互素理论与费马方程

Coprime theory and Fermat's equation

王瑞林 著

吉林大学出版社

互素理论与费马方程

王瑞林 著

吉林大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

互素理论与费马方程 / 王瑞林著. —长春 : 吉林大学出版社, 2018.7
ISBN 978-7-5692-2589-1

Ⅰ. ①互… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①费马最后定理—研究 Ⅳ. ①O156

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第161932号

书　　名：互素理论与费马方程
HUSU LILUN YU FEIMA FANGCHENG

作　　者：王瑞林　著
策划编辑：邵宇彤
责任编辑：邵宇彤
责任校对：张文涛
装帧设计：林　雪
出版发行：吉林大学出版社
社　　址：长春市人民大街4059号
邮政编码：130021
发行电话：0431-89580028/29/21
网　　址：http://www.jlup.com.cn
电子邮箱：jdcbs@jlu.edu.cn
印　　刷：吉广控股有限公司
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
印　　张：8
字　　数：224千字
版　　次：2018年7月　第1版
印　　次：2018年7月　第1次
书　　号：ISBN 978-7-5692-2589-1
定　　价：32.00元

作者简介

王瑞林，男，1944年生，汉族。吉林省通榆县人，中共党员，工程师。1969年毕业于吉林工业大学（现吉林大学）汽车系汽车专业，在吉林省镇赉县参加工作，在县运输公司、县汽车修配厂、县职工学校当过车工、电焊工、汽车修理工，以及大型货车和大型客车驾驶员，还做过车队、公司、厂技术员，广播电视大学专职教师（教授英语和数学分析）。1984年加入公务员序列，先后任职于县总工会、县交通运输局。2004年退休。

符号说明

本书符号说明如下：

$>$ 表示大于.

$<$ 表示小于.

$\geq$ 表示大于等于.

$\leq$ 表示小于等于.

$p|p$, $c|c$, $p|c$ 分别表示奇素数对、奇合数对、混合数对，用于第三篇文章，$|$ 是对称线，不表示整除.

$c\cup c$, $c\cap c$ 分别表示有相同因子及有不同因子的奇合数对，用于第三篇文章.

$N_{p|p}$，$N_{c|c}$，$N_{p|c}$ 分别表示奇素数对、奇合数对、混合数对的个数，用于第三篇文章.

$N_{c\cap c}$ 分别表示有相同因子及有不同因子的奇合数对的个数，用于第三篇文章.

$\frac{c}{c}$, $\frac{p}{c}$ 分别表示奇素数对、奇合数对、混合数对，用于第四篇文章. —是对称线，不是分数线.

$N_{\frac{p}{p}}$，$N_{\frac{c}{c}}$，$N_{\frac{p}{c}}$ 分别表示奇素数对、奇合数对、混合数对的个数，用于第四篇文章.

[ ] 在第三篇文章表示只取其内数字的整数部分，如$[4.1]=4$, 在其他篇文章只做一般括号使用.

〈 〉只做一般括号使用.

{ } 除集合外，做一般括号使用.

$(a,\ b)=k$ 表示 a,b 的最大公约数等于 k, $(a,\ b)=1$ 表示 a,b 的最大公约数等于 1, 即 a,b 互素.

$\psi(p,x,y)$ 表示以 p,x,y 为自变量的一个特定的三元函数，具体意义见第一篇和第二篇文章.

C_n^k 表示通常意义下的组合种数，$C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

$\binom{n}{k}$ 表示通常意义下的组合种数，$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

$a\in A$ 表示 a 为集合 A 的元素.

$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 表示集合 A 的元素为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$.

$A=B\cap C$ 表示集合 A 是集合 B 与集合 C 的交集.

L.C.M.表示最小公倍数（Lowest Common Multiple）用于第五篇文章.

F 表示万有引力（矢量），用于序言和第七篇文章.

a 表示加速度（矢量），用于第七篇文章.

r^0 表示单位矢量，用于序言和第七篇文章. r 表示矢量 r 的模，即 $r=|\mathrm{r}|$, $\mathrm{r}^0=\dfrac{\mathrm{r}}{|\mathrm{r}|}=\dfrac{\mathrm{r}}{r}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

$\prod_{a\in A} a=\prod_{j=1}^{n} a_j=a_1a_2a_3\cdots a_n$, $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ 表示集合 A 的全体元素连乘.

目　录

序　言

对于任何自然数 $n>2$, 费马方程

$$x^n+y^n=z^n \tag{a}$$

无非零整数解 x,y,z, 即费马最后定理，简称 FLT. 问题早已归结到只需解决 $n=p>3$ 为奇素数，x,y,z 为两两互素之正整数之情形. 于是我们讨论方程

$$x^p+y^p=z^p. \tag{b}$$

由(b)的左端想到二项式定理及其变形：

$$(x+y)^p=x^p+\mathrm{C}_p^1x^{p-1}y+\mathrm{C}_p^2x^{p-2}y^2+\cdots+\mathrm{C}_p^{p-2}x^2y^{p-2}+\mathrm{C}_p^{p-1}xy^{p-1}+y^p, \tag{c}$$

$$x^p+y^p=(x+y)\left\{(x+y)^{p-1}-pxy\left[\frac{x^{p-2}+y^{p-2}}{x+y}+\frac{\mathrm{C}_p^2\left(x^{p-4}+y^{p-4}\right)}{p(x+y)}xy+\cdots+\frac{\mathrm{C}_p^{(p-1)/2}}{p}(xy)^{(p-3)/2}\right]\right\}. \tag{d}$$

把[ ]里的式子归拢一下，写成

$$x^p+y^p=(x+y)\left\{(x+y)^{p-1}-pxy\psi(p,x,y)\right\}, \tag{e}$$

显然有

$$\psi(p,x,y)=\frac{x^{p-2}+y^{p-2}}{x+y}+\frac{\mathrm{C}_p^2\left(x^{p-4}+y^{p-4}\right)xy}{p(x+y)}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_p^{(p-1)/2}}{p}(xy)^{(p-3)/2}. \tag{f}$$

