高等学校大类招生改革基础课程规划教材

常微分方程与解析几何

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ANALYTIC GEOMETRY

孙兵　毛京中　朱国庆　姜海燕　编

高等学校大类招生改革基础课程规划教材

常微分方程与解析几何

孙　兵　毛京中　朱国庆　姜海燕　编

机械工业出版社

本书涵盖高等数学课程中的常微分方程和解析几何两个模块内容。第一章给出微分方程的一些基本概念，随后给出几种常用微分方程的解法及常微分方程的应用。第二章从建立空间直角坐标系出发，引进向量工具，讨论平面与直线、空间曲面与空间曲线等内容。

本书内容精练，重点突出，论述严谨，可读性强，可作为高等院校大类招生、大类培养模式下选取数学分析教材作为高等数学课程教材的配套用书，也可作为高等数学学习的自学用书和参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程与解析几何/孙兵等编．—北京：机械工业出版社，2018.9

高等学校大类招生改革基础课程规划教材

ISBN 978-7-111-60453-2

Ⅰ.①常…　Ⅱ.①孙…　Ⅲ.①常微分方程－高等学校－教材②解析几何－高等学校－教材　Ⅳ.①O175.1②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 163249 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：韩效杰　　责任编辑：韩效杰　汤　嘉

责任校对：刘　岚　王　延　封面设计：鞠　杨

责任印制：孙　炜

北京中兴印刷有限公司印刷

2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm・7.75 印张・195 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-60453-2

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

金 书 网：www.golden-book.com

前　言

将常微分方程与解析几何合并出书，结合数学系的数学分析给出大类培养模式下理工科高等数学课程教材，这在业界还是首次。

目前，大类招生已成为国内高校招生着重强调的招生和培养模式。宽口径招生按大类培养也符合我国高考改革按专业录取的整体发展趋势。大类招生以同一学科和相近学科专业通识教育为基础，成为一种新的人才培养模式。作为中国高等教育改革当下的一个重要趋势，大类招生、大类培养是高校未来招生和培养制度改革的必然选择。

新的体制需要有相应的配套设施，这包括新的体制下的配套基础教材建设、教师授课任务予以调整的机制。然而，在当前的大类招生培养中，不少高校把通识课和专业课分割得太清楚，要么是“大通识”，进入专业时间漫长；要么是“大专业”，通识教育时间少。基于此矛盾需要我们多做探索，更好地兼顾通识和专业，让大类招生、大类培养更趋完善。实行大类招生培养，本质上是以学生为中心的教学改革，因为学生未来有更多机会按照自己的兴趣和特长选择专业。能够选择更擅长、更喜欢的专业去学习，有利于学生生发出更强的学习主动性和积极性，这一点符合大学教育的基本原理。业界迫切需要更适应大类招生、大类培养模式下的新型教材的编写与建设。

传统的高等数学课程主要包括微积分的基本知识、向量代数与空间解析几何、常微分方程。微积分是文艺复兴和科技革命以来最伟大的创造，被誉为人类精神的最高胜利。解析几何是学习多变量微积分的重要准备，其知识结构也自成体系。常微分方程作为微积分的重要应用之一，它的形成与发展是和力学、天文学、物理学，以及其他科学技术的发展密切相关的。在新的培养模式下，理工科的学生入校后要进行高等数学的学习，这其中包括一部分后来在高年级要进入数学系学习的学生，为了让这部分学生在进入到专业学习时打好牢固的数学分析基础，同时也为了大部分将来不以数学为专业的学生也能掌握较深的数学基础知识，从而有利于对本专业的学习，我们选取数学分析教材作为大类培养模式下学生的高等数学教材。然而，原有的数学分析教材不包括常微分方程和解析几何部分，我们需要将这两部分内容补充到高等数学课堂里去。

