国家新闻出版改革发展项目库入库项目
普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

高等数学

（下）

GAODENG SHUXUE

主 编 张雪霞

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

国家新闻出版改革发展项目库入库项目

普通高等教育信息科技类通识基础创新型规划教材

高等数学

（下）

主　编　张雪霞

副主编　何小娟　王欣洁

王银珠　朱　烽

赵文彬

"北邮智信"APP 使用说明

请使用微信扫一扫

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，结合编者多年的教学经验及教改成果编写而成的.本书分上、下两册.主要内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程.本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用.每章配有习题，书末附有习题参考答案，便于学生学习.

本书是基于"互联网+"的立体化创新型教材，借助APP平台，提供每章重点和难点的微课、疑难解析，课程纲要等内容，方便教与学.本书可作为高等学校理工科各专业的高等数学教材，也可作为相关教师和工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下/张雪霞主编.--北京：北京邮电大学出版社，2018.8

ISBN 978-7-5635-5482-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第141893号

书　　名	高等数学(下)
主　　编	张雪霞
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京泽宇印刷有限公司
开　　本	787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张	16.5
字　　数	419千字
版　　次	2018年8月第1版　2018年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-5482-9　　定价：45.00元

前　　言

高等数学是高等学校理、工科专业的一门重要基础课程，它不仅为后继专业课程提供必不可少的数学基础知识及常用的数学方法，而且对培养学生的创新思维能力和解决实际问题的能力起着非常重要的作用.

本书是根据国家教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，参考近年来硕士研究生入学考试数学考试大纲和教学研究改革成果，结合我国中学教育课程改革的实际情况，由具有多年教学实践经验的教师编写而成. 本书立足于普通高等学校理、工科专业的需要，合理安排教学内容，对基本概念的叙述清晰准确；对定理的证明简明易懂，对难度较大的理论问题不过分强调论证的严密性，有的仅给出结论而不加证明；对例题的选配力求典型多样，层次分明，注意解题方法的总结；强调基本运算能力的培养和理论的实际应用；注重对学生的思维能力、自学能力和创新意识的培养. 加强了从实际问题的引入和从几何方面的分析，增加了不少应用案例，以提高学生的综合分析能力和创新能力.

本书由张雪霞教授主编，何小娟、王欣洁、王银珠、朱烽、赵文彬为副主编. 其中黄丽老师编写第一章，王银珠老师编写第二章，崔学英老师编写第三章，何小娟老师编写第四章，王欣洁老师编写第五章和上册附录，郑宇佳老师编写第六章；赵文彬老师编写第七章，张雪霞老师编写第八章，智红英老师编写第九章，申理精老师编写第十章，李银花老师编写第十一章，朱烽老师编写第十二章和下册附录；张雪霞老师负责全书的修改和统稿工作.

借本书出版之际，向关心和支持本书编写工作的太原科技大学数学系全体同仁表示衷心的感谢！由于编者水平所限，书中有不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

目 录

第八章　多元函数微分学

上册内容中我们研究的函数只有一个自变量，也称为一元函数. 但在自然科学与工程技术的实际问题中，往往涉及多个因素之间的关系，这在数学上就表示为一个变量依赖于多个变量的情形，即所谓的多元函数.

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数微分学及其应用. 从一元函数发展到二元函数，它们有着许多类似之处，但也有着重大的差别. 然而从二元函数发展到三元以及更多元函数，就没有什么本质的区别了. 因此本章的讨论过程中以二元函数为主. 同时，我们必须注意与一元函数微分学中有区别的地方，不要把概念、方法和记号与一元函数中的混淆.

第一节　多元函数的基本概念

一、平面点集　n 维空间

在讨论一元函数时，一些概念、理论和方法都是基于 $\mathbf{R}$ 中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念. 为了将一元函数微积分推广到多元的情形，首先将上述概念加以推广，将有关概念从 $\mathbf{R}$ 中情形推广到 $\mathbf{R}^2$ 中；然后引入 n 维空间，从而推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中.