(e)比(d)好，右端变得简捷. 接着，我们从(e)右端的三个代数式 $x+y$, pxy, $\psi(p,x,y)$ 之间的关系入手，寻找划分类型的根据，而且找到了. 历史上分为两种情况：p 整除 xyz 和 p 不整除 x,y,z. 与历史根本不同，我们先分为两种情况：$(x+y,\ p)=1$ 和 $(x+y,\ p)=p$，再化成三个模型：$(xy,\ p)=p$, $(x+y,\ p)=p$ 和 $(\psi(p,x,y),\ p)=p$. 历史没谈“根据”，只是说“不久就可以看到，把以下两种情况分清才方便.” 因为划分类型用到了 $\psi(p,x,y)$，所以由(d)到(e)这一步至关重要. 若(d)写不成(e)，就意味着 $\psi(p,x,y)$ 不是整数，我们的三个模型就不对. 到底由(d)能不能写成(e)，引起美国一所著名大学的一位数学家的关注和怀疑. 我告诉他，p 是奇素数，就能写成，p 是奇合数，写不成. 他不再往下看了. 这是 1997 年的事. 谈论奇合数，还得回到(a). 如果 n 为奇合数，令 $n=kp$, p 为奇素数，(a)化为 $x^{kp}+y^{kp}=z^{kp}$，写成 $\left(x^k\right)^p+\left(y^k\right)^p=\left(z^k\right)^p$, 就绕回到(b)了. 是能绕回来，不过难免让人费思量，好像有“潜伏者”. 而仔细想来，也没什么. 麻烦出在 k 上，降它的地位就是了. 虽然它仍在底数的高位上，而从全式的总体看，它毕竟是在底数上. 审稿人也不是想不到这些，最大的可能，还是因为领路人没走(c)(d)(e)(f). 数学家是跟着领路人走的，全世界都一样. 关于 FLT，作者写了 A 和 B 两篇文章. A 篇的英文稿还在这位美国朋友的手上.

(e)的右端也可以看成是对左端的因式分解. 显然，我们与法国数学家拉梅(Gabriel Lame)不同，拉梅把(e)的左端分解成了复数线性因子. 那是 1847 年的事.

去年 4 月互联网上有个消息，说浙江大学教授汪家禾先生 1994 年写过一篇关于 FLT 的文章. 找来一看他的思路，也以二项式定理为平台，也用了系统的可除性，我倍感兴奋. 原来我并不孤独. 汪老很有名气，是国际刊物《*Appl. Math. Mech.*》编委，美国刊物《*Math. Rev.*》特约评论员.

1997 年还有一件事，发生在 $\psi(p,x,y)$ 那件事之后，也应该说及. 另一位美国数学家也看了我关于 FLT 的 A 篇. 与他联系时，他正在英国威尔士大学讲学. 找到他，是因为我在国内一个杂志上看到了他发表在“The mathematical Intelligencer (Vol. 19, No. 1, 1997)”上，批评 Andrew Wiles 的文章

“Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem(*Ann of Math ,141 ,1995*)”的文章的译文. 他的文章提到了哥德尔第二不完全性定理、ZF 系统的协调性、Hilbert 方案等. 他曾在 Wisconsin 大学、Texas 大学、Toronto 大学教书. 他没对$\psi(p,x,y)$提出任何看法. 大约二十几天，我们共同顺利地走到第一模型的收笔处. 这时他似乎有了看法，用阿拉伯数字写了一个式子，后面打了一个问号，发过来. 我不解其意，回了一句“I don't know What you say.”从此没有了消息. 多年后回忆此事，只记得 A 文中没有“不含定理 9 的另证”，记不清是否把该文的定理 9 发给了这位美国数学家，也记不清当时是否已明确地得到定理 9. 岁月如流，光阴似箭，往事如烟.

关于 FLT 的 A 篇，当时共 21 页，第一位数学家看完了前 4 页，包括极其重要的$\psi(p,x,y)$. 第二位数学家看完前 14 页，第一模型结束，实际相当于读完全文. 文中三个模型的路线相同，个别部位不同，如果从拓扑学的眼光，有点像同一个图形被扭曲了两次.

对称太神奇，*OSRS* 中的对称尤其值得关注. 这个无穷序列很像人类历史的长河. “自从盘古开天地，三皇五帝到如今，…”，这种对称或许在年份的序数中有反映，出现某些相似. 那么 *ESRS* 中的对称有什么意义呢？至少，没有 *ESRS* 中的，就联想不出 *OSRS* 中的，当然，也许不止.

(1+1)之所以成立，那是因为 *ESRS* 中生成了足够多的奇合数对，计算公式也表明，奇合数对越多，奇素数对也越多. 相反相成，彰显唯物辩证法的光芒. 数论融进系统论，不是转角度，而是添维度，是旧戏开了新生面.

我们一直坚持从特殊到一般的认识论. 可惜的是，举例子时 E 不能选得太大. 于是 *ESRS* 中方根素数足迹的对称看得就很不开心. 比如同一行，对称线右侧是方根素数 3 的足迹，左侧是方根素数 5,7,11 的足迹，这样的行下次出现是在此行往下数第$3\times5\times7\times11$行，即在此行往下数第 1155 行. 一页文稿全划成行，才 40 行，30 页才能看到. 想要看清楚 *OSRS* 中方根素数运动足迹的对称，更为艰难，“叹人间美中不足今方信，…”

罗素不等式为研究(1+1)带来了“无穷递降”，如果认为加两倍平均值不安全，可以加三倍，加四倍，加五倍，… 总能找到一个n、一个q_n，一个 E 与之对应. 这样的局面，是未曾想到的.

ESRS 往下伸展，总长度变为Q集全体元素之积，是将其一般化、抽象化，是打开全局. 规律在全局中才能看清楚. “第三原则”是个约定.