本书作为大类招生改革基础课程规划教材，是我们结合多年的教学实践经验，在高等院校大类培养模式的教学改革推动下的一次尝试。目的是给出一套新的、符合当前培养模式的高等数学配套教材。

本书另一个和传统教材不同的特点是，新教材配备有可供手机或平板电脑使用的书件APP。作为全新的移动学习型教材，我们综合使用这种新媒介作为作者和读者的全方位交互平台，实现了传统纸质教材和网络互联平台的有机结合。利用手机或平板电脑扫描教材

每页预留的二维码，读者可以得到本页的相关资源，如教材重要内容展开、有关数学实验、图片、动画、思考题答案、视频资料以及学术讲座等内容。而且，这些内容可以跟随使用情况随时进行动态增添修改。在使用本书的过程中，读者若有任何建议或意见，也可以通过该平台直接反映给我们，或者给我们发电子邮件(sun345@bit. edu. cn)联络，在此提前表示感谢。

我们想通过改革研究和实践，得出一套大类培养模式下高等数学课程新体系、新教学方案，使学生在这一方案的培养下，熟练掌握高等数学基本知识、基本思想、基本技能，具有借助移动学习 APP 等多种方式学习数学分析的能力，从而激发学生自主探究高等数学的兴趣。

本书的完成，得到了许多人员的热情支持和无私帮助。特别感谢北京理工大学的田玉斌教授、蒋立宁教授、李炳照教授的指导和帮助。

限于编者水平，书中定有不少错误和不妥之处，恳请读者不吝批评指正。

孙　兵　毛京中　朱国庆　姜海燕

北京理工大学

2018 年 6 月

目　录

第一章 常微分方程

为了研究事物的运动变化情况，建立变量之间的函数关系具有重要的意义.在有些问题中，并不能直接找出所需要的函数关系，但是根据一些基本的科学原理或问题所提供的情况可以得到未知函数及其导数所满足的等式，这种等式被称为微分方程.微分方程的应用极为广泛，是解决各类实际问题的重要工具，也是对各种客观现象进行数学抽象，建立数学模型的重要方法.

微分方程本身是一门独立的、内容十分丰富的数学课程，本章只能介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法.

第一节 微分方程的基本概念

我们结合具体的例子来说明有关微分方程的基本概念.

例 1 已知一条曲线通过点(1,3)，且在该曲线上任一点处切线的斜率为 $4x$，求该曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y=y(x)$，根据导数的几何意义及题设，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x, \tag{1}$$

而且 $y=y(x)$ 应满足条件

$$y\big|_{x=1}=3, \tag{2}$$

将式(1) 两端积分，得

$$y=2x^2+C,$$

将条件式(2) 代入上式，得 $3=2+C$，解得 $C=1$，故所求曲线的方程为

$$y=2x^2+1.$$

例 2 设一质量为 m 的物体，受重力作用由距离地面高 h_0 处下落，设其初速度为 0，并忽略空气阻力和其他外力的作用(这时称为自由落体)，求物体的运动规律，即求物体的高度随时间变化的函数关系.

解 如图 1-1 所示建立坐标系，设物体在 t 时刻的高度为 $h=h(t)$，则物体在 t 时刻的速度为 $v=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$，加速度为 $a=\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}$. 物体受重力而下落，根据牛顿第二定律

$$ma=F,$$

得

$$m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

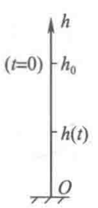

图 1-1

即
$$\frac{d^2h}{dt^2}=-g, \tag{3}$$

且 $h(t)$ 满足条件
$$h|_{t=0}=h_0,\quad \left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=0}=0, \tag{4}$$

将式(3) 积分两次，得
$$\frac{dh}{dt}=-gt+C_1,$$
$$h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

将条件式(4) 代入上面两式，得 $C_1=0,C_2=h_0$，因此有
$$h=-\frac{1}{2}gt^2+h_0.$$

上面两个例子中的式(1) 和式(3) 都含有未知函数的导数，它们都被称为微分方程. 一般地，**称含有未知函数的导数(或微分)的方程为微分方程. 如果微分方程中的未知函数是一元函数，则称该方程为常微分方程.**

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数叫作微分方程的阶. 例如，方程(1)是一阶微分方程，方程(3)是二阶微分方程.