由平面解析几何知道，在建立了坐标系的平面上，二元有序实数组 (x,y) 与平面上的点 P 有一一对应关系. 建立了坐标系的平面称为坐标平面，二元有序数组的全体，即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$ 就表示坐标平面.

(1) **邻域**：设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 为一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 **δ 邻域**（见图 8.1），记作 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

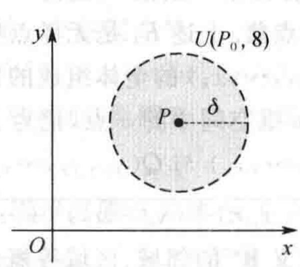

图 8.1

去掉中心点 P_0 后的邻域 $U(P_0,\delta)$ 称为 P_0 的**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

若无需指明半径 δ 的大小，用 $U(P_0)$ 和 $\mathring{U}(P_0)$ 分别表示点 P_0 的邻域和点 P_0 的去心邻域.

(2) **内点**：设 E 为平面内的一个点集，如果存在点 P 的某个邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称点 P 为 E 的**内点**(见图 8.2). 显然 E 的内点一定属于 E.

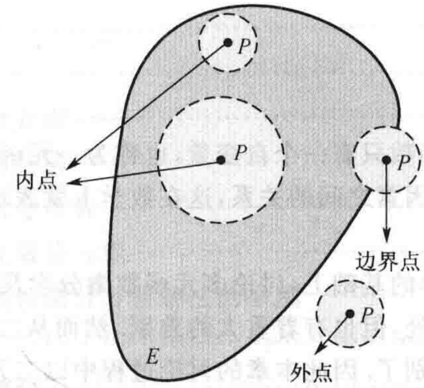

图 8.2

(3) **开集**：如果 E 中的点都是其内点，则称 E 为**开集**. 如点集

$$E_1=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$$

中每个点都是 E_1 的内点，故 E_1 为开集.

(4) **外点**：如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称点 P 为 E 的外点(见图 8.2). 显然 E 的外点一定不属于 E.

(5) **边界点**：如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的**边界点**(见图 8.2). E 的边界点的全体称为 E 的**边界**. 上述点集 E_1 的边界为圆周 $x^2+y^2=1$. 再如

$$E_2=\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$$

的边界为两圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=2$，由此说明了一个点集的边界点可以属于 E 也可以不属于 E.

(6) **区域**：如果点集 E 为开集，且对于 E 中任意两点，都可以用完全属于 E 内的折线连接起来，则称 E 为**开区域**，简称为**区域**. 区域连同它的边界称为**闭区域**，如点集 E_1 就是区域，而点集 $E_3=\{(x,y) \mid x+y\geqslant 0\}$ 与 $E_4=\{(x,y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 都是闭区域.

(7) **有界点集**：对于点集 E，若存在某一正数 k，使得 $E\subset U(O,k)$，其中 O 是坐标原点，则称 E 为**有界点集**；否则称 E 为**无界点集**. 上述 E_3 是无界点集，E_4 是有界点集.

(8) **n 维空间**：由 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体组成的集合称为 **n 维空间**，记作 $\mathbf{R}^n$，每个给定的 n 元数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一点，记为 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 数 x_i 称为该点的第 i 个坐标. $\mathbf{R}^n$ 中的两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2},$$

在此距离公式的基础上同样可以定义 $\mathbf{R}^n$ 的邻域、区域等概念.

二、多元函数的概念

在许多实际问题中，往往需要考虑多个自变量之间的关系，反映到数学上，就是一个变量

与另外多个变量间的相互依赖关系，这就是我们将要学习的多元函数.

例 1　长方形的面积 S、长 a 和宽 b 之间有关系式：

$$S = ab \quad (a > 0, b > 0).$$

a 和 b 是相互独立的变量，它们分别取值时，变量 S 有唯一确定的值与之对应.

例 2　具有一定质量的理想气体，其体积 V、压力 P 以及绝对温度 T 满足气态方程

$$V = \frac{RT}{P}, (R\text{ 是常数}).$$

当 P、T 分别取定为某一组值时，按照上面的关系变量 V 有唯一确定的值与之对应.