R. P. Feynman 在讲到 Newton 引力定律时说：“而真的就是这样一条简单的定律吗？它的机制（machinery）是什么？我们做过的一切，只是描写了地球怎样绕太阳转，可是没有说过其缘由何在（but we have not said *what makes it go*），Newton 对此无假设，他只是满足于找出引力都干了些什么，而未能深入下去.” 本书找到了牛顿引力方程之源头，它可写成四种形式：

$$\xi(M,r)=\ln r^{-GM},\ \xi(M,r)=-GM\ln r,\ \mathrm{e}^{\xi(M,r)}=r^{-GM},\ \xi(M,r)=\ln\frac{1}{r^{GM}},$$

每种形式视角不同. 从源头写起，方程可写为$\mathrm{F}=-\dfrac{\partial^2}{\partial}\ln r^{-GM}\mathrm{r}^0 m$, 可作为对 R. P. Feynman 的回答.

本书作者

二〇一八年五月于吉林镇赉

互素理论与费马方程(A篇)

摘　要：本文以互素理论为工具，以二项式定理为平台，证明了：$p>3$ 为奇素数，费马方程 $x^p+y^p=z^p$ 无两两互素的正整数解 x,y,z，亦即使用在有理整数系统内操作的方法，证明了费马最后定理成立.

关键词：互素理论，费马方程，费马最后定理

0　引言

对于任何自然数 $n>2$, 费马方程 $x^n+y^n=z^n$ 无非零整数解 x,y,z 称为费马最后定理，简称 FLT. 问题早已归结到只需解决 $n=p>3$ 为奇素数，x,y,z 为两两互素之正整数之情形. Andrew Wiles 未能终结该定理之研究，他的方法是间接的. 关于他的那篇文章[5]，我同意 Daniel J. Velleman 的评论[4].

迄今，世界上许多数学家，仍在为找到一个可以被不同学派接受的，不涉嫌数学基础之争论之方法，给这个著名定理以真正意义上的证明，而努力工作. 无疑，最好是能找到一个直接的方法.

本文的方法：n 为奇素数时，将二项式定理变形为 $x^n+y^n=(x+y)\left((x+y)^{n-1}-nxy\psi(n,x,y)\right)$. 式中 $\psi(n,x,y)$ 是一个代数式，因 n 而异（n 为奇合数时写不成）. 之后，证出 $x+y,\ xy,\ \psi(p,x,y)$ 三者两两互素，将命题先分为两种情况：$(x+y,\ p)=1$ 和 $(x+y,\ p)=p$; 再化成为三个模型：$(xy,\ p)=p$, $(x+y,\ p)=p$ 和 $(\psi(p,x,y),\ p)=p$ 分别讨论.

费马方程外形优雅，无整数解，其内必有相悖之处，破解它应依据对立统一规律（Law of unity of opposites），即依据变量之间的互素（Coprime）关系和系统的可除性（Divisibility of System）.

本文的每一步都是在求索有关等式成立之必要条件，最后因发现某个等式的必要条件之间存在矛盾而结束. 论述中暗用了两个可以免证的定理，即“若干个整数与一个分数之和一定不为整数.”以及“两个或多个分数之和有可能为整数.” 本文“整数”只指有理整数，“分数”只指不能化成整数之分数，未加说明的字母表示整数. 文中所谈“因子”，一般不涉及1和 -1. 为简捷，用 $a\in M$ 表示 a 是 M 之因子，a,M 为代数式. 此外，再没使用集合论之任何理论和符号.

本文独立成文，与任何他人文章无关，特别是与“同余”“某种形式素数的存在性”“无穷递降法”“分圆域”“椭圆曲线”等无关.

本文之所有公式均以最基本、最直观之形式写出.

作者关于 FLT 写了两篇文章，本文是第一篇，自始至终着眼于“系统的可除性”，另一篇用到了“系统中的变量在数值上的比例关系”.

1　互素理论

定理 1 至定理 5 为加法定理，定理 6 为乘法定理，定理 7 为二元 p 次型.

定理 1　若 u,v 为整数，$(u,\ v)=1$, 则有 $(u+v,\ uv)=1$.

证　我们考虑等式 $u+v=w$. 因 $(u,\ v)=1$, 若 $(w,\ u)=t\neq 1$, 除以 t, 左第二项化为分数；如果 $(w,\ v)=t\neq 1$, 除以 t, 左第一项化为分数. 显然，只有 $(w,\ uv)=1$, 该式才有可能成立.

本定理证毕.

定理 2　若 u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1$，则有 $(u+kv,\ v)=1$.

证 1. 若 $(u,\ k)=1$, 由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u,\ kv)=1$, 由定理 1 有 $(u+kv,\ ukv)=1$. 2. 若 $(u,\ k)=t\neq 1$, 令 $u=at,\ k=bt,\ (a,\ b)=1$, 于是 $(u+kv,\ v)=1$ 化为 $(t(a+bv),\ v)=1$. 再由 $(u,\ v)=1,\ u=at$ 有 $(t,\ v)=1$, 证出 $(a+bv,\ v)=1$ 成立即可. 由 $(u,\ v)=1,\ u=at,\ (a,\ b)=1$ 有 $(a,\ bv)=1$, 由定理 1 有 $(a+bv,\ abv)=1$.

本定理证毕.

定理 3　u,v,k_i 为整数，$(u,\ v)=1,\ k_0=|k_n|=1$，有 $\left(\sum_{j=0}^{n} k_i u^{n-i}v^i,\ uv\right)=1$.