满足微分方程的函数称为该方程的解. 即如果把某个函数以及它的导数(或微分)代入微分方程，能使它成为恒等式，则这个函数称为该微分方程的解. 例如，例 1 中的 $y=2x^2+C$ 和 $y=2x^2+1$ 都是微分方程 $\frac{dy}{dx}=4x$ 的解. 例 2 中的 $h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 和 $h=-\frac{1}{2}gt^2+h_0$ 都是微分方程 $\frac{d^2h}{dt^2}=-g$ 的解.

如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，这样的解叫作微分方程的通解. 例如，$y=2x^2+C$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx}=4x$ 的通解，$h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是微分方程 $\frac{d^2h}{dt^2}=-g$ 的通解. **如果微分方程的解不含有任意常数，这样的解叫作微分方程的特解.** 例如，$y=2x^2+1$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx}=4x$ 的特解，$h=-\frac{1}{2}gt^2+h_0$ 是微分方程 $\frac{d^2h}{dt^2}=-g$ 的特解.

微分方程的通解反映了由该方程所描述的某一类运动过程的一般变化规律，要确定某一具体运动过程的特定规律，即确定微分方程的某一特解，必须根据问题的具体情况，提出一定的附加条件，这些附加条件叫作定解条件. 如果定解条件反映了运动的初始状态或曲线在某一点的特定状态，这样的定解条件称为**初始条件**. 例如，例 1 中的 $y|_{x=1}=3$ 和例 2 中的 $h|_{t=0}=h_0$，$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=0}=0$ 都是能确定

特解的初始条件.

一般地,n 阶微分方程可以表示成

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{5}$$

它的初始条件的形式为

$$y|_{x=x_0}=y_0,\quad y'|_{x=x_0}=y_1,\quad y''|_{x=x_0}=y_2,\quad \cdots,$$
$$y^{(n-1)}|_{x=x_0}=y_{n-1}, \tag{6}$$

其中 $y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 都是已知实数.

求微分方程(5)的满足初始条件(6)的特解,这一问题叫作微分方程的初值问题或柯西问题.

例 3 求下列曲线族所满足的微分方程:

(1) $y=\dfrac{1}{x+C}$ (C 是任意常数);

(2) $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ (a,b 是任意常数).

解 (1) 对所给函数求导,得

$$y'=-\frac{1}{(x+C)^2},$$

与已知函数联立消去任意常数 C,得

$$y'=-y^2,$$

此即所要求的微分方程,而已知函数是它的通解;

(2) 为消去任意常数 a,b,需要三个方程.由已知方程两端对 x 求两次导数,得

$$2(x-a)+2(y-b)y'=0,$$

即

$$x-a+(y-b)y'=0,$$
$$1+(y')^2+(y-b)y''=0,$$

由上面两式分别得

$$x-a=-(y-b)y',$$
$$y-b=-\frac{1+(y')^2}{y''},$$

代入已知方程,得

$$\left(\frac{1+(y')^2}{y''}y'\right)^2+\left(\frac{1+(y')^2}{y''}\right)^2=4,$$
$$[1+(y')^2]^3=4(y'')^2,$$

此即所要求的微分方程,而已知方程是它的隐函数形式的通解.

习题 1-1

1. 指出下列微分方程的阶数:

(1) $y''-2y=x$;

(2) $x(y')^2-2yy'=0$;

(3) $(7x-6y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $y'''+8y'+y=0$.

