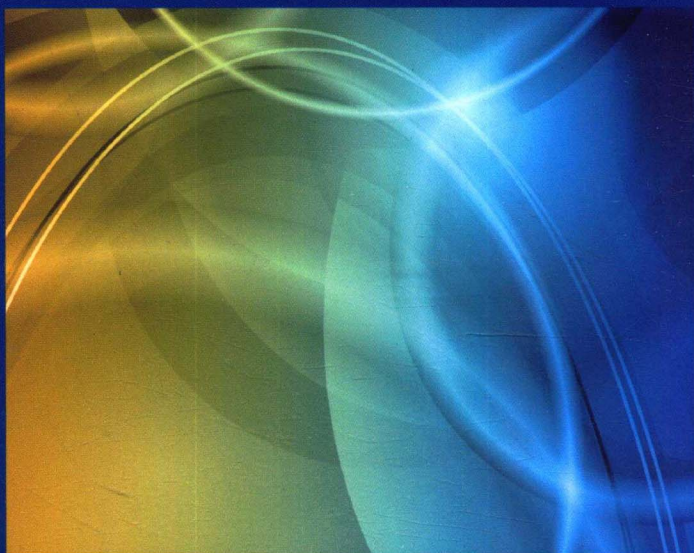


忆阻电路与多稳定性

包伯成 徐 权 包 涵 著



科学出版社

忆阻电路与多稳定性

包伯成 徐 权 包 涵 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书基于新建的各种忆阻模拟器,提出多种新颖的忆阻电路与系统,并开展相应的多稳定性分析。内容包括:忆阻模拟器的数学建模与特征分析,忆阻电路与系统的电路综合、数学建模与稳定性分析,忆阻电路与系统多稳定性现象的数值仿真、电路仿真与硬件实验。各章节内容具有一定的独立性,读者可以参照不同章节内容对忆阻电路与系统开展相应的多稳定性研究。

本书是作者三年多来部分研究成果的整理集成和内容提炼,选择了一些浅显易懂的内容,侧重忆阻电路与系统的多稳定性分析,可读性较强,可作为高等院校电子科学与技术学科电路及系统方向的研究生教材或教学参考书,也可作为从事自然科学领域研究的高校教师的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

忆阻电路与多稳定性/包伯成,徐权,包涵著. —北京:科学出版社, 2018.7

ISBN 978-7-03-058184-6

I. ①忆… II. ①包… ②徐… ③包… III. ①电阻电路-稳定性 IV. ①TM13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第139364号

责任编辑:陈 静 梁晶晶 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:师艳茹 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

河北鹏润印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年7月第 一 版 开本:720×1 000 1/16

2018年7月第一次印刷 印张:12 插页:9

字数:250 000

定价:82.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

近年来,忆阻及其应用电路受到了各国政府、学术界及工业界的极大关注,得到了快速发展,世界各个国家竞相研制并发展忆阻器,其已成为一个新的竞争领域。最新文献报道,忆阻器实现了硬件“突触”组件或“突触”模拟器,可在人工神经形态网络、类脑计算等方面得到应用,解决了传统算法难以完成的任务,如模式识别、在线学习与分类、编码与压缩等。因此,忆阻器与基于忆阻构建的各种应用电路有着潜在的、广泛的应用前景。

作为电网络理论的第四种电路元件,忆阻有着天然的非线性和可塑性,与其他电路元件有机组合,容易构建出基于忆阻的混沌振荡电路和神经形态电路等应用电路。基于已有的分段线性忆阻模型、非线性磁控忆阻模型或广义忆阻模拟器,研究人员发现了多种忆阻混沌振荡电路,并对其动力学特性展开了深入研究。除忆阻混沌振荡电路外,最有前途且最重要的应该是忆阻神经形态电路,它通过电路器件模仿与生物神经元和突触具有类似或相同机制的硅基神经元和纳米突触,以期在集成度和功能方面实现与生物脑类似的类脑计算机。近年来,已有文献对忆阻神经形态电路的混沌行为和学习过程等进行了建模与仿真。这些忆阻应用电路可展现丰富且复杂的动力学行为,包括依赖于电路参数的混沌和超混沌现象、依赖于忆阻内部初始状态的多稳定性或超级多稳定性,以及由无平衡点或稳定线平衡点所产生的隐藏混沌和超混沌吸引子现象等。

