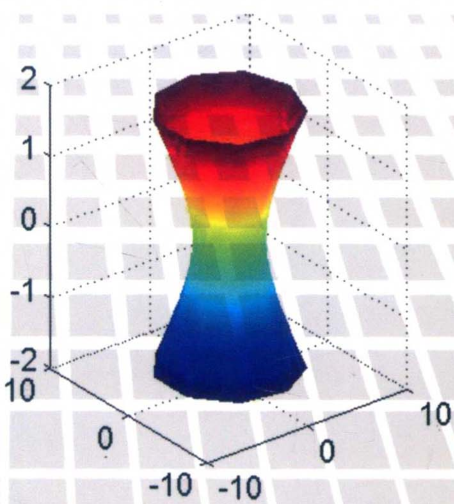
普通高等学校少数民族预科教材

高等数学

王　敏　王勇兵　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校少数民族预科教材

高等数学

主编　王　敏　王勇兵

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内容简介

本书是以教育部民族司制定的《少数民族预科数学课程教学大纲》为依据，结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成。

本书主要包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容。此外，还附有微积分发展史、常用初等代数公式、常用基本三角函数公式。

本书适合作为高校少数民族预科及高职高专数学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 王敏，王勇兵主编. —北京：中国铁道出版社，2014.6

普通高等学校少数民族预科教材

ISBN 978-7-113-18636-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②王… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 108319 号

书　　名：高等数学

作　　者：王　敏　王勇兵　主编

策　　划：张宇富　　　　**读者热线**：400-668-0820

责任编辑：李小军

编辑助理：曾露平

封面设计：付　巍

封面制作：白　雪

责任校对：汤淑梅

责任印制：李　佳

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)

网　　址：http://www.51eds.com

印　　刷：三河市宏盛印务有限公司

版　　次：2014 年 6 月第 1 版　　2014 年 6 月第 1 次印刷

开　　本：720mm×960mm　1/16　**印张**：13.75　**字数**：273 千

书　　号：ISBN 978-7-113-18636-4

定　　价：29.00 元

前　言

高等数学是少数民族预科教育的主干课程之一，它对培养学生的理性思维至关重要. 随着少数民族预科教育的快速发展和数学在各领域的广泛应用，少数民族预科数学教学也亟待改革和创新. 本书以教育部民族司制定的《民族预科数学课程教学大纲》为依据，结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书共7章：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 每章均配备大量的习题，用以检查学生对本章内容掌握的程度. 习题按照学生的不同需求，习题分为A组和B组两个层次：A组为基础练习题，考查学生对各章基本内容的掌握程度；B组练习题灵活多变、技巧性强，它是对基本内容的拓展和延伸，学生可根据自己的数学基础有选择地做. 另外，为了体现数学课程的人文特点和增加学生学习数学的兴趣，在每章末都附加了阅读材料，其内容是一些数学家的生平简介、数学发展史等，供学生课外阅读.

本书由王敏、王勇兵担任主编. 在本书编写过程中得到了李晓芬教授、李宗铭老师、张雪梅老师以及崔光红老师的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢.

虽然我们尽了很大的努力，但由于教学经验和水平有限，加之时间比较仓促，错误和不妥之处在所难免，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2013年7月

目　录

第 1 章　函　数

高等数学是这样的一门数学学科——它以极限理论为基础，着重研究函数的连续性、可微性和可积性等问题. 它研究的基本对象是函数，本章将在中学数学已有函数知识的基础上，系统阐述函数的相关知识.

§1.1　预备知识

1.1.1　变量与区间

1. 变量

所谓**变量**就是指在某一过程中不断变化的量，例如自由落体的速度和距离. 另外有的量在某一过程中始终保持不变，称这样的量为**常量**，例如自由落体的质量和重力加速度(同一地理位置).

初等数学以研究常量为主，而高等数学主要研究变量. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量. 在数轴上，常量 a 用一个定点表示，而变量 x 则用一个动点表示.

2. 区间

任何变量的取值都有一定的范围. 如果变量的变化是连续的，则变化范围通常用区间来表示. 设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地有闭区间和半开半闭区间：

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\},\ [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},\ (a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

这四个区间统称为**有限区间**，a、b 分别称为区间的**左、右端点**，数 $b-a$ 称为区间的**长度**. 从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段(见图 1－1).

