的排列, 称为自然排列, 例如 1234 为自然排列.

排列的反序数的计算方法如下:

在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 中, 先找 1, 数一数排在 1 前面的数码, 设为 m_1 个, 那么与 1 构成的反序的个数为 m_1 ; 然后划去 1, 再数一数排在 2 前面的数码, 设为 m_2 个, 那么与 2 构成的反序的个数为 m_2 ; 再划去 2, 计算排在 3 前面的数码. 如此继续下去, 最后设在 n 前面有 m_n 个数码 (显然 $m_n = 0$), 那么

$$\tau(i_1 i_2 \dots i_n) = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

例 1 计算排列 351426 的反序数.

解 $m_1 = 2; m_2 = 3; m_3 = 0; m_4 = 1; m_5 = 0; m_6 = 0$. 所以

$$\tau(351426) = m_1 + m_2 + \dots + m_6 = 6$$

定义 3 反序数为奇数的排列, 称为奇排列; 反序数为偶数的排列, 称为偶排列.

例 2 讨论排列 $12 \dots n$ 和 $n(n-1) \dots 321$ 的奇偶性.

解 $\tau(12 \dots n) = 0$, 所以 $12 \dots n$ 为偶排列, 而

$$\tau(n(n-1) \dots 321) = (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以当 $n = 4k, 4k+1$ 时, $n(n-1) \dots 321$ 为偶排列; 当 $n = 4k+2, 4k+3$ 时, $n(n-1) \dots 321$ 为奇排列.

二、对换

定义 4 在一个排列中, 将任意两个数码交换, 其余数码保持不动, 这样的变换叫做一个对换. 将相邻两个数码对换, 称为相邻对换.

定理 1 每一个对换都改变排列的奇偶性.

证明 略.

定理 2 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数, 偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

证明 由定理 1 可知, 经过奇数次对换后改变排列的奇偶性, 经过偶数次对换后不改变排列的奇偶性, 而自然排列是偶排列, 所以结论成立.

定理 3 $n (n \geq 2)$ 个数码组成的 n 级排列中, 奇偶排列各占一半.

证明 n 个数码的不同排列共有 $n!$ 个, 设其中奇排列有 p 个, 偶排列有 q 个. 对这 p 个奇排列施行同一个对换, 由定理 1 可得 p 个偶排列, 所以 $p \leq q$. 同理, 对 q 个偶排列施行同一个对换可得 q 个奇排列, 所以 $q \leq p$. 从而 $p = q = \frac{n!}{2}$.

习题 1.1

1. 计算下列排列的反序数:

(1) 523146879;

(2) 3712456;

(3) $2k, 1, 2k-1, 2, \dots, k+1, k$.

2. 写出 3 个数码的一切排列.

1.2 n 阶行列式

下面先给出二阶和三阶行列式的定义, 得出它们的结构规律, 然后利用这些规律来定义 n 阶行列式.

一、二阶行列式

定义 1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示的代数和为 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 称为二阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫做行标, 表明该元素位于第 i 行; 第二个下标 j 叫做列标, 表明该元素位于第 j 列.

如图 1-1 所示, 把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线, 把 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线, 于是二阶行列式的值等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积, 此运算规律称为对角线法则.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1

例 1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

二、三阶行列式

定义 2 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示的代数数和为 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$

$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$, 称为三阶行列式, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

其运算规律也可用“对角线法则”来表述, 如图 1-2 所示.

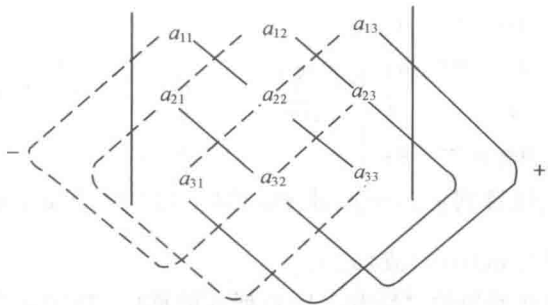


图 1-2

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 - 3 \times 1 \times 2 - 1 \times 2 \times 3 - 2 \times 3 \times 1 = 18$$

三、n 阶行列式

观察三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

得出其结构规律如下:

(1) 三阶行列式共是 $6(=3!)$ 项的代数和.

(2) 每一项都是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(3) 其中三项带正号, 三项带负号, 每项的符号是: 每项元素的行标都按自然顺序排列, 这时, 如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号.

所以三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1 j_2 j_3$ 求和.

定义 3 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j=1, 2, \dots, n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 它是 $n!$ 项的代数和, 这些项是所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{nj_n}$, 项 $a_{1j_1} a_{1j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 为对所有三级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和. 称 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 为行列式的一般项, 行列式有时简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$.

n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广. 特别是当 $n=1$ 时, 一阶行列式就是数 a .

例 3 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 一般项为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 考查不为零的项. a_{nj_n} 取自第 n 行, 但只有 $a_{nn} \neq 0$, 故只能取 $j_n = n$; $a_{n-1j_{n-1}}$ 取自第 $n-1$ 行, 只有 $a_{n-1, n-1}$ 及 $a_{n-1, n}$ 不为零, 因为 a_{nn} 取自第 n 列, 故 $a_{n-1j_{n-1}}$ 不能取自第 n 列, 从而 $j_{n-1} = n-1$; 同理可得 $j_{n-2} = n-2, \dots, j_1 = 1$. 所以不为零的项只有

$$(-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似地, 可得以下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

四、 n 阶行列式的等价定义

在 n 阶行列式的定义中, 为了决定每一项的正负号, 我们把 n 个元素的行标按自然顺序排起来. 事实上, 由于数的乘法满足交换律, 因而这 n 个元素的次序是可以任意写的. 这时, 也可以直接确定该项的符号.