2. 验证给定的函数是所给微分方程的解：

(1) $(x-2y)y'=2x-y, x^2-xy+y^2=C$;

(2) $(xy-x)y''+x(y')^2+yy'-2y'=0, y=\ln(xy)$;

(3) $\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x^2\sqrt{1+x^4}, \\ y(0)=0, \end{cases}$ $y=x\displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$;

(4) $\begin{cases} 2xy\mathrm{d}y=(y^2-x)\mathrm{d}x, \\ y(1)=2, \end{cases}$ $y^2=4x-x\ln x$;

(5) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4y=0, \\ y(0)=1, y'(0)=4, \end{cases}$ $y=\dfrac{1}{2}(3\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x})$.

3. 建立由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点(x,y)处切线的斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 从原点到曲线上任一点处切线的距离等于该点的横坐标；

(3) 曲线上点$P(x,y)$处的法线与x轴的交点为Q，且线段PQ被y轴平分；

(4) 曲线上点$P(x,y)$处的切线与y轴的交点为Q，线段PQ的长度为2，且曲线通过点(2,0)；

(5) 曲线上点$M(x,y)$处的切线与x轴，y轴的交点分别为P，Q，线段PM被点Q平分，且曲线通过点(3,1).

第二节 一阶微分方程

由上一节我们看到，有些微分方程可以用直接积分的方法求得其解，但是并非所有的微分方程都能这样求解. 下面介绍几种一阶微分方程及其解法.

一、可分离变量的方程

形如
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{1}$$
的一阶微分方程称为可分离变量的方程，其中$f(x)$和$g(y)$是已知的连续函数.

对这类方程，当$g(y)\neq 0$时，可以化成
$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x, \tag{2}$$
这一步称为分离变量. 设函数$y=y(x)$是微分方程(1)的任一解，将它代入上式，得
$$\frac{y'(x)}{g(y(x))}\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x,$$

两端对 x 积分,得

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x, \tag{3}$$

由此可以得到微分方程的通解,如此求微分方程解的方法称为**分离变量法**.

如果方程 $g(y)=0$ 有实根 $y=a$,则函数 $y=a$ 显然是微分方程(1)的特解,当这个特解不包含在通解的表达式中时,将其称为奇解,此时 $y=a$ 与方程的通解合在一起便是微分方程的全部解. 如果问题只需求微分方程的通解,则不必讨论奇解.

例 1　求方程 $y'=\sqrt{y}$的通解.

解　当$\sqrt{y}\neq 0$ 时,将微分方程分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mathrm{d}x,$$

两端积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \int \mathrm{d}x,\quad 2\sqrt{y} = x + C,$$

即
$$y = \frac{1}{4}(x+C)^2,$$

此即所求微分方程的通解.

此例中方程$\sqrt{y}=0$ 有实根 $y=0$,这一函数是微分方程的一个特解,但它不包含在通解的表达式中,因此这一特解是微分方程的奇解. 由于本例只需求微分方程的通解,因而在求解的过程中可不必考虑这样的解.

例 2　求微分方程 $y'=2x(y+1)$的通解以及满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

解　当 $y+1\neq 0$ 时,分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y+1} = 2x\mathrm{d}x,$$

两端积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \int 2x\mathrm{d}x,$$

即
$$\ln|y+1| = x^2 + C_1,\quad y+1 = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2},$$

记 $C=\pm \mathrm{e}^{C_1}$,则有 $y=C\mathrm{e}^{x^2}-1$,

此即微分方程的通解,由 $y+1=0$ 可得 $y=-1$ 也是微分方程的解,这个解包含在通解中,是 $C=0$ 的情况.

将 $y(0)=0$ 代入通解中,得 $0=C-1$,$C=1$,故 $y=\mathrm{e}^{x^2}-1$ 为所求特解.

例 3　求微分方程 $\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y=y^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 的通解.