此外，还有无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大")后，则可类似地表示无限区间如下(见图 1－2)：

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},\ (a,+\infty)=\{x|a<x\},$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},\ (-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

此外还有 $(-\infty,+\infty)$，即实数集 **R**.

需要注意的是，∞不是数，仅仅是个记号，表示无穷大或无限大.

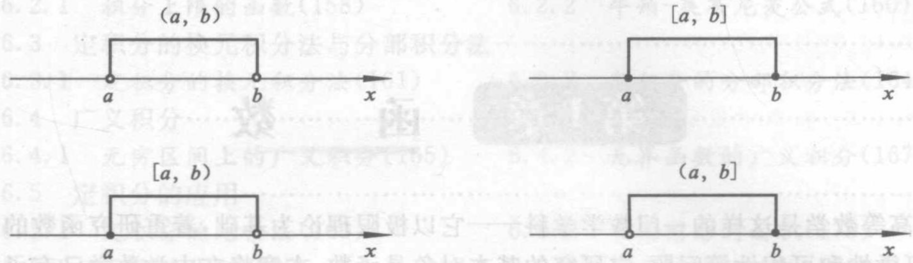


图 1-1

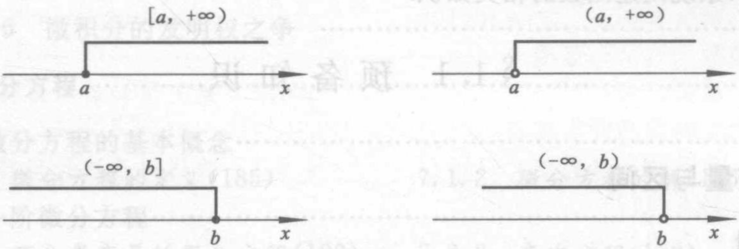


图 1-2

1.1.2 绝对值与邻域

1. 绝对值

定义 1 设 x 是一个实数，则 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x & \text{当 } x\geqslant 0\\ -x & \text{当 } x<0\end{cases}.$$

绝对值 $|x|$ 的几何意义是：$|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离. 易知，$|x-y|$ 表示两点 x,y 之间的距离.

绝对值有以下一些基本性质：设 x,y 为任意实数，则

(1) $|x|\geqslant 0$；

(2) $|-x|=|x|$；

(3) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(4) $|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$；

(5) $|x|>c(c>0)\Leftrightarrow x>c$ 或 $x<-c$；

(6) $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$；

(7) $|xy|=|x|\cdot|y|$；

(8) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$.

下面只给出性质(6)的证明，其余性质利用绝对值的定义很容易得到.

性质(6)的证明：

由性质(3)可得，$-|x|\leqslant x\leqslant |x|$，$-|y|\leqslant y\leqslant |y|$，两式相加可得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

这等价于 $|x+y|\leqslant |x|+|y|$. 把 y 换成 $-y$，可得 $|x-y|\leqslant |x|+|y|$. 综上，有 $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

因为 $|x|=|(x-y)+y|\leqslant |x-y|+|y|$，于是 $|x|-|y|\leqslant |x-y|$. 把 y 换成 $-y$，可得 $|x|-|y|\leqslant |x+y|$. 因而，有 $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|$.

综上，证得 $|x|-|y|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|$.

2. 邻域

当考虑某点附近的点所构成的集合时，通常用邻域的概念来描述.

定义 2 设 $\delta>0$，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$（即 $|x-x_0|<\delta$）称为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，点 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径. 如图 1-3 所示.

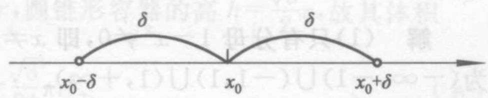


图 1-3

若把邻域的中心 x_0 去掉，即

$$(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\quad (即\ 0<|x-x_0|<\delta)$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，其中 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的**左邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**右邻域**.

若不强调 δ 的大小，点 x_0 的邻域简记为 $U(x_0)$，点 x_0 的去心邻域简记为 $\mathring{U}(x_0)$.

§1.2 函数概念

1.2.1 函数的定义

变量之间按照一定的规律相联系，其中一个变量的变化会引起另一变量的变化，当前者的值确定后，后者的值按着一定的关系相应地被确定，变量之间的这种依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 给定一个数集 I，如果对于每一个 $x\in I$，按照一定的法则，都有唯一的一个 y 与它相对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作

$$y=f(x)\quad (x\in I),$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**函数或因变量**，数集 I 称为函数的**定义域**.