多稳定性是非线性动力学系统中普遍存在的一种物理现象,在系统参数不变的情况下,改变初始状态,系统运行轨迹可能渐近趋向点、混沌、周期、准周期等不同的稳定状态。在一些特殊的耦合系统中,还可观测到无限多吸引子的共存现象,即超级多稳定性。忆阻的特殊性质使得忆阻电路具有多稳定性或超级多稳定性,极易呈现多吸引子或无限多吸引子的共存现象。忆阻电路所具有的多稳定状态,一方面可为工程应用提供更多的灵活度,另一方面也会导致应用系统工作状态的不稳定。已有文献利用神经网络的多稳定性进行图像去噪和对比度强化处理,取得了良好的效果。然而,忆阻电路的多稳定性或超级多稳定性研究尚处于起步阶段。为了推动忆阻电路的工程应用,开展忆阻电路多稳定性或超级多稳定性的现象揭示、吸引盆初始状态空间定位及多稳定状态控制策略研究显得尤为重要。

不同于自激吸引子,隐藏吸引子的吸引盆不与任何不稳定平衡点相交,它是

近年来新定义的一类特殊吸引子,得到了研究人员的广泛关注。隐藏吸引子也是一种多稳定性现象,这一特殊现象在蔡氏电路、Hopfield 神经网络、Rabinovich 系统等非线性动力学系统中都有发现。已有文献表明,隐藏吸引子对系统初始状态具有敏感依赖性,与系统的多稳定性有着密切的联系。在特殊的初始状态下,系统轨道可形成稳定的混沌吸引子或周期极限环,否则将收敛至稳定点或发散至无穷。隐藏吸引子的存在增加了系统的不确定性,因此,对隐藏吸引子进行预测和控制是非线性动力学系统工程应用时需要关注的新问题。

因此,需要进一步发展和完善忆阻电网络理论,探讨忆阻的非线性在混沌振荡电路复杂动力学与形成机理方面的作用,揭示忆阻的可塑性在神经网络及神经形态电路演化与功能方面的意义,并针对应用背景综合设计多种新颖的忆阻电路,进而积极推动这类电路在信息科学与计算神经科学等各个领域的工程应用。

全书共 6 章和 1 个附录。正文部分主要涉及分立元器件实现的忆阻模拟器、自治与非自治忆阻混沌电路、忆阻电路的多稳定性、忆阻电路与系统的超级多稳定性、忆阻神经系统的非对称吸引子等内容,附录给出改进型常用 MATLAB 程序代码。

本书内容主要源自国家自然科学基金项目(51777016、61601062、51607013、51277017)和江苏省科技计划(自然科学基金)项目(BK20160282)的创新成果,是作者三年来部分科研成果的整理集成和内容提炼。作者在从事科学研究和本书的写作过程中得到了许多同行的支持与帮助,特别是其中许多成果是作者与合作者共同完成的,作者在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请专家和读者批评指正!

包伯成 徐 权 包 涵

2018 年 3 月

目 录

前言

第 1 章	分立元器件实现的忆阻模拟器	1
1.1	忆阻定义与本质特征	1
1.1.1	理想忆阻的定义	1
1.1.2	忆阻的一般定义	3
1.1.3	忆阻的本质特征	4
1.2	基于运放与乘法器的忆阻模拟器	9
1.2.1	磁控忆阻的数学模型	9
1.2.2	正弦电压激励分析	10
1.2.3	磁控忆阻的本质特征	11
1.2.4	磁控忆阻模拟器	12
1.2.5	PSIM 电路仿真验证	13
1.3	基于二极管桥的广义忆阻模拟器	14
1.3.1	广义忆阻模拟器建模	14
1.3.2	广义忆阻的本质特征	16
1.3.3	广义忆阻的实验验证	17
1.3.4	广义忆阻的四种类型	18
第 2 章	自治和非自治忆阻混沌电路	20
2.1	三阶自治忆阻带通滤波器	20
2.1.1	三阶忆阻 BPF 混沌电路	20
2.1.2	平衡点及其稳定性	23
2.1.3	动力学行为的数值仿真	24
2.1.4	硬件实验验证	27
2.2	三阶自治忆阻振荡电路	29
2.2.1	忆阻振荡器的数学建模	29
2.2.2	准周期与混沌簇发振荡	31
2.2.3	忆阻振荡器的复杂动力学	33
2.2.4	动力学行为的 0-1 测试	35
2.2.5	硬件制作与实验证实	38
2.3	二阶非自治忆阻混沌电路	40