定理 1 从 n 阶行列式的第 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 行和 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 列中取出元素作乘积

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

这里 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 和 $j_1, j_2, \dots, j_n$ 都是 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数码的排列. 因此这一项在行列式中的符号是 $(-1)^{s+t}$, $s = \tau(i_1, i_2, \dots, i_n)$, $t = \tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

证明 略.

由上可见, 在决定行列式的每一项的符号时, 行标与列标的地位是对称的, 因而为了决定每一项的符号, 我们同样可以把每一项的列标按自然顺序排起来, 于是 n 阶行列式又可定义为

$$\text{定义 4} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

例 4 在五阶行列式中, 下列两项各应带什么符号?

(1) $a_{32} a_{41} a_{13} a_{25} a_{54}$;

(2) $a_{43} a_{31} a_{14} a_{25} a_{52}$.

解 (1) $(-1)^{\tau(34125) + \tau(21354)} = +1$. 所以 $a_{32} a_{41} a_{13} a_{25} a_{54}$ 前边应带正号.

(2) $(-1)^{\tau(43125) + \tau(31452)} = -1$. 所以 $a_{43} a_{31} a_{14} a_{25} a_{52}$ 前边应带负号.

习题 1.2

1. 计算下列二阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列三阶行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

3. 用行列式的定义计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

4. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{12}a_{24}$ 的项.

5. 在六阶行列式中, 下列两项各应带什么符号?

$$(1) a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65};$$

$$(2) a_{21}a_{13}a_{32}a_{55}a_{64}a_{46}.$$

1.3 行列式的性质

我们发现, 当行列式的阶数较高且含有的零元素较少时, 利用行列式的定义计算行列式, 显然运算量太大. 为此, 我们需要讨论行列式的一些性质, 进而利用这些性质简化高阶行列式的运算.

一、行列式的性质

将行列式 D 的行变为列后得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T 或 D' , 即若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等, 即 $D = D'$.

证明 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则令

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

显然 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 于是

$$\begin{aligned} D' &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\ &= D \end{aligned}$$

性质 1 表明, 在行列式中行与列的地位是对称的, 因此凡是有关行的性质, 对列也同样成立. 所以对于以下性质, 我们只对行加以证明.

性质 2 交换一个行列式的两行(或两列), 行列式将改变符号.

证明 略.

交换 i, j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$.

性质 3 如果一个行列式有两行(列)完全相同, 那么这个行列式等于零.

证明 设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i \neq j$)相同. 由性质 2, 交换这两行后, 行列式改变了符号, 所以新的行列式 $D_1 = -D$. 但另一方面, 交换相同的两行, 行列式并没有改变, 即 $D_1 = D$. 由 $D = -D$ 或 $2D = 0$. 所以 $D = 0$.

性质 4 把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一个数 k , 等于以数 k 乘这个行列式. 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

证明 显然

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD \end{aligned}$$

第 i 行(列)乘以 k , 记为 $r_i \times k (c_i \times k)$.

性质 5 一个行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外边.

性质 6 如果一个行列式中有一行(列)的元素全部是零, 那么这个行列式等于零.

性质 7 如果一个行列式有两行(列)的对应元素成比例, 那么这个行列式等于零.

证明 设行列式 D 的第 i 行与第 j 行($i \neq j$)的对应元素成比例, 那么这两行的对应元素只差一个因子 k , 即

$$a_{i1} = ka_{j1}, a_{i2} = ka_{j2}, \cdots, a_{in} = ka_{jn}$$

因此

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 8 如果行列式的某一行(列)的元素都是两数之和, 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{证明 } D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
 &= D_1 + D_2
 \end{aligned}$$

此结果可推广到有限个数和的情形.

性质 9 把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上, 行列式不变.

$$\text{证明 设 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ 把 } D \text{ 的第 } j \text{ 行元素乘以同一数 } k \text{ 后加到第 } i \text{ 行}$$

($i \neq j$) 的对应元素上, 可得

$$\begin{aligned}
 \overline{D} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D
 \end{aligned}$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上, 记为 $r_i + kr_j$; 以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上, 记为 $c_i + kc_j$.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 2+a_1 & 3+a_1 \\ 1+a_2 & 2+a_2 & 3+a_2 \\ 1+a_3 & 2+a_3 & 3+a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 2 \\ 1+a_2 & 1 & 2 \\ 1+a_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

二、化行列式为三角形行列式

在计算行列式时,常用行列式的性质 2、性质 5 以及性质 9,把行列式化为上(下)三角形来计算.

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D & \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_4 + 5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 + 4r_2 \\ r_4 - 8r_2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 + \frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40 \end{aligned}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解 注意到 D 的每一列的元素和都是 $n-1$,把第二、第三、……第 n 行都加到第一行上,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ \vdots \\ r_n - r_1}} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n-1} (n-1) \end{aligned}$$

例4 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

解 根据行列式的特点, 可将第一行加到第二行, 然后第二行加到第三行, 以此类推, 目的是将对角线以下的 -1 变成 0 , 可得

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3+r_2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix} \\ &= \cdots = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

例5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解 从第四行开始, 后一行减前一行.