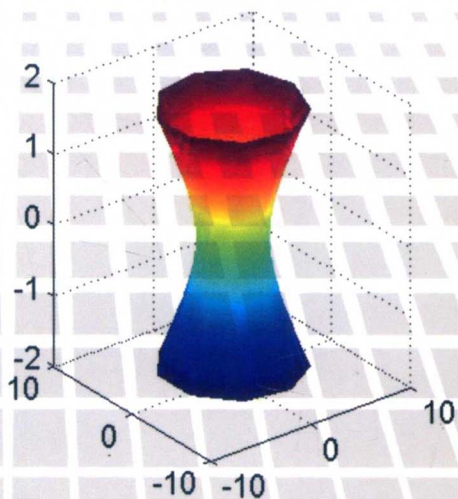


普通高等学校少数民族预科教材

高等数学

王 敏 王勇兵 主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书是以教育部民族司制定的《少数民族预科数学课程教学大纲》为依据,结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成。

本书主要包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容。此外,还附有微积分发展史、常用初等代数公式、常用基本三角函数公式。

本书适合作为高校少数民族预科及高职高专数学课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

王 敏 王 勇 兵 主 编

高等数学 / 王敏,王勇兵主编. —北京:中国铁道出版社,2014.6

普通高等学校少数民族预科教材

ISBN 978-7-113-18636-4

I. ①高… II. ①王…②王… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 108319 号

书 名: 高等数学

作 者: 王 敏 王勇兵 主编

策 划: 张宇富

责任编辑: 李小军

编辑助理: 曾露平

封面设计: 付 巍

封面制作: 白 雪

责任校对: 汤淑梅

责任印制: 李 佳

读者热线: 400-668-0820

出版发行: 中国铁道出版社(100054,北京市西城区右安门西街8号)

网 址: <http://www.51eds.com>

印 刷: 三河市宏盛印务有限公司

版 次: 2014年6月第1版

2014年6月第1次印刷

开 本: 720mm×960mm 1/16 印张: 13.75 字数: 273千

书 号: ISBN 978-7-113-18636-4

定 价: 29.00元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010)63550836

打击盗版举报电话:(010)63549504

前 言

高等数学是少数民族预科教育的主干课程之一,它对培养学生的理性思维至关重要.随着少数民族预科教育的快速发展和数学在各领域的广泛应用,少数民族预科数学教学也亟待改革和创新.本书以教育部民族司制定的《民族预科数学课程教学大纲》为依据,结合《高中数学新课程标准》和《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书共7章:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程.每章均配备大量的习题,用以检查学生对本章内容掌握的程度.习题按照学生的不同需求,习题分为A组和B组两个层次:A组为基础练习题,考查学生对各章基本内容的掌握程度;B组练习题灵活多变、技巧性强,它是对基本内容的拓展和延伸,学生可根据自己的数学基础有选择地做.另外,为了体现数学课程的人文特点和增加学生学习数学的兴趣,在每章末都附加了阅读材料,其内容是一些数学家的生平简介、数学发展史等,供学生课外阅读.

本书由王敏、王勇兵担任主编,在本书编写过程中得到了李晓芬教授、李宗铭老师、张雪梅老师以及崔光红老师的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢.

虽然我们尽了很大的努力,但由于教学经验和水平有限,加之时间比较仓促,错误和不妥之处在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编 者

2013年7月

§ 2.2 函数的极限	26
2.2.1 $x \rightarrow \infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(26)	2.2.2 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 的极限(29)
2.2.3 函数极限的性质(30)	
§ 2.3 无穷小与无穷大	31
2.3.1 无穷小(31)	2.3.2 无穷大(33)
2.3.3 无穷小与无穷大的关系(34)	
§ 2.4 极限的四则运算法则	35
§ 2.5 极限存在准则与两个重要极限	39
2.5.1 准则 I (夹逼定理)(39)	2.5.2 准则 II 单调有界数列必有极限(40)
2.5.3 两个重要极限(42)	
§ 2.6 无穷小的比较	44