对于每个 $x\in I$，由法则 f 所对应的 y 称为函数在点 x 处的函数值. 全体函数值所

构成的集合称为函数的**值域**，记作 $f(I)$，即

$$f(I)=\{y\,|\,y=f(x),x\in I\}.$$

由定义可知，确定一个函数需要两个要素，即定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，就称这两个函数相同.

当给定某个函数时，事先要给定其定义域，通常按两种情况考虑：一是对有实际背景的函数，要根据实际背景中变量的实际意义来确定. 二是对抽象的用算式表达的函数，其定义域就是使表达式有意义的自变量的全体.

例 1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+2}$；

(3) $y=\arcsin(x-3)$；　　(4) $y=\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

解 (1) 只有分母 $1-x^2\neq 0$，即 $x\neq\pm 1$ 时，表达式才有意义，因此函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 因为根式内的 $3x+2$ 不能为负，即 $3x+2\geqslant 0$，解得 $x\geqslant -\dfrac{2}{3}$，因此函数的定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.

(3) 因为 $|x-3|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x-3\leqslant 1$，解得 $2\leqslant x\leqslant 4$，因此函数的定义域为 $[2,4]$.

(4) 因为对数的真数必须大于零，故 $x>0$，而 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 需满足 $x^2-1>0$，即 $x<-1$ 或 $x>1$，因此所求函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法一般有三种：表格法、图示法和解析法. 用例子说明.

例 2 20 世纪 60 年代世界人口的数据如表 1-1 所示.

表 1-1　　单位：百万人

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

从表 1-1 可以看出 20 世纪 60 年代世界人口随年份的变化而变化的规律：随着时间 t 的变化，世界人口数 n 在不断增长. n 是 t 的函数，其定义域为 $\{1960,1961,\cdots,1968\}$.

这种用表格表示函数关系的方法称为**表格法**.

例 3 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况. 设某天 24 h 的气温变化曲线如图 1-4 所示.

该曲线描述了一天中的温度 T 随时间 t 变化的规律. T 是 t 的函数，其定义域为$[0,24]$. t 与 T 之间的相互对应关系由曲线上的点的位置确定，例如曲线上的点 P 的横坐标为 t_0，纵坐标 T_0 就是曲线所描述的函数在 t_0 点的函数值.

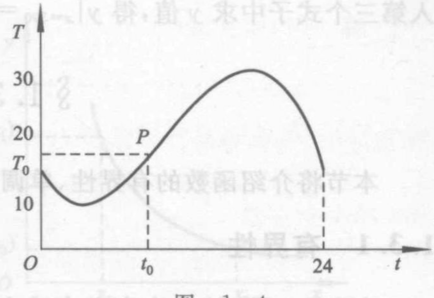


图 1-4

这种用图形表示函数关系的方法称为**图示法**.

例 4 设有一个半径为 r 的半圆形铁皮，将此铁皮做成一个圆锥形容器，问该圆锥形容器的体积 V 是多少?

解 易知圆锥形容器的底圆半径 $r_1=\dfrac{1}{2}r$，圆锥形容器的高 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$，故其体积

$$V=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi r^3. \tag{$*$}$$

式($*$)表示了体积 V 与 r 之间的关系，V 随着 r 的变化而变化. V 是 r 的函数，其定义域为$(0,+\infty)$.

这种用解析表达式(简称解析式)表示函数关系的方法称为**解析法**.

函数的三种表示法各有特点，表格法和图示法直观明了，解析法易于运算. 在实际中可以结合使用.

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形，有些函数在它的定义域的不同部分，其表达式不同. 即用多个解析式表示一个函数，这类函数称为**分段函数**.

例如，某市为了提高能源效率对本市居民用电实行阶梯电价，标准分为三档. 第一档:当居民月用电量在 180 度(1 度=1kW・h)及以内，电价每度 0.52 元；第二档：当居民月用电量在 181 度～280 度，在第一档电价基础上每度提高 0.05 元；第三档：居民月用电量在 281 度及以上，在第一档电价基础上每度提高 0.3 元.