从这样一些问题即可以抽象出多元函数的概念.

定义 1　设 D 是二维空间 $\mathbf{R}^2$ 上的一个非空点集，如果对于 D 上的任一点 (x,y)，变量 z 按照一定法则 f，总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**. 记作

$$z = f(x,y) \quad (x,y) \in D,$$

其中点集 D 称为函数的**定义域**，变量 x,y 称为**自变量**，z 称为**因变量**. 因变量 z 的全体取值构成的集合称为函数的**值域**.

二元函数也可以记为 $z = z(x,y)$，$z = \varphi(x,y)$ 等等.

类似地，可以定义三元及三元以上的函数，二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

二元函数定义域的求法与一元函数类似，其定义域是使函数关系式有意义的所有点构成的集合. 如果自变量还代表具体问题中的量，则求定义域时应具体考虑实际情况. 二元函数的定义域是平面内的点集.

例 3　求函数 $z = \arcsin(x+y)$ 的定义域.

解　由主值区间的反正弦函数的定义域知 $|x+y| \leqslant 1$，即函数的定义域是平面点集

$$D = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x + y \leqslant 1\}.$$

例 4　求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \dfrac{x-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$ 的定义域.

解　要使该函数关系式有意义，必须满足

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 > 0, \\ 4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0, \end{cases}$$

因此函数的定义域为

$$D = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}.$$

二元函数的几何意义：设函数 $z = f(x,y)$ 的定义域为 D，对于 D 中任意取定的点 $P(x,y)$，对应的函数值为 $z = f(x,y)$，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，z 为竖坐标，就确定一点 $M(x,y,z)$. 当点 (x,y) 取遍 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z) \mid z = f(x,y), (x,y) \in D\},$$

称这个点集为二元函数 $z = f(x,y)$ 的图形（见图 8.3）. 二元函数的图形通常是一张曲面，定义域 D 是该曲面在 xOy 面上的投影.

如二元函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 表示以原点为球心，1 为半径的上半球面，它的定义域是 xOy 面上以原点为圆心的单位圆；又如函数 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 表示以坐标原点为顶点，半顶角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的上半圆锥面，它的定义域是整个 xOy 坐标面.

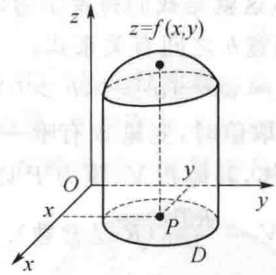

图 8.3

三、二元函数的极限与连续

当动点 $P(x,y)$ 无限趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 无限趋于常数 A，则称 A 是函数 $f(x,y)$ 当 (x,y) 趋于 (x_0,y_0) 时的极限. 与一元函数极限的“$\varepsilon-\delta$”定义类似，下面给出二元函数极限的定义.

定义 2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε，总存在 $\delta>0$，使得对于满足不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)$，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0, y\to y_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

我们把二元函数的极限称为**二重极限**. 二元函数极限的四则运算法则、夹逼定理等性质与一元函数类似. 求二元函数的极限通常比求一元函数的极限困难得多. 不过，对于有些二元函数的极限，可通过变量替换把它化为一元函数的极限，或利用夹逼定理等方法求出.

例 5 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 y\cos\dfrac{1}{x^2+y}$.

解 因 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 y=0$，而 $\cos\dfrac{1}{x^2+y}$ 为有界函数，故由无穷小的性质得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 y\cos\frac{1}{x^2+y}=0.$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \dfrac{\tan(xy)}{x}$.

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\tan(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\tan(xy)}{xy}\cdot y=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\tan(xy)}{xy}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} y=1\cdot 2=2.$$

注 在二元函数的极限定义中，动点 $P(x,y)$ 趋于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的方式有很多，可以沿直线，也可以沿折线，甚至可以沿一条稀奇古怪的曲线趋于 $P_0(x_0,y_0)$，这比一元函数只是从左右两侧沿直线趋近要复杂得多. 若 $f(x,y)$ 极限存在的话，应当是以任意方式动点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 都以同一常数 A 为极限. 换言之，若当 $P(x,y)$ 沿两条不同的路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，二元函数 $f(x,y)$ 趋于不同的数值，或当 $P(x,y)$ 沿某一路径趋于 $P_0(x_0,y_0)$

时，$f(x,y)$ 的极限不存在，则二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在.