目 录

第 1 章 函数	1
§ 1.1 预备知识	1
1.1.1 变量与区间(1)	1.1.2 绝对值与邻域(2)
§ 1.2 函数概念	3
1.2.1 函数的定义(3)	1.2.2 函数的表示法(4)
§ 1.3 函数的性质	6
1.3.1 有界性(6)	1.3.2 单调性(6)
1.3.3 奇偶性(7)	1.3.4 周期性(8)
§ 1.4 反函数	9
§ 1.5 复合函数	10
§ 1.6 初等函数	11
1.6.1 基本初等函数(11)	1.6.2 初等函数(15)
习题 1	16
阅读材料 1 函数是什么	18
第 2 章 极限与连续	21
§ 2.1 数列的极限	21
2.1.1 数列的概念(21)	2.1.2 数列极限实例(22)
2.1.3 数列极限的概念(22)	2.1.4 收敛数列的性质(25)
§ 2.2 函数的极限	26
2.2.1 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限(26)	2.2.2 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的 极限(27)
2.2.3 函数极限的性质(30)	
§ 2.3 无穷小与无穷大	31
2.3.1 无穷小(31)	2.3.2 无穷大(33)
2.3.3 无穷小与无穷大的关系(34)	
§ 2.4 极限的四则运算法则	35
§ 2.5 极限存在准则与两个重要极限	39
2.5.1 准则 I (夹逼定理)(39)	2.5.2 准则 II 单调有界数列 必有极限(40)
2.5.3 两个重要极限(42)	
§ 2.6 无穷小的比较	44

2.6.1	无穷小阶的定义(45)	2.6.2	等价无穷小的性质(45)	
§ 2.7	函数的连续性与间断点			47
2.7.1	函数在一点的连续性(47)	2.7.2	区间上的连续函数(49)	
2.7.3	函数的间断点(49)			
§ 2.8	连续函数的运算与初等函数的连续性			51
2.8.1	连续函数的和、差、积、商的连续性(51)			
2.8.2	反函数的连续性(52)	2.8.3	复合函数的连续性(52)	
2.8.4	初等函数的连续性(53)			
§ 2.9	闭区间上连续函数的性质			54
2.9.1	最大值与最小值定理与有界性定理(54)	2.9.2	零点定理与介值定理(55)	
习题 2				57
阅读材料 2	认识无限			61
第 3 章	导数与微分			63
§ 3.1	导数的概念			63
3.1.1	引例(63)	3.1.2	导数定义(64)	
3.1.3	导数的几何意义(66)	3.1.4	函数的可导性与连续性的关系(67)	
§ 3.2	基本初等函数的导数公式			68
3.2.1	常函数的导数(68)	3.2.2	幂函数的导数(68)	
3.2.3	指数函数的导数(69)	3.2.4	对数函数的导数(69)	
3.2.5	三角函数的导数(69)	3.2.6	反三角函数的导数(69)	
§ 3.3	函数的求导法则			70
3.3.1	函数和、差、积、商的求导法则(70)	3.3.2	反函数的导数(72)	
3.3.3	复合函数的求导法则(73)			
§ 3.4	高阶导数			76
§ 3.5	隐函数及由参数方程所确定的函数的导数			78
3.5.1	隐函数的导数(78)	3.5.2	由参数方程所确定的函数的导数(80)	
§ 3.6	函数的微分			81
3.6.1	微分的定义(82)	3.6.2	微分的几何意义(84)	
3.6.3	基本初等函数的微分公式与微分运算法则(84)	3.6.4	函数的近似计算(86)	
习题 3				87
阅读材料 3	微积分的创立			90