解 将方程整理,得

$$(1-y^2)\mathrm{d}x = y(1-x)\mathrm{d}y,$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{y}{1-y^2}\mathrm{d}y,$$

两端积分,得

$$-\ln|1-x| = -\frac{1}{2}\ln|1-y^2| + C_1,$$

即

$$2\ln|1-x| = \ln|1-y^2| - 2C_1,$$

$$\ln(1-x)^2 = \ln|1-y^2| - 2C_1 = \ln e^{-2C_1}|1-y^2|,$$

故

$$(1-x)^2 = C(1-y^2)$$

为方程的通解.

二、齐次方程

如果一阶常微分方程能够化成形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式,则称其为齐次方程.

如果齐次方程本身不是可分离变量的方程,那么可通过变量代换将其化成可分离变量的方程.一般地,令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,此式对 x 求导,得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入微分方程,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u,$$

这便是一个可分离变量的方程.有时为计算方便,也可令 $u=\frac{x}{y}$,即 $x=yu$,两端对 y 求导,得$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,代入微分方程即可得到可分离变量的方程.

例 4 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{xy-y^2}{x^2+2xy}$的通解.

解 将方程化成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\frac{y}{x}},$$

这是齐次方程,令 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$,两端对 x 求导,得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入上面方程,得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u-u^2}{1+2u},\quad 即\ x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{-3u^2}{1+2u},$$

分离变量,得

$$\frac{1+2u}{u^2}\mathrm{d}u=-3\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分,得

$$-\frac{1}{u}+2\ln|u|=-3\ln|x|+C_1,$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式,得

$$-\frac{x}{y}+2\ln\left|\frac{y}{x}\right|=-3\ln|x|+C_1,$$

化简得 $$\ln|y^2x|=\frac{x}{y}+C_1,\quad 即\ y^2x=C\mathrm{e}^{\frac{x}{y}},$$

此即原方程的通解.

例 5 求微分方程 $(1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}})y\mathrm{d}x=(x-y)\mathrm{d}y$ 的通解.

解 此处将 y 看成自变量,x 看成 y 的函数比较方便.将方程化成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{\frac{x}{y}-1}{1+\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}},$$

令 $u=\frac{x}{y}$,即 $x=yu$,两端对 y 求导,得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,代入上面方程,得

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u-1}{1+\mathrm{e}^{-u}},\quad 即\ y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{-(\mathrm{e}^u+u)}{\mathrm{e}^u+1},$$

分离变量,得 $$\frac{\mathrm{e}^u+1}{\mathrm{e}^u+u}\mathrm{d}u=-\frac{1}{y}\mathrm{d}y,$$

两端积分,得

$$\ln|\mathrm{e}^u+u|=-\ln|y|+C_1,\quad 即\ \mathrm{e}^u+u=\frac{C}{y},$$

将 $u=\frac{x}{y}$ 代入上式,得

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}=\frac{C}{y},\quad 即\ y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x=C,$$

此即原微分方程的通解.

三、形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 的方程

当 $c=c_1=0$ 时,方程本身就是齐次方程.当 c 和 c_1 不全为零时,可通过变量代换将方程化成齐次方程或可分离变量的方程.

如果 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$,即 $a_1=\lambda a, b_1=\lambda b$,可令 $u=ax+by$,两端对 x

求导,得$\frac{du}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$,于是可将原方程化为

$$\frac{du}{dx}=a+bf\left(\frac{u+c}{\lambda u+c_1}\right),$$

这是一个可分离变量的方程.

如果$\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$,则方程组$\begin{cases}ax+by+c=0,\\a_1x+b_1y+c_1=0\end{cases}$有唯一的一组解 $x=x_0,y=y_0$,若令 $\xi=x-x_0,\eta=y-y_0$,则$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{d\xi}$,并且

$$ax+by+c=a(\xi+x_0)+b(\eta+y_0)+c=a\xi+b\eta,$$
$$a_1x+b_1y+c_1=a_1(\xi+x_0)+b_1(\eta+y_0)+c_1=a_1\xi+b_1\eta,$$

于是原方程化成

$$\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}\right),$$

这是一个齐次方程.