证 $|k_n|=1$ 时，为便于表述，将 k_n 写成 $(-1)^c$, c 为正整数. 于是当 $k_0=|k_n|=1$ 时有

$$\sum_{j=0}^{n} k_i u^{n-i}v^i = u^n + k_1u^{n-1}v + k_2u^{n-2}v^2 + k_3u^{n-3}v^3 + \cdots + k_{n-3}u^3v^{n-3} + k_{n-2}u^2v^{n-2} + k_{n-1}uv^{n-1} + (-1)^c v^n. \quad (1)$$

为便于推理，逐一分离变量，将(1)化为

$$\sum_{j=0}^{n} k_i u^{n-i}v^i = u\left\{u\left\langle u\cdots u\left[u\left(u+k_1v\right)+k_2v^2\right]+k_3v^3+\cdots+k_{n-2}v^{n-2}\right\rangle+k_{n-1}v^{n-1}\right\}+(-1)^c v^n. \quad (2)$$

注意观察(2), 令 $\Omega_1=u+k_1v$, 有 $\Omega_2=u\Omega_1+k_2v^2$, $\Omega_3=u\Omega_2+k_3v^3$, $\cdots$, $\Omega_{n-1}=u\Omega_{n-2}+k_{n-1}v^{n-1}$, $\Omega_n=u\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n$, 即 $\sum_{j=0}^{n} k_i u^{n-i}v^i=\Omega_n$. 于是证出 $(\Omega_n,\ uv)=1$ 成立即可. 由 $(u,\ v)=1$ 以及定理 2 有 $(u+k_1v,\ v)=1$, 此亦即 $(\Omega_1,\ v)=1$; 且继而，再由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u\Omega_1,\ v)=1$, $(u\Omega_1,\ v^2)=1$, 再由定理 2 有 $(u\Omega_1+k_2v^2,\ v^2)=1$, 亦即 $(\Omega_2,\ v^2)=1$; 之后，不难看出，再由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u\Omega_2,\ v^2)=1$, $(u\Omega_2,\ v^3)=1$, $(u\Omega_2+k_3v^3,\ v^3)=1$, $(\Omega_3,\ v^3)=1$; $\cdots$ $(\Omega_{n-1},\ v^{n-1})=1$, $(u\Omega_{n-1},\ v^n)=1$, $(u\Omega_{n-1},\ (-1)^c v^n)=1$. 至此，由定理 1 有 $(u\Omega_{n-1}+(-1)^c v^n,\ u\Omega_{n-1}(-1)^c v^n)=1$, 即 $(\Omega_n,\ u\Omega_{n-1}(-1)^c v^n)=1$, $(\Omega_n,\ uv)=1$. 本定理证毕.

定理 4　命题 1: 若 a,b,v 为整数，$(a,\ v)=|v|$, $(b,\ v)=1$, 有 $(a+b,\ v)=1$; 命题 2: 若 a,b,v 为整数，$(a,\ v)=|v|$, $(b,\ v)=1$, 有 $(a+(a+b),\ v)=1$.

证　令 k,u 为整数，$a=kv$, $(k,\ v)=1$, $b=u$, 命题 1 化为：u,k,v 为整数，$(u,\ v)=1$, 有 $(u+kv,\ v)=1$. 显然此乃定理 2 之命题，已证. 令 $c=a+b$, 命题 2 化为：a,c,v 为整数, $(a,\ v)=|v|$, $(c,\ v)=1$, 有 $(a+c,\ v)=1$. 与命题 1 相同. 本定理证毕.

定理 5　a,b 为正整数，$ab\neq 1$, $(a,\ b)=1$, 有 $a-b\neq 0$.（证略）

定理 6　1. a,b,c,d 为正整数，$(a,\ b)=(a,\ c)=(b,\ d)=1$, 则只有当 $a=d$, $b=c$ 时，$ab=cd$ 才有可能成立；2. a,b,c,d 为正整数，$abcd\neq 0$, $(a,\ c)=1$, 只有当 $d=Ua$, $b=Uc$, $U\neq 0$ 为整数时 $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$ 才有可能成立.（证略）

我们将 d,b 向 Ua,Uc 的转化叫作 U 变换.

定理 7　u,v 为整数，$uv\neq 0$, $(u,\ v)=1$, $p>3$ 为奇素数，且令

$$\psi(p,u,v)=\frac{(u+v)^p-(u^p+v^p)}{(u+y)puv}, \quad (3)$$

则有 $u+v$, uv, $\Psi(p,u,v)$ 三者两两互素，即

$$(u+v,\ uv)=(u+v,\ \psi(p,u,v))=(uv,\ \psi(p,u,v))=1; \tag{4}$$

且$(u+v,\ p)=1$时，有

$$((u+v)^{p-1}-puv\psi(p,u,v),\ p)=1, \tag{5}$$

$$(u+v,\ (u+v)^{p-1}-puv\psi(p,u,v))=1; \tag{6}$$

$(u+v,\ p)=p$时，有

$$\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\psi(p,u,v),\ p\right)=1, \tag{7}$$

$$\left(p(u+v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\psi(p,u,v)\right)=1. \tag{8}$$

证 (3)可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\langle(u+v)^{p-1}-puv\psi(p,u,v)\right\rangle. \tag{9}$$

由二项式定理有

$$(u+v)^p=u^p+C_p^1u^{p-1}v+C_p^2u^{p-2}v^2+\cdots+C_p^{p-2}u^2v^{p-2}+C_p^{p-1}uv^{p-1}+v^p, \tag{10}$$

且可化为

$$u^p+v^p=(u+v)\left\{(u+v)^{p-1}-puv\left\langle\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{C_p^2(u^{p-4}+v^{p-4})}{p(u+v)}uv+\cdots+\frac{C_p^{p-2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}\right\rangle\right\}. \tag{11}$$

比较(9)和(11)，有

$$\psi(p,u,v)=\frac{u^{p-2}+v^{p-2}}{u+v}+\frac{C_p^2(u^{p-4}+v^{p-4})uv}{p(u+v)}+\cdots+\frac{C_p^{(p-1)/2}}{p}(uv)^{(p-3)/2}. \tag{12}$$

因 p 为奇素数，所以 $p-2,\ p-4,\ p-6,\cdots$ 皆为奇数，于是 $u^{p-2}+v^{p-2},\ u^{p-4}+v^{p-4},\ u^{p-6}+v^{p-6},\cdots$ 一定能被 $u+v$ 整除，且亦因 p 为奇素数，$\dfrac{C_p^k}{p}$ 一定为整数（因为 $C_p^k=\dfrac{p!}{(p-k)!k!}$，其中 p 为素数，且 $k<p$，分母诸因子均小于 p，所以分子中的 p 一定不会与分母之任何素因子相约；若 p 为奇合数，则不然），所以(12)之各项皆为整数.