第 4 章 微分中值定理与导数的应用	92
§ 4.1 微分中值定理	92
(4.1.1) 罗尔定理(92)	4.1.2 拉格朗日中值定理(94)
4.1.3 柯西中值定理(96)	
§ 4.2 洛必达法则	97
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式(98)	4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式(100)
4.2.3 其他类型未定式(101)	
§ 4.3 函数单调性的判别法	102
4.3.1 函数单调的必要条件(103)	4.3.2 函数单调性的判别法(103)
§ 4.4 函数的极值与最值	105
4.4.1 极值(105)	4.4.2 最大值和最小值(108)
§ 4.5 曲线的凹凸性与拐点	110
4.5.1 曲线凹凸性的定义(110)	4.5.2 曲线凹凸性的判别法(111)
4.5.3 拐点(112)	
§ 4.6 函数图形的描绘	113
4.6.1 渐近线(113)	4.6.2 函数图形的描绘(115)
习题 4	117
阅读材料 4 牛顿	121
第 5 章 不定积分	122
§ 5.1 不定积分的概念与性质	122
5.1.1 原函数和不定积分的定义(122)	5.1.2 不定积分的几何意义(123)
5.1.3 不定积分的性质(124)	5.1.4 基本积分表(124)
§ 5.2 换元积分法	127
5.2.1 第一类换元法(127)	5.2.2 第二类换元法(132)
§ 5.3 分部积分法	137
§ 5.4 几种特殊类型函数的积分	140
5.4.1 有理函数的不定积分(140)	5.4.2 三角函数有理式的积分(143)
5.4.3 简单根式的积分(144)	
习题 5	145
阅读材料 5 莱布尼茨	148
第 6 章 定积分及其应用	149
§ 6.1 定积分的概念与性质	149
6.1.1 定积分问题举例(149)	6.1.2 定积分的定义(151)
6.1.3 定积分的几何意义(153)	6.1.4 定积分的性质(154)

§ 6.2 微积分基本公式	157
6.2.1 积分上限的函数(158)	6.2.2 牛顿-莱布尼茨公式(160)
§ 6.3 定积分的换元积分法与分部积分法	161
6.3.1 定积分的换元积分法(161)	6.3.2 定积分的分部积分法(164)
§ 6.4 广义积分	165
6.4.1 无穷区间上的广义积分(165)	6.4.2 无界函数的广义积分(167)
§ 6.5 定积分的应用	169
6.5.1 定积分的元素法(169)	6.5.2 平面图形的面积(170)
6.5.3 立体的体积(175)	6.5.4 平面曲线的弧长(178)
习题 6	179
阅读材料 6 微积分的发明权之争	184
第 7 章 微分方程	185
§ 7.1 微分方程的基本概念	185
7.1.1 微分方程的定义(185)	7.1.2 微分方程的解(186)
§ 7.2 一阶微分方程	187
7.2.1 可分离变量的微分方程(188)	7.2.2 齐次方程(188)
7.2.3 一阶线性微分方程(190)	
§ 7.3 可降阶的高阶微分方程	192
7.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程(192)	7.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程(192)
7.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程(193)	
§ 7.4 二阶线性微分方程解的结构	194
7.4.1 二阶线性齐次微分方程解的结构(194)	7.4.2 二阶线性非齐次微分方程解的结构(195)
§ 7.5 二阶线性常系数齐次微分方程	196
§ 7.6 二阶线性常系数非齐次微分方程	199
习题 7	203
阅读材料 7 三次数学危机	207
附录 常用的初等代数公式与基本三角公式	209
参考文献	211

第1章 函数

高等数学是这样的一门数学学科——它以极限理论为基础,着重研究函数的连续性、可微性和可积性等问题.它研究的基本对象是函数,本章将在中学数学已有函数知识的基础上,系统阐述函数的相关知识.

§ 1.1 预备知识

1.1.1 变量与区间

1. 变量

所谓变量就是指在某一过程中不断变化的量,例如自由落体的速度和距离.另外有的量在某一过程中始终保持不变,称这样的量为常量,例如自由落体的质量和重力加速度(同一地理位置).