此时居民的月电费 y 就是月用电量 x 的一个分段函数

$$y=\begin{cases}0.52x & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 180\\(0.52+0.05)x & \text{当 } 181\leqslant x\leqslant 280.\\(0.52+0.3)x & \text{当 } x\geqslant 281\end{cases}$$

需要注意，分段函数的定义域是其各段定义域的并集. 另外，分段函数在其整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

求分段函数的函数值时，应把自变量代入所对应的式子中去. 例如在上式中，当 $x=100$时，应代入第一个式子中求 y 值，得 $y|_{x=100}=0.52\times100=52$；当 $x=200$ 时，应代入第二个式子中求 y 值，得 $y|_{x=200}=(0.52+0.05)\times200=114$；当 $x=300$ 时，应代

入第三个式子中求 y 值，得 $y|_{x=300}=(0.52+0.3)\times 300=246$.

§1.3 函数的性质

本节将介绍函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性等基本特性.

1.3.1 有界性

定义 1 设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数，若存在数 A（或 B），使得对一切 $x\in I$，都有

$$f(x)\leqslant A \quad (\text{或 } f(x)\geqslant B)$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 内有上界（或有下界）.

定义 2 设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数，如果存在正数 M，对一切 $x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称 $f(x)$ 在 I 内有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必是有界函数. 有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间，如图 1-5 所示.

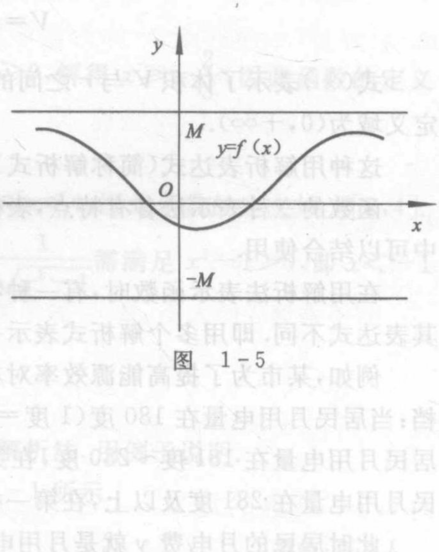


图 1-5

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$；$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有下界但无上界（因 $x^2\geqslant 0$），因此 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是无界函数，但 $y=x^2$ 在 $[-1,1]$ 上是有界函数.

1.3.2 单调性

定义 3 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加的**（或**单调减少的**）. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

单调增加（或单调减少）函数的图形沿横轴正向上升（或下降），如图 1-6 所示.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的；$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

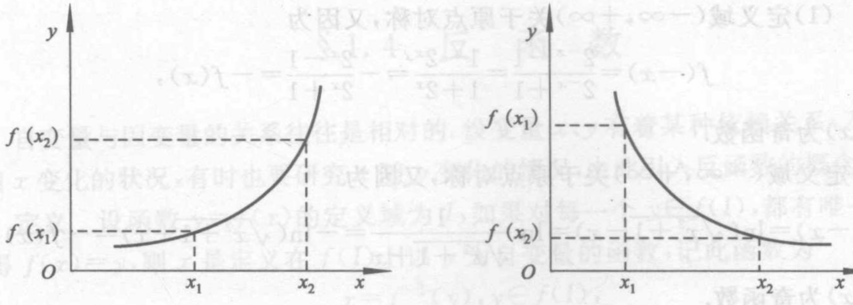


图　1-6

1.3.3　奇偶性

定义 4　设函数 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称（即若 $x\in I$，则有 $-x\in I$），如果对于任意 $x\in I$，都有

$$f(-x)=-f(x)\quad（或\ f(-x)=f(x)）$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数（或偶函数）**.

由定义易知，奇函数的图形关于原点对称，而偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-7 所示.