(3)还可化为

$$\begin{aligned}\psi(p,u,v)=\frac{1}{puv}\Big\{&(u+v)^{p-1}-\left\langle(u^{p-1}+v^{p-1})-(u^{p-3}+v^{p-3})uv+(u^{p-5}+v^{p-5})(uv)^2-\right.\\&\left.\cdots+(-1)^{(p-3)/2}(u^2+v^2)(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\right\rangle\Big\}\end{aligned} \tag{13}$$

注意到，当 j 为偶数时，有

$$\begin{aligned}u^j+v^j=&(u+v)^j+L_1(u+v)^{j-2}uv+L_2(u+v)^{j-4}(uv)^2+L_3(u+v)^{j-6}(uv)^3+\cdots\\&+L_{(j-4)/2}(u+v)^4(uv)^{(j-4)/2}+L_{(j-2)/2}(u+v)^2(uv)^{(j-2)/2}+L_{j/2}(uv)^{j/2}.\end{aligned} \tag{14}$$

至此，易见(12)和(13)最终皆可转化为

$$\begin{aligned}\psi(p,u,v)=&k_0(u+v)^{p-3}+k_1(u+v)^{p-5}uv+k_2(u+v)^{p-7}(uv)^2+\cdots\\&+k_{(p-5)/2}(u+v)^2(uv)^{(p-5)/2}+k_{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}.\end{aligned} \tag{15}$$

因 $p-2$ 为奇数，由 $a^p+b^p=(a+b)(a^{p-1}-a^{p-2}b+\cdots-ab^{p-2}+b^{p-1})$ 易得

$$u^{p-2}+v^{p-2}=(u+v)\left\langle(u^{p-3}+v^{p-3})-(u^{p-5}+v^{p-5})uv+(u^{p-7}+v^{p-7})(uv)^2-\cdots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}\right\rangle,$$

显见(12)右第一项可化为

$$\left(u^{p-3}+v^{p-3}\right)-\left(u^{p-5}+v^{p-5}\right)uv+\left(u^{p-7}+v^{p-7}\right)(uv)^2-\cdots+(-1)^{(p-3)/2}(uv)^{(p-3)/2}.$$

而(15)右第一项正是由此式第一项$\left(u^{p-3}+v^{p-3}\right)$转化而来，于是显见有$k_0=1$.事实上，只要注意到$(u+v)^{p-3}$是由$\left(u^{p-3}+v^{p-3}\right)$转化而来的，观察(13)向(15)之转化，显然有

$$k_0=\frac{1}{p}\left(\mathrm{C}_{p-1}^{1}+1\right)=1. \tag{16}$$

现在来证明$\left|k_{(p-3)/2}\right|=1$. 首先易见$k_{(p-3)/2}$是当$j=2,4,6,\ldots,p-1$时，(13)中的$u^j+v^j$向(15)中的$(u+v)^j$转化时生成的以$uv$为因子，不以$u+v$为因子的项（简称$uv$项）的系数的代数和. 我们用$\sigma_j$表示$uv$项的系数，显见$\sigma_j$亦即(14)中的$L_{j/2}$.例如

$$u^2+v^2=(u+v)^2-2uv,\quad \sigma_2=-2;$$

$$u^4+v^4=(u+v)^4-4(u+v)^2uv+2(uv)^2,\quad \sigma_4=2.$$

我们先根据(14)挑出(13)中的uv项，即

$$\begin{aligned}\psi(p,u,v)\text{中的}uv\text{项}&=\frac{1}{puv}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}(uv)^{(p-1)/2}-\sigma_{p-3}(uv)^{(p-3)/2}uv+\sigma_{p-5}(uv)^{(p-5)/2}(uv)^2-\cdots\right.\right.\\&\left.\left.+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2uv(uv)^{(p-3)/2}+(-1)^{(p-1)/2}(uv)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}\\&=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\cdots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\}(uv)^{(p-3)/2}.\end{aligned} \tag{17}$$

再由(17)得到

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle\sigma_{p-1}-\sigma_{p-3}+\sigma_{p-5}-\sigma_{p-7}+\cdots+(-1)^{(p-3)/2}\sigma_2+(-1)^{(p-1)/2}\right\rangle\right\} \tag{18}$$

现在来考察σ_j的变化规律. 首先注意到$j\geq 4$时，有

$$u^j+v^j=\left(u^2+v^2\right)\left(u^{j-2}+v^{j-2}\right)-\left(u^{j-4}+v^{j-4}\right)(uv)^2. \tag{19}$$

注意到j为偶数，我们先写出(19)的uv项，即

$$\sigma_j(uv)^{j/2}=\sigma_2uv\,\sigma_{j-2}(uv)^{(j-2)/2}-\sigma_{j-4}(uv)^{(j-4)/2}(uv)^2=\left(\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}\right)(uv)^{j/2}. \tag{20}$$

由(20)易见有

$$\sigma_j=\sigma_2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4},$$

再由$\sigma_2=-2$,有

$$\sigma_j=-2\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}. \tag{21}$$

由(21)显然有

$$\begin{aligned}\sigma_6&=-2\sigma_4-\sigma_2=-2(2)-(-2)=-2,\\\sigma_8&=-2\sigma_6-\sigma_4=-2(-2)-2=2,\\\sigma_{10}&=-2\sigma_8-\sigma_6=-2(2)-(-2)=-2,\\\sigma_{12}&=-2\sigma_{10}-\sigma_8=-2(-2)-2=2,\\&\cdots\end{aligned}$$