初等数学以研究常量为主要,而高等数学主要研究变量.通常用字母 a, b, c 等表示常量,用字母 x, y, z 等表示变量.在数轴上,常量 a 用一个定点表示,而变量 x 则用一个动点表示.

2. 区间

任何变量的取值都有一定的范围.如果变量的变化是连续的,则变化范围通常用区间来表示.设 a, b 为两个实数,且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

类似地有闭区间和半开半闭区间:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

这四个区间统称为有限区间, a, b 分别称为区间的左、右端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度.从数轴上看, 这些有限区间是长度有限的线段(见图 1-1).

此外, 还有无限区间. 引进记号 $+\infty$ (读作“正无穷大”) 及 $-\infty$ (读作“负无穷大”) 后, 则可类似地表示无限区间如下(见图 1-2):

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}, (a, +\infty) = \{x | a < x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}, (-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

此外还有 $(-\infty, +\infty)$, 即实数集 \mathbf{R} .

需要注意的是, ∞ 不是数, 仅仅是个记号, 表示无穷大或无限大.

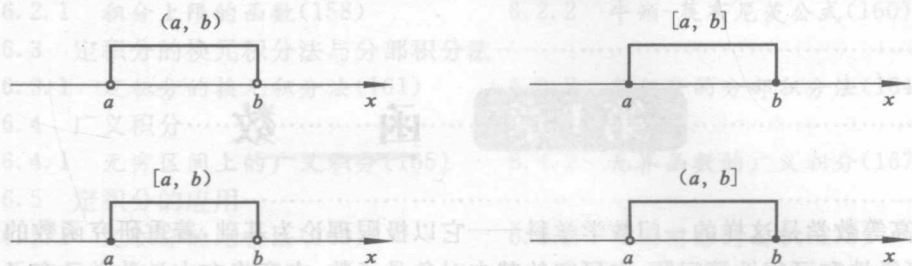


图 1-1

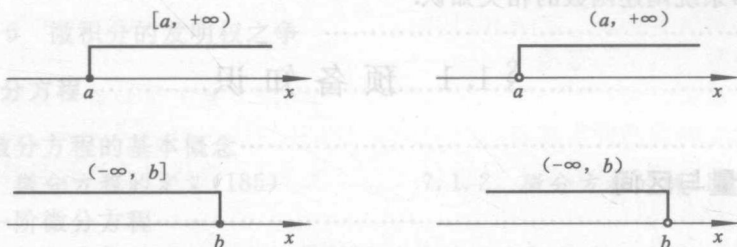


图 1-2

1.1.2 绝对值与邻域

1. 绝对值

定义 1 设 x 是一个实数, 则 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x & \text{当 } x \geq 0 \\ -x & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

绝对值 $|x|$ 的几何意义是: $|x|$ 表示点 x 到原点 O 的距离. 易知, $|x-y|$ 表示两点 x, y 之间的距离.

绝对值有以下一些基本性质: 设 x, y 为任意实数, 则

- (1) $|x| \geq 0$;
- (2) $|-x| = |x|$;
- (3) $-|x| \leq x \leq |x|$;
- (4) $|x| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$;
- (5) $|x| > c (c > 0) \Leftrightarrow x > c \text{ 或 } x < -c$;
- (6) $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$;
- (7) $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- (8) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} (y \neq 0)$.

下面只给出性质(6)的证明,其余性质利用绝对值的定义很容易得到.

性质(6)的证明:

由性质(3)可得, $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$, 两式相加可得

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

这等价于 $|x + y| \leq |x| + |y|$. 把 y 换成 $-y$, 可得 $|x - y| \leq |x| + |y|$. 综上, 有 $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.

因为 $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$, 于是 $|x| - |y| \leq |x - y|$. 把 y 换成 $-y$, 可得 $|x| - |y| \leq |x + y|$. 因而, 有 $|x| - |y| \leq |x \pm y|$.