例 6 求微分方程 $y'=\frac{6x-3y+1}{4x-2y-1}$的通解.

解 分子与分母的 x,y 的系数成比例,即有$\frac{6}{4}=\frac{-3}{-2}$,令 $u=2x-y$,两端对 x 求导,得$\frac{du}{dx}=2-\frac{dy}{dx}$,于是原方程化成

$$\frac{du}{dx}=2-\frac{3u+1}{2u-1}=\frac{u-3}{2u-1},$$

分离变量,得

$$\frac{2u-1}{u-3}du=dx,$$

两端积分,得

$$2u+5\ln|u-3|=x+C,$$

将 $u=2x-y$ 代入,得

$$3x-2y+5\ln|2x-y-3|=C,$$

此即所求通解.

例 7 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{x-y+1}$的通解.

解 由于分子与分母的 x,y 的系数$\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$,解方程

$$\begin{cases}x+y+3=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$$

得 $x=-2,y=-1$,令 $\xi=x-(-2)=x+2,\eta=y-(-1)=y+1$,则$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dy}{dx}$,原方程化为

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}=\frac{1+\frac{\eta}{\xi}}{1-\frac{\eta}{\xi}},$$

这是一个齐次方程，令 $u=\frac{\eta}{\xi}$，即 $\eta=\xi u$，两端对 ξ 求导，得 $\frac{d\eta}{d\xi}=u+\xi\frac{du}{d\xi}$，于是上面方程化为

$$u+\xi\frac{du}{d\xi}=\frac{1+u}{1-u},\quad 即\ \xi\frac{du}{d\xi}=\frac{1+u^2}{1-u},$$

分离变量并积分，得

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{d\xi}{\xi},$$

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|\xi|+C,$$

将 $u=\frac{\eta}{\xi}=\frac{y+1}{x+2}$，$\xi=x+2$ 代入上式，得到原方程的通解

$$\arctan\frac{y+1}{x+2}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+1}{x+2}\right)^2\right]=\ln|x+2|+C.$$

四、一阶线性微分方程

形式为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{4}$$

的微分方程称为**一阶线性微分方程**，其中未知函数及其导数都是一次的，$P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是已知函数. 如果 $Q(x)\equiv 0$，方程(4)变为

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0, \tag{5}$$

将式(5) 称为**一阶线性齐次方程**. 如果 $Q(x)$ 不恒为零，则方程(4)称为**一阶线性非齐次方程**. 方程(5)也称为与方程(4)相对应的一阶线性齐次方程.

下面讨论一阶线性微分方程的解法.

一阶线性齐次方程(5)是可分离变量的方程. 分离变量，得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,$$

两端积分，得

$$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1\quad（或\ \ln|y|=-\int_{x_0}^{x}P(x)dx+C_1），$$

即
$$y=Ce^{-\int P(x)dx}（或\ y=Ce^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}）, \tag{6}$$

此式为一阶线性齐次方程的通解，其中 C 为任意常数.

为求一阶线性非齐次方程(4)的通解，我们先给出方程(4)解的结构.

容易验证，如果函数 $y=y_1(x)$ 是方程(4)的解，函数 $y=y_2(x)$ 是方程(5)的解，则 $y=y_1(x)+y_2(x)$ 一定是方程(4)的解. 因而如果 $y=\overline{y}(x)$（可简记成 $\overline{y}$）是方程(5)的通解，$y=y^*(x)$（可简记成 y^*）是方程(4)的一个特解，则

$$y=\overline{y}+y^*$$

是方程(4)的解,并由于其中含有一个任意常数,从而是方程(4)的通解.