从$j=2$起，σ_j按照$-2,2,-2,2,\cdots$的规律排列，$j/2$为奇，$\sigma_j=-2$, $j/2$为偶，$\sigma_j=2$. 显见，$(p-1)/2$为奇数时(18)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(-2)-2+(-2)-2+\cdots+(-2)-1\right\rangle\right\}, \tag{22}$$

即

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle(-2)\frac{p-1}{2}-1\right\rangle\right\}=1; \tag{23}$$

$(p-1)/2$ 为偶数时(18)化为

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\{0-\langle 2-(-2)+2-(-2)+\cdots+2+1\rangle\}, \tag{24}$$

$$k_{(p-3)/2}=\frac{1}{p}\left\{0-\left\langle 2\cdot\frac{p-1}{2}+1\right\rangle\right\}=-1. \tag{25}$$

至此，我们已经得到 $k_0=|k_{(p-3)/2}|=1$. 由 $(u,\ v)=1$ 有 $(u+v,\ uv)=1$, $((u+v)^2,\ uv)=1$, 再由定理 3 有 $\left(\sum_{j=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}}(uv)^j,\ (u+v)^2uv\right)=1$. 因(15)即 $\psi(p,u,v)=\sum_{j=0}^{(p-3)/2}k_i\langle(u+v)^2\rangle^{\frac{p-3}{2}-i}(uv)^i$, 于是，显然有 $(\psi(p,u,v),\ (u+v)^2uv)=1$, 再注意到 $(u+v,\ uv)=1$, 易见(4)成立.

如果 $(u+v,\ p)=1$, 由(4)容易看出有 $((u+v)^{p-1},\ puv\psi(p,u,v))=1$, 之后，再由定理 1 不难看出有 $((u+v)^{p-1}-puv\psi(p,u,v),\ (u+v)^{p-1}puv\psi(p,u,v))=1$. 由此知(5)(6)成立.

如果 $(u+v,\ p)=p$, 由(4)容易看出有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ uv\psi(p,u,v)\right)=1$, 之后，再由定理 1 不难看出有 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p}-uv\psi(p,u,v),\ \frac{(u+v)^{p-1}}{p}uv\psi(p,u,v)\right)=1$, 注意到此时 $\left(\frac{(u+v)^{p-1}}{p},\ p\right)=p$, 于是易见(7)(8)成立.

本定理证毕.

将 v 换成 $-v$，本定理仍成立，其形式称为减法形式，写为：

$$\psi(p,u,-v)=\frac{(u-v)^p-(u^p-v^p)}{-(u-v)puv},$$

$$u^p-v^p=(u-v)\langle(u-v)^{p-1}+puv\psi(p,u,-v)\rangle.$$

定理 8　a,b 为正整数，$p>3$ 为奇素数，令 $\psi(p,a,b)=\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}$, 有

$$\psi(p,a,b)-\frac{(a+b)^{p-1}-(a^{p-1}+b^{p-1})}{2ab}<0.$$

证　被证式亦即

$$\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}-\frac{(a+b)^{p-1}-(a^{p-1}+b^{p-1})}{2ab}<0,$$

$$\frac{(a+b)^p-(a^p+b^p)}{(a+b)pab}-\frac{(a+b)^p-(a+b)(a^{p-1}+b^{p-1})}{(a+b)2ab}<0,$$

$$2\langle(a+b)^p-(a^p+b^p)\rangle-p\langle(a+b)^p-(a+b)(a^{p-1}+b^{p-1})\rangle<0,$$

$$(p-2)\langle(a+b)^p-(a^p+b^p)\rangle-pab(a^{p-2}+b^{p-2})>0,$$

展开 $(a+b)^p$，显见成立. 本定理证毕.

定理 9　a,b 为正整数，$a-2b>0$, $0<\varepsilon<1$, 有 $1<\frac{a-b\varepsilon}{a-b}<2$.

证　由题设条件，且每一步都时刻注意题设条件，有

$$0<2b<a,$$

$$0<2b-b\varepsilon<a,$$
$$0<b-b\varepsilon<a-b,$$
$$0+(a-b)<b-b\varepsilon+(a-b)<a-b+(a-b),$$
$$a-b<a-b\varepsilon<2(a-b),$$
$$1<\frac{a-b\varepsilon}{a-b}<2.$$

本定理证毕.

2 费马最后定理之证明

定理 10 $p>3$ 为奇素数，费马方程

$$x^p+y^p=z^p \tag{26}$$

无两两互素的正整数解 x,y,z.

证 将(26)看成一个等式，考虑两两互素的正整数 x,y,z 具有怎样的结构及这些结构之间具有怎样的关系时，它才有可能成立. 我们先寻找这些结构及关系，然后指出其中的矛盾. 显然，不妨只考虑 $x<y$ 的情形.

2.1 两种情况

结论 1 若 $x=1$, 则(26)不能成立.

证 令 $x=1,\ z=(y+1)+t,\ t\geq 0$ 为整数，于是，(26)化为 $1+y^p=\langle(y+1)+t\rangle^p$. 显然，这是一个一定不能成立的式子. 本结论证毕.

令

$$\psi(p,x,y)=\frac{(x+y)^p-(x^p+y^p)}{(x+y)pxy}, \tag{27}$$

则由定理 7 有：$x+y,\ xy,\ \psi(p,x,y)$ 三者两两互素，即

$$(x+y,\ xy)=(x+y,\ \psi(p,x,y))=(xy,\ \psi(p,x,y))=1; \tag{28}$$

$(x+y,\ p)=1$ 时，(26)可化为

$$(x+y)\langle(x+y)^{p-1}-pxy\psi(p,x,y)\rangle=z^p, \tag{29}$$

有

$$(x+y,\ (x+y)^{p-1}-pxy\psi(p,x,y))=1; \tag{30}$$

$(x+y,\ p)=p$ 时，(26)可化为

$$p(x+y)\left\langle\frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\psi(p,x,y)\right\rangle=z^p, \tag{31}$$

有

$$\left(p(x+y),\ \frac{(x+y)^{p-1}}{p}-xy\psi(p,x,y)\right)=1. \tag{32}$$

由(29)(30)(31)(32)显见，应分为以下两种情况进行讨论：

情况 I：$(x+y,\ p)=1$;

情况 II：$(x+y,\ p)=p$.