综上, 证得 $|x| - |y| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.

2. 邻域

当考虑某点附近的点所构成的集合时, 通常用邻域的概念来描述.

定义 2 设 $\delta > 0$, 则开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (即 $|x - x_0| < \delta$) 称为点 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0, \delta)$, 点 x_0 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 如图 1-3 所示.

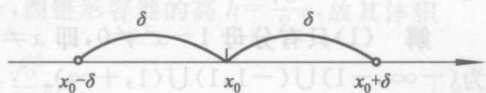


图 1-3

若把邻域的中心 x_0 去掉, 即

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad (即 \ 0 < |x - x_0| < \delta)$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\dot{U}(x_0, \delta)$, 其中 $(x_0 - \delta, x_0)$ 称为 x_0 的左邻域, $(x_0, x_0 + \delta)$ 称为 x_0 的右邻域.

若不强调 δ 的大小, 点 x_0 的邻域简记为 $U(x_0)$, 点 x_0 的去心邻域简记为 $\dot{U}(x_0)$.

§ 1.2 函数概念

1.2.1 函数的定义

变量之间按照一定的规律相联系, 其中一个变量的变化会引起另一变量的变化, 当前者的值确定后, 后者的值按着一定的关系相应地被确定, 变量之间的这种依赖关系抽象出来就是函数的概念.

定义 给定一个数集 I , 如果对于每一个 $x \in I$, 按照一定的法则, 都有唯一的一个 y 与它相对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x) \quad (x \in I),$$

其中 x 称为自变量, y 称为函数或因变量, 数集 I 称为函数的定义域.

对于每个 $x \in I$, 由法则 f 所对应的 y 称为函数在点 x 处的函数值. 全体函数值所

构成的集合称为函数的值域,记作 $f(I)$,即

$$f(I) = \{y | y = f(x), x \in I\}.$$

由定义可知,确定一个函数需要两个要素,即定义域和对应法则.如果两个函数的定义域和对应法则都相同,就称这两个函数相同.

当给定某个函数时,事先要给定其定义域,通常按两种情况考虑:一是对有实际背景的函数,要根据实际背景中变量的实际意义来确定.二是对抽象的用算式表达的函数,其定义域就是使表达式有意义的自变量的全体.

例 1 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(2) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(3) y = \arcsin(x-3);$$

$$(4) y = \ln x + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

解 (1) 只有分母 $1-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$ 时,表达式才有意义,因此函数的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 因为根式内的 $3x+2$ 不能为负,即 $3x+2 \geq 0$,解得 $x \geq -\frac{2}{3}$,因此函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(3) 因为 $|x-3| \leq 1$, 即 $-1 \leq x-3 \leq 1$,解得 $2 \leq x \leq 4$,因此函数的定义域为 $[2, 4]$.

(4) 因为对数的真数必须大于零,故 $x > 0$,而 $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 需满足 $x^2-1 > 0$, 即 $x < -1$ 或 $x > 1$,因此所求函数的定义域为 $(1, +\infty)$.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法一般有三种:表格法、图示法和解析法.用例子说明.

例 2 20 世纪 60 年代世界人口的数据如表 1-1 所示.

表 1-1

单位:百万人

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

从表 1-1 可以看出 20 世纪 60 年代世界人口随年份的变化而变化的规律:随着时间 t 的变化,世界人口数 n 在不断增长. n 是 t 的函数,其定义域为 $\{1960, 1961, \dots, 1968\}$.

这种用表格表示函数关系的方法称为表格法.

例 3 某气象站用温度自动记录仪记录某地的气温变化情况.设某天 24 h 的气温变化曲线如图 1-4 所示.

该曲线描述了一天中的温度 T 随时间 t 变化的规律. T 是 t 的函数, 其定义域为 $[0, 24]$. t 与 T 之间的相互对应关系由曲线上的点的位置确定, 例如曲线上的点 P 的横坐标为 t_0 , 纵坐标 T_0 就是曲线所描述的函数在 t_0 点的函数值.