例如，$y=x^{2k+1}$（k 为整数）为奇函数，$y=x^{2k}$（k 为整数）为偶函数；$y=\sin x$ 为奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数；$y=C$（C 为非零常数）为偶函数；$y=0$ 既是奇函数又是偶函数；$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

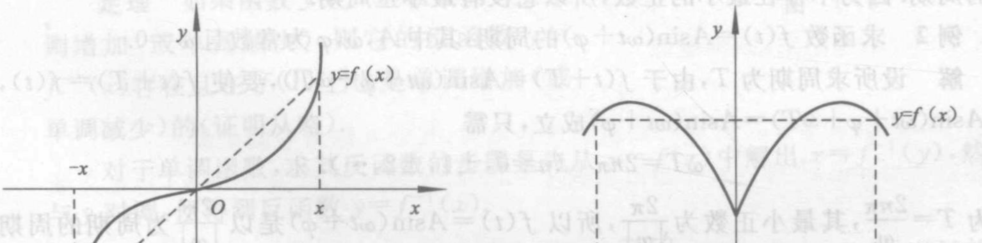


图　1-7

例 1　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$；　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1)定义域$(-\infty,+\infty)$关于原点对称,又因为

$$f(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{1-2^x}{1+2^x}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-f(x),$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(2)定义域$(-\infty,+\infty)$关于原点对称,又因为

$$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),$$

所以 $f(x)$为奇函数.

1.3.4 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$在 I 内有定义,如果存在非零常数 T,使得对于任意 $x\in I$,恒有

$$f(x+T)=f(x),\quad (x+T)\in I,$$

则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**.

显然,如果 T 为 $f(x)$的周期,则 $nT(n=\pm1,\pm2,\cdots)$也是 $f(x)$的周期. 通常说函数的周期是指最小正周期.

例如,$\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;$\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

若 $f(x)$是以 T 为周期的一个周期函数,则在每个长度为 T 的区间上,函数图形有相同的形状.

并非每个周期函数都有最小正周期,例如 $f(x)=C$ 是周期函数,任何非零数都是它的周期. 因为不存在最小的正数,所以它没有最小正周期.

例 2 求函数 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$的周期,其中 A,ω,φ 为常数且 $\omega\neq0$.

解 设所求周期为 T,由于 $f(t+T)=A\sin(\omega t+\varphi+\omega T)$,要使 $f(t+T)=f(t)$,即 $A\sin(\omega t+\varphi+\omega T)=A\sin(\omega t+\varphi)$成立,只需

$$\omega T=2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

因为 $T=\frac{2n\pi}{\omega}$,其最小正数为$\frac{2\pi}{|\omega|}$,所以 $f(t)=A\sin(\omega t+\varphi)$是以$\frac{2\pi}{|\omega|}$为周期的周期函数.

一般地,有以下结论成立:

设函数 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数,则 $f(ax+b)(a\neq0)$也是周期函数,其周期为$\frac{T}{|a|}$.

例如,$\cos\left(\frac{1}{2}x+3\right)$的周期为$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$,$\tan 3x$ 的周期为$\frac{\pi}{3}$.

§1.4 反 函 数

自变量与因变量的关系往往是相对的. 设变量 x、y 有着某种依赖关系，不仅要研究 y 随 x 变化的状况，有时也要研究 x 随 y 变化的情况，由此引入反函数的概念.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果对每一个 $y\in f(I)$，都有唯一的 $x\in I$，使得 $f(x)=y$，则 x 是定义在 $f(I)$ 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y),y\in f(I),$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，而 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

显然，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中，y 是自变量，x 是因变量. 但是习惯上，常用 x 作为自变量，y 作为因变量. 因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y=f^{-1}(x),x\in f(I).$$

在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－8 所示.

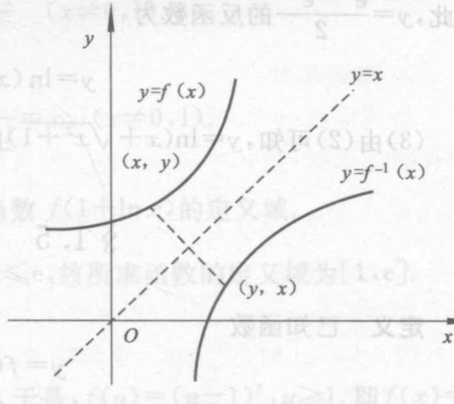


图 1－8

对于反函数的存在条件，有下述定理：

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少），则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在且在 $f(I)$ 上也是单调增加（或单调减少）的（证明从略）.

对于单调函数，求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$，然后将 x 与 y 对调，便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的反函数为 $y=\dfrac{x-b}{k}$；函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的反函数为 $y=\log_a x$；函数 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$；而函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,0)$ 的反函数为 $y=-\sqrt{x}$.

注意 函数 $y=x^2$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在反函数.

例 2 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　(3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.