为揭示 z 与 $x+y$ 之间的关系，令

$$z=(x+y)-h, \tag{33}$$

显然 h 为正整数，于是(26)可化为

$$x^p+y^p=\langle (x+y)-h\rangle^p. \tag{34}$$

展开(34), 且注意到由(27)有 $(x+y)^p-(x^p+y^p)=(x+y)pxy\psi(p,x,y)$, 易见有

$$\begin{aligned}&h^p-C_p^{p-1}(x+y)h^{p-1}+C_p^{p-2}(x+y)^2h^{p-2}-C_p^{p-3}(x+y)^3h^{p-3}+\cdots\\&+C_p^3(x+y)^{p-3}h^3-C_p^2(x+y)^{p-2}h^2+C_p^1(x+y)^{p-1}h-(x+y)pxy\psi(p,x,y)=0.\end{aligned} \tag{35}$$

结论 2　1. 只有 $(h,\ p)=p$ 且 $((x+y)xy\psi(p,x,y),\ p)=p$ 时，(35)才可能成立；2. $(x+y,\ p)=p$, $(xy,\ p)=p$, $(\psi(p,x,y),\ p)=p$, 不能同时有其二，或同时有其三.

证　除左第一项外，(35)各项明显含有因子 p, 如果 $(h,\ p)=1$, 除以 p, 左第一项化为分数，(35)一定不能成立；而 $(h,\ p)=p$ 时，若 $((x+y)xy\psi(p,x,y),\ p)=1$, 除以 p^2, 左最后一项化为分数，(35)亦一定不能成立，显见第一命题为真. 再由(28)知第二命题为真. 本结论证毕.

结论 3　只有当 h 只在 $(x+y)pxy\psi(p,x,y)$ 内选择因子时，(35)才有可能成立.

证　除左最后一项之外，(35)各项明显含有因子 h, 于是易见，只有最后一项亦以 h 为因子，亦即 $\dfrac{(x+y)pxy\psi(p,x,y)}{h}$ 为整数，(35)才有可能成立. 而 $\dfrac{(x+y)pxy\psi(p,x,y)}{h}$ 为整数，只有当 h 只在 $(x+y)pxy\psi(p,x,y)$ 内选择因子时才有可能. 本结论证毕.

结论 4　对于情况 I, 1. 只有当

$$(h,\ x+y)=(x+y)^{1/p} \tag{36}$$

时，(35)才有可能成立；2. 令 k,m 为正整数且分别表示 $xy\psi(p,x,y)$ 和 h 所含因子 p 的最高指数，亦即 $p^k\in xy\psi(p,x,y)$ 且 $\left(\dfrac{xy\psi(p,x,y)}{p^k},\ p\right)=1$, $p^m\in h$ 且 $\left(\dfrac{h}{p^m},\ p\right)=1$, 则只当 $k=m$ 时，(35)才有可能成立.

证　除以 $(x+y)$, (35)化为

$$\begin{aligned}&\frac{h^p}{x+y}-C_p^{p-1}h^{p-1}+C_p^{p-2}(x+y)h^{p-2}-C_p^{p-3}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots\\&+C_p^3(x+y)^{p-4}h^3-C_p^2(x+y)^{p-3}h^2+C_p^1(x+y)^{p-2}h-pxy\psi(p,x,y)=0.\end{aligned} \tag{37}$$

不难看出，只有左第一项亦为整数，(37)才有可能成立，而显然只有 $(h,\ x+y)\neq 1$, 左第一项才有可能为整数. 本情况有 $(x+y,\ pxy\psi(p,x,y))=1$, 所以(37)左最后一项不再含有 $(x+y)$ 的任何素因子，而由 $(h,\ x+y)\neq 1$ 知(37)左第二项必含 $(x+y)$ 的某些素因子且左第三项至倒数第二项明显含 $(x+y)$ 之全部因子，于是若 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=t\neq 1$, 除以 t 的一个素因子 t_1, 左最后一项化为分数，(37)一定不能成立. 无疑只有 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=1$, (37)才有可能成立. 由(30)知本情况 $x+y$ 为一个 p 次幂是(29)成立的必要条件，所以 $\left(\dfrac{h^p}{x+y},\ x+y\right)=1$ 可化以为 $\left(\left\langle\dfrac{h}{(x+y)^{1/p}}\right\rangle^p,\ \langle(x+y)^{1/p}\rangle^p\right)=1$, 且易见由此有 $\left(\dfrac{h}{(x+y)^{1/p}},\ (x+y)^{1/p}\right)=1$, $(h,\ (x+y)^{2/p})=(x+y)^{1/p}$, 显见第一命题为真；若 $k>m$, 除以 p^{m+2}, 左倒数第二项化为分数，(37)一定不能成立；若 $k<m$, 除以 p^{m+1}, 左最后一项化为分数，

(37)亦一定不能成立. 我们注意到当 $k=m$ 时，除以 $p^{m+\zeta}$，ζ 为正整数，当 $\zeta=1$ 时，(37)无分数项，当 $\zeta\geq 2$ 时，左最后两项同时化为分数，(37)有可能成立. 由此显见第二命题为真. 本结论证毕.

结论 5　对于情况 II, 只有当

$$\left(h,\ p(x+y)\right)=\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p} \tag{38}$$

时，(35)才有可能成立.