这种用图形表示函数关系的方法称为图
示法.

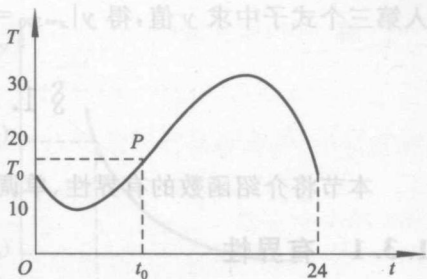


图 1-4

例 4 设有一个半径为 r 的半圆形铁皮, 将此铁皮做成一个圆锥形容器, 问该圆锥形容器的体积 V 是多少?

解 易知圆锥形容器的底圆半径 $r_1 = \frac{1}{2}r$, 圆锥形容器的高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, 故其体积

$$V = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h = \frac{\sqrt{3}}{24} \pi r^3. \quad (*)$$

式 $(*)$ 表示了体积 V 与 r 之间的关系, V 随着 r 的变化而变化. V 是 r 的函数, 其定义域为 $(0, +\infty)$.

这种用解析表达式(简称解析式)表示函数关系的方法称为解析法.

函数的三种表示法各有特点, 表格法和图示法直观明了, 解析法易于运算. 在实际中可以结合使用.

在用解析法表示函数时, 有一种特别的情形, 有些函数在它的定义域的不同部分, 其表达式不同. 即用多个解析式表示一个函数, 这类函数称为分段函数.

例如, 某市为了提高能源效率对本市居民用电实行阶梯电价, 标准分为三档. 第一档: 当居民月用电量在 180 度(1 度 = $1\text{kW} \cdot \text{h}$) 及以内, 电价每度 0.52 元; 第二档: 当居民月用电量在 181 度 ~ 280 度, 在第一档电价基础上每度提高 0.05 元; 第三档: 居民月用电量在 281 度及以上, 在第一档电价基础上每度提高 0.3 元.

此时居民的月电费 y 就是月用电量 x 的一个分段函数

$$y = \begin{cases} 0.52x & \text{当 } 0 \leq x \leq 180 \\ (0.52 + 0.05)x & \text{当 } 181 \leq x \leq 280. \\ (0.52 + 0.3)x & \text{当 } x \geq 281 \end{cases}$$

需要注意, 分段函数的定义域是其各段定义域的并集. 另外, 分段函数在其整个定义域上是一个函数, 而不是几个函数.

求分段函数的函数值时, 应把自变量代入所对应的式子中去. 例如在上式中, 当 $x=100$ 时, 应代入第一个式子中求 y 值, 得 $y|_{x=100} = 0.52 \times 100 = 52$; 当 $x=200$ 时, 应代入第二个式子中求 y 值, 得 $y|_{x=200} = (0.52 + 0.05) \times 200 = 114$; 当 $x=300$ 时, 应代

入第三个式子中求 y 值, 得 $y|_{x=300} = (0.52 + 0.3) \times 300 = 246$.

§ 1.3 函数的性质

本节将介绍函数的有界性、单调性、奇偶性及周期性等基本特性.

1.3.1 有界性

定义 1 设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数, 若存在数 A (或 B), 使得对一切 $x \in I$, 都有

$$f(x) \leq A \quad (\text{或 } f(x) \geq B)$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内有上界 (或有下界).

定义 2 设 $f(x)$ 为定义在 I 上的函数, 如果存在正数 M , 对一切 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 I 内有界. 如果这样的 M 不存在, 就称函数 $f(x)$ 在 I 内无界.

显然, 有界函数必有上界和下界; 反之, 既有上界又有下界的函数必是有界函数. 有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间, 如图 1-5 所示.