例 7　考察函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，当 $x\to 0, y\to 0$ 时极限是否存在.

解　因为当 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随着 k 值的不同而不同，所以该极限不存在.

例 8　证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

证　因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot kx^2}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

它随着 k 值的不同而不同，所以该极限不存在.

注　例 7、例 8 给了我们一个提示：如果求一个二元函数极限，千万不能取特殊路径；相反要证明一个二元函数极限不存在，只要找出两条具有不同极限的特殊路径即可. 例 8 沿过原点的所有直线 $y=kx$ 趋于原点，函数向确定值无限接近，也不能保证极限存在.

四、多元函数的连续性

定义 3　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，如果满足

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**连续**.

若函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，则称 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

二元函数在一点连续包含三个条件：(1) $f(x_0,y_0)$ 存在；(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在；(3) 二者相等. 如果上述三个条件中有一个不成立，则称 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数的**间断点**.

二元函数的间断点可能是一个，也可能形成一条曲线. 如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处不连续，$(0,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的唯一间断点.

而函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x-y^2}$ 在抛物线 $L=\{(x,y)\mid x=y^2\}$ 上的点没有定义，因此，抛物线 $L=\{(x,y)\mid x=y^2\}$ 上的点都是 $f(x,y)$ 的间断点.

容易证明：**二元连续函数的和、差、积、商（分母不为零）也是连续的；二元连续函数的复合函数是连续函数.**

由常数和 x,y 的基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到，并且可用 x,y 的一个数学式表示的函数，称为**二元初等函数**. 与一元初等函数连续性类似，二元初等函数在其有定义的区域内是连续的. 同样可以给出 $n(n\geqslant 3)$ 元初等函数的定义，并且 $n(n\geqslant 3)$ 元初等函数在其有定义的区域内是连续的. 利用这个结论，当求某个二元初等函数在其定义域内一点的

极限时,采用代入法,只需要计算出函数在该点的函数值即可. 即若 $f(x,y)$ 是初等函数,$P_0(x_0,y_0)$ 是其定义区域内的一个点,则有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

例如

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\left[\ln(x+y)+\frac{y}{x-y}\right] = \ln(2+1)+\frac{1}{2-1} = 1+\ln 3,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\arctan\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\sqrt{0^2+1^2} = \frac{\pi}{4}.$$

例 9 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{xy+1-1}{xy\ (\sqrt{xy+1}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \dfrac{1}{2}.$

与闭区间上一元连续函数的性质类似,在有界闭区域上连续的二元函数具有如下性质,下面我们不作证明仅列出这些性质.

性质 1(最大值和最小值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数,在 D 上至少取得它的最小值和最大值各一次.

性质 2(有界性定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数在 D 上一定有界.

性质 3(介值定理) 在有界闭区域 D 上的二元连续函数,若在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上必取得介于这两个值之间的任何值至少一次.

习题 8.1

1. 已知函数 $f(u,v,w) = u^w + w^{u+v}$,试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

2. 设 $f(u,v) = u^2 e^v$, 求 $f\left(\sin x,\dfrac{x}{y}\right)$.

3. 设 $f(u) = e^{-u}\cos 2u$, 求 $f(x-2y)$.

4. 求下列函数的定义域,并在平面上画出定义域的简略图:

(1) $z = \sqrt{4x^2+y^2-1}$;　　(2) $z = \ln(x-3y+2)$;

(3) $z = \sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;　　(4) $z = \sqrt{x-\sqrt{y}}$.

5. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1/2}}\dfrac{\arcsin(x^3 y)}{2^x+y}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{3}{x^2+y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$.

6. 证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}}{x+y}$ 不存在.

7. 讨论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y) = \dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$;　　(2) $f(x,y) = xy\ln(x^2+y)$.