证　除以 $p(x+y)$, (35)化为

$$\frac{h^p}{p(x+y)}-\frac{C_p^{p-1}}{p}h^{p-1}+\frac{C_p^{p-2}}{p}(x+y)h^{p-2}-\frac{C_p^{p-3}}{p}(x+y)^2h^{p-3}+\cdots$$
$$+\frac{C_p^3}{p}(x+y)^{p-4}h^3-\frac{C_p^2}{p}(x+y)^{p-3}h^2+\frac{C_p^1}{p}(x+y)^{p-2}h-xy\psi(p,x,y)=0. \tag{39}$$

p 为奇素数，C_p^k/p 一定为整数，易见除了左第一项外，(39)各项皆为整数. 无疑，只有左第一项亦为整数，(39)才有可能成立. 而显见，只有 $\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1$, 左第一项才有可能为整数. 注意到本情况 $\left(p(x+y),\ xy\psi(p,x,y)\right)=1$, 所以(39)左最后一项不再含 $p(x+y)$ 之任何素因子，且显见由 $\left(h,\ p(x+y)\right)\neq 1$ 知左第二项必含 $p(x+y)$ 之某些素因子，且左第三项至倒数第二项均含 $p(x+y)$ 之全部因子，于是若 $\left(\frac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=t\neq 1$, 除以 t 的一个素因子 t_1, 左最后一项化为分数，(39)一定不能成立. 只有 $\left(\frac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=1$, (39)才可能成立. 由(32)知本情况 $p(x+y)$ 为一个 p 次幂是(31)成立的必要条件, 于是 $\left(\frac{h^p}{p(x+y)},\ p(x+y)\right)=1$ 可化为 $\left(\left\langle\frac{h}{\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}}\right\rangle^p,\ \left\langle\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}\right\rangle^p\right)=1$, 由此有 $\left(\frac{h}{\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}},\ \left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}\right)=1$, $\left(h,\ \left\langle p(x+y)\right\rangle^{2/p}\right)=\left\langle p(x+y)\right\rangle^{1/p}$, 易见本结论成立. 本结论证毕.

为揭示 x,y,z,h 之间的关系，令

$$x=z-r, \tag{40}$$
$$y=z-s, \tag{41}$$

显然 r,s 为正整数. 于是(26)(34)分别化为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=z^p, \tag{42}$$
$$(z-r)^p+(z-s)^p=\left\{\left\langle(z-r)+(z-s)\right\rangle-h\right\}^p. \tag{43}$$

注意到 $z=\left\langle(z-r)+(z-s)\right\rangle-\left\langle z-(r+s)\right\rangle$，于是(42)可写为

$$(z-r)^p+(z-s)^p=\left\{\left\langle(z-r)+(z-s)\right\rangle-\left\langle z-(r+s)\right\rangle\right\}^p. \tag{44}$$

由(43)(44)有

$$h=z-(r+s), \tag{45}$$

且由此有

$$z-r=s+h, \tag{46}$$

$$z-s=r+h, \tag{47}$$
$$z=r+s+h. \tag{48}$$

于是(42)又可写为

$$(s+h)^p+(r+h)^p=(r+s+h)^p. \tag{49}$$
$$(s+h)^p+(r+h)^p=z^p. \tag{49-1}$$

展开(42)有

$$z^p-C_p^1(r+s)z^{p-1}+C_p^2(r^2+s^2)z^{p-2}-C_p^3(r^3+s^3)z^{p-3}+\cdots$$
$$+C_p^{p-3}(r^{p-3}+s^{p-3})z^3-C_p^{p-2}(r^{p-2}+s^{p-2})z^2+C_p^{p-1}(r^{p-1}+s^{p-1})z-(r^p+s^p)=0. \tag{50}$$

结论 6　对(42)的讨论，只考虑 z,r,s 三者两两互素之情形即可.

证　由本定理的题设 x,y,z 两两互素以及(40)(41)有 $(z-r,\ z-s)=(z-r,\ z)=(z-s,\ z)=1$. 注意到只有当 $(z,\ r)=1$ 时，$(z-r,\ z)=1$ 才有可能成立，如若 $(z,\ r)=t\neq 1$, 则一定有 $(z-r,\ z)=t\neq 1$, 与 $(z-r,\ z)=1$ 相悖. 同理，只有当 $(z,\ s)=1$ 时，$(z-s,\ z)=1$ 才有可能成立. 且易见当 $(z,\ rs)=1$ 时，只有 $(r,\ s)=1$, (50)才有可能成立，因如果 $(r,\ s)=t\neq 1$, 除了左第一项外，(50)各项均含因子 t, 除以 t, 左第一项将化为分数. 本结论证毕.

由定理 7, 且注意到 $(z-r)+(z-s)=z+\langle z-(r+s)\rangle$, 易见(42)亦可写为

$$\langle(z-r)+(z-s)\rangle\left\{\langle(z-r)+(z-s)\rangle^{p-1}-p(z-r)(z-s)\psi(p,z-r,z-s)\right\}=z^p, \tag{51}$$

$$\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\}\left(\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\psi(p,z-r,z-s)\right)=z^p, \tag{52}$$

$((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时，还可写为

$$p\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\}\left(\frac{\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\psi(p,z-r,z-s)\right)=z^p; \tag{53}$$

且 $((z-r)+(z-s),\ p)=1$ 时有

$$\left(z+\langle z-(r+s)\rangle,\ \left\{z+\langle z+(r+s)\rangle\right\}^{p-1}-p(z-r)(z-s)\psi(p,z-r,z-s)\right)=1, \tag{54}$$

$((z-r)+(z-s),\ p)=p$ 时有

$$\left(p\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\},\ \frac{\left\{z+\langle z-(r+s)\rangle\right\}^{p-1}}{p}-(z-r)(z-s)\psi(p,z-r,z-s)\right)=1. \tag{55}$$

结论 7　对于情况 I, 即 $((z-r)+(z-s),\ p)=1$ 时，只有令

$$z=qA, \tag{56}$$
$$r+s=qB, \tag{57}$$
$$(A,\ B)=1, \tag{58}$$
$$h=q(A-B), \tag{59}$$
$$(q,\ A(A-B))=1, \tag{60}$$
$$(z-r)+(z-s)=q^p, \tag{61}$$
$$(h,\ (z-r)+(z-s))=q, \tag{62}$$