例如, $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 因为 $|\sin x| \leq 1$; $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有下界但无上界 (因 $x^2 \geq 0$), 因此 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是无界函数, 但 $y = x^2$ 在 $[-1, 1]$ 上是有界函数.

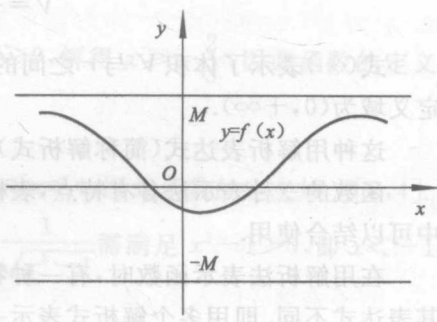


图 1-5

1.3.2 单调性

定义 3 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的 (或单调减少的). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

单调增加 (或单调减少) 函数的图形沿横轴正向上升 (或下降), 如图 1-6 所示.

例如, $y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 内是单调增加的, 在 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的, 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调的; $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

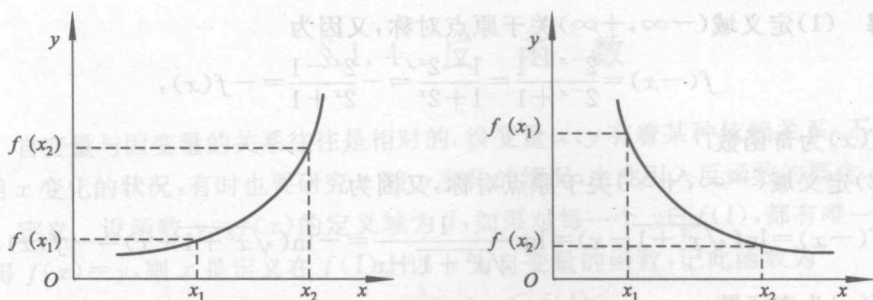


图 1-6

1.3.3 奇偶性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域 I 关于原点对称(即若 $x \in I$, 则有 $-x \in I$), 如果对于任意 $x \in I$, 都有

$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x))$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数(或偶函数).

由定义易知, 奇函数的图形关于原点对称, 而偶函数的图形关于 y 轴对称, 如图 1-7 所示.

例如, $y = x^{2k+1}$ (k 为整数) 为奇函数, $y = x^{2k}$ (k 为整数) 为偶函数; $y = \sin x$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数; $y = C$ (C 为非零常数) 为偶函数; $y = 0$ 既是奇函数又是偶函数; $y = x^2 + x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

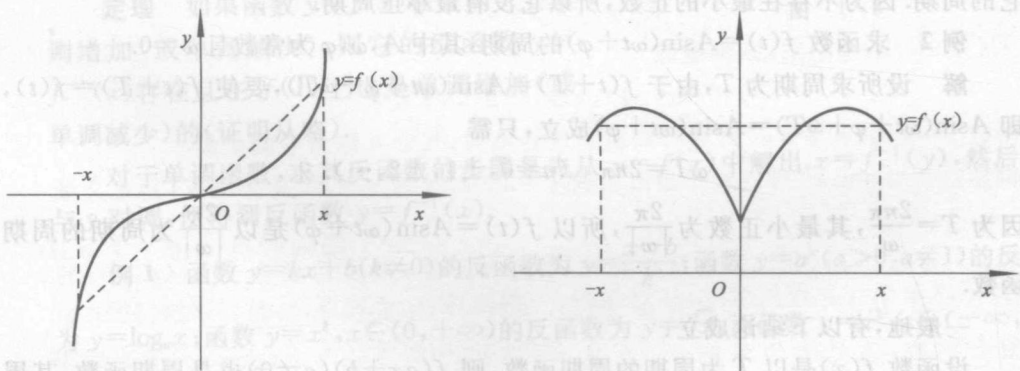


图 1-7

例 1 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$;

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 (1) 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 关于原点对称, 又因为

$$f(-x) = \frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1} = \frac{1-2^x}{1+2^x} = -\frac{2^x-1}{2^x+1} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 关于原点对称, 又因为

$$f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -\ln(\sqrt{x^2+1}+x) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

1.3.4 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 I 内有定义, 如果存在非零常数 T , 使得对于任意 $x \in I$, 恒有

$$f(x+T) = f(x), \quad (x+T) \in I,$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

显然, 如果 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 nT ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) 也是 $f(x)$ 的周期. 通常说函数的周期是指最小正周期.