8. 下列函数在点(0,0)处是否连续?

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0,\\ 0, & xy\neq 0;\end{cases}$　　(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

第二节 偏 导 数

一、偏导数的定义及其计算法

一元函数的导数描述函数的变化率,它是函数增量与自变量增量比值的极限.在实际问题中,我们常需要研究一个受多种因素制约的变量,在其他因素固定不变的情况下,该变量只随一种因素变化的变化率问题,反映在数学上就是多元函数在其他变量固定不变时,函数随一个自变量变化的变化率问题.这就把多元函数的导数转化为一元函数的导数.为了区别一元函数的导数概念,我们可称多元函数的上述变化率为偏导数.本节以二元函数为例,引入偏导数的概念如下:

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义,当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时,若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 x 的偏导数**,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad\text{或}\quad f_x(x_0,y_0).$$

类似地,若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处**对 y 的偏导数**,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\quad\text{或}\quad f_y(x_0,y_0).$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在,则这个偏导数就是 x,y 的一个新的函数,我们称其为 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad\frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x\quad\text{或}\quad f_x(x,y);$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数可记为

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad\frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y\quad\text{或}\quad f_y(x,y),$$

即

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

与一元函数类似,多元函数在某点处的偏导数等于其偏导函数在此点处的函数值.在后面

不至于混淆的地方就把偏导函数简称为偏导数.

偏导数的概念可推广到二元以上的多元函数.例如，三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}.$$

类似地可定义 $f_y(x,y,z)$ 和 $f_z(x,y,z)$.

偏导数的求法:求多元函数对某个变量的偏导数时,只需将其他自变量视为常数,利用一元函数求导法对该变量求导即可.例如 $z=f(x,y)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$时,只需把函数中的 y 看作常数,而对 x 求导;求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$时,则需把函数中的 x 看作常数,而对 y 求导.

例 1 求 $z=\dfrac{x^2y}{x-y}$ 在点$(1,2)$处的偏导数.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy(x-y)-x^2y}{(x-y)^2}=\frac{x^2y-2xy^2}{(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2(x-y)-x^2y(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x^3}{(x-y)^2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{x^2y-2xy^2}{(x-y)^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=-6,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{x^3}{(x-y)^2}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=1.$$

例 2 求 $z=x^{\sqrt{y}}(x>0,x\neq 1)$ 的偏导数.

解 把 y 看成是常数,对 x 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}x^{\sqrt{y}-1},$$

把 x 看成是常数,对 y 求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{\sqrt{y}}\ln x\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{x^{\sqrt{y}}\ln x}{2\sqrt{y}}.$$

例 3 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解 把 y 和 z 看成是常数,对 x 求导,得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}.$$

利用函数关于自变量的对称性,得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}.$$

例 4 已知理想气体的状态方程 $PV=RT$(R 为常数),求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-1.$$

证 因为 $P=\dfrac{RT}{V}$, $\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$, $V=\dfrac{RT}{P}$, $\dfrac{\partial V}{\partial T}=-\dfrac{R}{P}$, $T=\dfrac{PV}{R}$, $\dfrac{\partial T}{\partial P}=\dfrac{V}{R}$,

所以
$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P}=-\frac{RT}{PV}=-1.$$

例 5 考察函数

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0,0)处的偏导数.

解
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同样有

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

即函数在点(0,0)处的两个偏导数都存在.

关于多元函数的偏导数,我们补充以下几点说明:

(1) 偏导数不能看作是分子与分母的商,与一元函数的导数可以看成微商是不一样的,偏导数的记号是一个整体.

(2) 与一元函数类似,对于分段函数在分段点的偏导数要利用偏导数的定义来求.

(3) 在一元函数微分学中,我们知道,如果函数在某点可导,则在该点必定连续.但对多元函数而言,即使函数的各个偏导数都存在,也不能保证函数在该点连续.本节的例5在点(0,0)处的两个偏导数都存在,但从上节的例7可知函数在该点不连续.