由上面的讨论已知$\overline{y}$具有形式$\overline{y}=Ce^{-\int P(x)dx}$(或$\overline{y}=Ce^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}$),为求出方程(4)的一个特解,根据$\overline{y}$的形式,我们推测方程(4)可能有形式为$C(x)e^{-\int P(x)dx}$的特解,即假设

$$y^*=C(x)e^{-\int P(x)dx},$$

其中$C(x)$为一待定函数,将此式代入方程(4),得

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dC(x)}{dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$=Q(x),$$

即
$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dC(x)}{dx}=Q(x),$$

于是有

$$\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{\int P(x)dx},$$
$$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

故

$$y^*=e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

这种求方程(4)特解的方法称为常数变易法,因而方程(4)的通解为

$$\boxed{y=e^{-\int P(x)dx}\left[C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right], \qquad (7)}$$

如果要求方程(4)满足初始条件$y|_{x=x_0}=y_0$的特解,利用式(7)求出方程的通解后确定出任意常数C的值即可得到所要求的特解,也可以利用下面的式(8)计算.

$$\boxed{y=e^{-\int_{x_0}^{x}P(x)dx}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}P(x)dx}dx\right], \qquad (8)}$$

此式的推导略.

例 8 求微分方程$xy'+(1-x)y=e^{2x}$的通解.

解 方程为一阶线性微分方程,与它相对应的齐次方程为

$$xy'+(1-x)y=0,$$

分离变量,得
$$\frac{dy}{y}=\frac{x-1}{x}dx,$$

两端积分,得

$$\ln|y|=x-\ln|x|+C_1, \quad 即\ \overline{y}=C\frac{e^x}{x},$$

设$y^*=C(x)\frac{e^x}{x}$,代入原方程,得

$$e^x\frac{dC(x)}{dx}=e^{2x}, \quad \frac{dC(x)}{dx}=e^x,$$

积分,得 $$C(x)=\int e^x dx+C_2=e^x+C_2,$$

取 $C_2=0$,得原方程的一个特解 $y^*=e^x\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{e^{2x}}{x}$,故原方程的通解为

$$y=\bar{y}+y^*=\frac{e^x}{x}(C+e^x).$$

如果利用式(7)求此方程的通解,需先将微分方程化成与式(4)相同的标准方程,即化成

$$y'+\frac{1-x}{x}y=\frac{e^{2x}}{x},$$

此处 $P(x)=\dfrac{1-x}{x}$,$Q(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$,不妨设 $x>0$,由式(7)得方程的通解

$$y=e^{-\int\frac{1-x}{x}dx}\left(C+\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\int\frac{1-x}{x}dx}dx\right)=e^{x-\ln x}\left(C+\int\frac{e^{2x}}{x}e^{\ln x-x}dx\right)$$
$$=\frac{1}{x}e^x\left(C+\int\frac{e^{2x}}{x}xe^{-x}dx\right)=\frac{e^x}{x}\left(C+\int e^x dx\right)=\frac{e^x}{x}(C+e^x).$$

例 9　求微分方程 $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解.

解　如果将 y 看成函数,则方程不属于以上几种类型,如果将 y 看成自变量,将 x 看成 y 的函数,而将方程化为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^2,$$

这是一阶线性微分方程,其中 $P(y)=-\dfrac{1}{y}$,$Q(y)=y^2$,利用式(7)得其通解

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left[C+\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy\right]$$
$$=e^{-\int-\frac{1}{y}dy}\left(C+\int y^2e^{\int-\frac{1}{y}dy}dy\right)=e^{\ln y}\left(C+\int y^2e^{-\ln y}dy\right)$$
$$=y\left(C+\int y^2\frac{1}{y}dy\right)=y\left(C+\int y\,dy\right)=y\left(C+\frac{y^2}{2}\right).$$

五、伯努利方程

形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\quad(n\neq 0,1)\tag{9}$$

的方程称为伯努利方程.通过变量代换,可以将其化成线性微分方程.将方程(9)两端同时除以 y^n,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

于是有 $$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

作变换 $u=y^{1-n}$,则方程化为