例如, $\sin x$ 和 $\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数; $\tan x$ 和 $\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

若 $f(x)$ 是以 T 为周期的一个周期函数, 则在每个长度为 T 的区间上, 函数图形有相同的形状.

并非每个周期函数都有最小正周期, 例如 $f(x) = C$ 是周期函数, 任何非零数都是它的周期. 因为不存在最小的正数, 所以它没有最小正周期.

例 2 求函数 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 的周期, 其中 A, ω, φ 为常数且 $\omega \neq 0$.

解 设所求周期为 T , 由于 $f(t+T) = A \sin(\omega t + \varphi + \omega T)$, 要使 $f(t+T) = f(t)$, 即 $A \sin(\omega t + \varphi + \omega T) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 成立, 只需

$$\omega T = 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

因为 $T = \frac{2n\pi}{\omega}$, 其最小正数为 $\frac{2\pi}{|\omega|}$, 所以 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为周期的周期函数.

一般地, 有以下结论成立:

设函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 则 $f(ax+b)$ ($a \neq 0$) 也是周期函数, 其周期为 $\frac{T}{|a|}$.

例如, $\cos\left(\frac{1}{2}x+3\right)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, $\tan 3x$ 的周期为 $\frac{\pi}{3}$.

§ 1.4 反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的, 设变量 x, y 有着某种依赖关系, 不仅要研究 y 随 x 变化的状况, 有时也要研究 x 随 y 变化的情况, 由此引入反函数的概念.

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I , 如果对每一个 $y \in f(I)$, 都有唯一的 $x \in I$, 使得 $f(x)=y$, 则 x 是定义在 $f(I)$ 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为

$$x=f^{-1}(y), y \in f(I),$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

显然, $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数, 且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x=f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量. 但是习惯上, 常用 x 作为自变量, y 作为因变量. 因此, $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为

$$y=f^{-1}(x), x \in f(I).$$

在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称, 如图 1-8 所示.

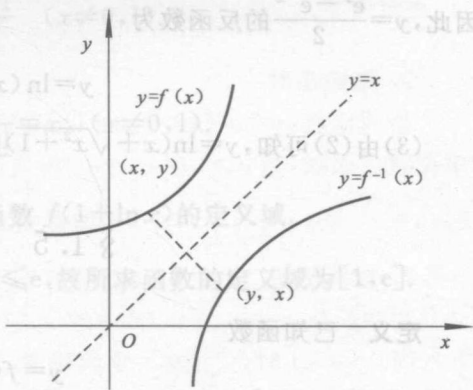


图 1-8

对于反函数的存在条件, 有下述定理:

定理 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少), 则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在且在 $f(I)$ 上也是单调增加 (或单调减少) 的 (证明从略).

对于单调函数, 求其反函数的步骤是先从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$, 然后将 x 与 y 对调, 便得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 1 函数 $y=kx+b (k \neq 0)$ 的反函数为 $y=\frac{x-b}{k}$; 函数 $y=a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数为 $y=\log_a x$; 函数 $y=x^2, x \in (0, +\infty)$ 的反函数为 $y=\sqrt{x}$; 而函数 $y=x^2, x \in (-\infty, 0)$ 的反函数为 $y=-\sqrt{x}$.

注意 函数 $y=x^2$ 在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上不存在反函数.

例 2 求下列函数的反函数.

(1) $y=\frac{2x-1}{x+1}$; (2) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; (3) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.