二、偏导数的几何意义

过曲面 $z=f(x,y)$ 上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 作平面 $y=y_0$,截此曲面为一曲线,此曲线在平面 $y=y_0$ 上的方程为 $z=f(x,y_0)$,则偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是该曲线在点 M_0 处的切线对 x 轴正向的斜率;同样,偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线对 y 轴正向的斜率,如图 8.4 所示.

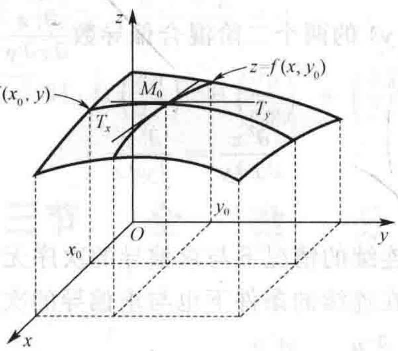

图 8.4

三、高阶偏导数

与一元函数类似,二元函数的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 仍是关于 x,y 的二元函数,若它们的偏导数存在,则称它们的偏导数为 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.按照对变量求导次序的不同,共有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}(x,y).$$

称二阶偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为**混合偏导数**.

类似地,可以定义更高阶的偏导数,如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}.$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例 6 求 $z=2xy^2-4x^2y^2+y$ 的二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=2y^2-8xy^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=4xy-8x^2y+1,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-8y^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=4y-16xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4y-16xy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4x-8x^2.$$

例 7 求 $z=\sin(xy^3)$ 的二阶偏导数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^3\cos(xy^3),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=3xy^2\cos(xy^3),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y^6\sin(xy^3),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy\cos(xy^3)-9x^2y^4\sin(xy^3),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2\cos(xy^3)-3xy^5\sin(xy^3)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

在以上两个例子中,有$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,这不是偶然的,实际上我们有下面的定理.

定理 若函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$,$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$在区域$D$内连续,则在该区域内必有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

证略.

注 二阶混合偏导数在连续的情况下与求偏导的次序无关,这给混合偏导数的计算带来了方便,而且高阶混合偏导数在连续的条件下也与求偏导的次序无关.

例 8 设 $u=x^2ze^y$,求$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$,$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=2xze^y,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2xze^y,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial z}=2xe^y;$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2ze^y,\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}=2e^y.$$

例 9 证明函数 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 满足拉普拉斯方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

证 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

由 x,y,z 的对称性,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

故
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

习题 8.2

1. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

2. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^2-2xy+y^3$；　(2) $z=x^{\sin y}$；　(3) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(4) $z=e^{ax}\sin by$；　(5) $u=x^{\frac{z}{y}}$；　(6) $z=(1+xy)^y$.

3. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$，$f_{zzx}(2,0,1)$.

4. 求下列函数的二阶偏导数：

(1) $z=\frac{x}{x^2+y^2}$；　(2) $z=y^x$；　(3) $z=\sqrt{xy}+xy^4$；

(4) $z=e^x\cos y$.

5. 设 $u=x^{y\sin z}$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

6. 设 $\frac{1}{u^2}=x^2+y^2+z^2$，求证：$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

7. 证明：当 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 时，有 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1$.

第三节　全　微　分

一、全微分的概念

在实际问题中，有时需要研究多元函数中各个自变量都取得增量时因变量所获得的增量．下面以二元函数为例进行讨论．

我们已经知道，二元函数对某个自变量的偏导数表示当其中一个自变量固定时，因变量对另一个自变量的变化率，根据一元函数微分学中增量与微分的关系，可得

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)\approx f_x(x,y)\Delta x,$$
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\approx f_y(x,y)\Delta y.$$

上面两式左端分别称为二元函数对 x 和对 y 的**偏增量**，而右端分别称为二元函数对 x 和对 y 的**偏微分**．这对二元函数的研究显然是不够的，我们需要进一步研究当 x 和 y 两个自变量都取得增量时，因变量所获得的增量，即所谓的全增量问题．

定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某邻域内有定义，$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$ 为该邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差 $f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ 为函数在点 $P(x,y)$ 对