2.3.1	二阶非自治忆阻电路	41
2.3.2	平衡点及其稳定性演化	42
2.3.3	动力学行为的数值仿真	44
2.3.4	硬件实验与捕捉的吸引子	47
第 3 章	忆阻电路的多稳定性	50
3.1	非理想压控忆阻蔡氏电路	50
3.1.1	改进型忆阻蔡氏电路	51
3.1.2	依赖于初始状态的动力学行为	55
3.1.3	归一化忆阻系统与稳定性	60
3.1.4	不同初始条件的忆阻系统动力学	62
3.1.5	依赖于初始条件的多吸引子	66
3.2	改进型忆阻带通滤波器	69
3.2.1	改进型忆阻二极管桥模拟器	69
3.2.2	三阶忆阻 BPF 混沌电路	72
3.2.3	忆阻 BPF 电路的动力学行为	74
3.2.4	依赖于初始条件的多吸引子	75
3.2.5	硬件实验验证	76
3.3	改进型忆阻文氏桥振荡器	79
3.3.1	改进型非理想压控忆阻模拟器	80
3.3.2	忆阻文氏桥振荡器的建模	81
3.3.3	线平衡点及其稳定性分布	82
3.3.4	双稳定性动力学行为	83
3.3.5	仿真与捕捉的共存吸引子	84
第 4 章	忆阻电路的超级多稳定性	87
4.1	基于有源 BPF 的忆阻蔡氏电路	87
4.1.1	忆阻蔡氏电路的数学模型	87
4.1.2	线平衡点与稳定性分布	90
4.1.3	数值仿真和电路实验	91
4.1.4	共存无限多吸引子行为	95
4.2	基于两个忆阻的蔡氏超混沌电路	100
4.2.1	忆阻模拟器的数学建模	101
4.2.2	忆阻蔡氏电路的数学建模	104
4.2.3	面平衡点与稳定性分布	105
4.2.4	基于初始条件的超级多稳定性	108
4.2.5	硬件实验验证	113

第 5 章 忆阻系统的超级多稳定性	116
5.1 基于忆阻的退化 Jerk 系统	116
5.1.1 数学模型及其非对称吸引子	116
5.1.2 四根线平衡点的稳定性分析	118
5.1.3 共存无限多吸引子行为	119
5.1.4 吸引盆与无限多吸引子	120
5.1.5 瞬态周期稳态混沌的转移行为	122
5.1.6 硬件实验与 PSIM 仿真	123
5.2 忆阻超混沌隐藏振荡系统	127
5.2.1 忆阻超混沌系统的构建	128
5.2.2 典型隐藏超混沌吸引子	130
5.2.3 依赖于参数的隐藏超混沌行为	132
5.2.4 依赖于忆阻初值的超级多稳定性	133
5.2.5 实验测试与 PSIM 仿真	136
第 6 章 忆阻神经系统的非对称吸引子	140
6.1 忆阻 HR 神经元模型	140
6.1.1 HR 神经元模型概述	141
6.1.2 忆阻 HR 神经元模型	141
6.1.3 共存非对称吸引子	142
6.1.4 隐藏共存非对称行为	144
6.1.5 电路设计和面包板实验	146
6.2 忆阻 Hopfield 神经网络	151
6.2.1 双曲型忆阻模拟器	151
6.2.2 忆阻 HNN 模型及其有界性	154
6.2.3 平衡点及稳定性分析	156
6.2.4 非对称吸引子的共存行为	159
6.2.5 电路仿真与硬件实验	163
参考文献	168
附录 改进型常用 MATLAB 程序代码	176
彩图	

第 1 章 分立元器件实现的忆阻模拟器

不同于电阻、电容和电感三种基本电路元件,忆阻(memristor)是第四种基本电路元件,具有天然的非线性特性。近年来,根据忆阻的定义^[1-4],学者提出了多种可物理实现的、有着忆阻端口特性的模拟器^[5-13],专门用于各种忆阻应用电路的理论分析和实验研究。忆阻模拟器主要可分成两大类:一类是基于运算放大器(简称运放)和模拟乘法器等效实现的理想或非理想忆阻模拟器^[5,13-15],另一类是二极管桥级联 RC、RL 或 LC 滤波器的广义忆阻模拟器^[9,10,16-18]。

1.1 忆阻定义与本质特征

从理想忆阻的定义出发,给出忆阻元件的基本概念。然后由忆阻的一般定义,拓展到广义忆阻或忆阻系统的定义式。进一步,以 HP TiO₂ 忆阻器的线性杂质漂移模型为例,阐述忆阻的三个本质特征。

1.1.1 理想忆阻的定义

忆阻元件是从实际忆阻器抽象出来的电路模型,可以记忆流经它的电荷数量^[1]。忆阻元件是一种有记忆功能的非线性基本电路元件。忆阻元件所具有的非线性特性消失后,它将退化为一个线性电阻元件,因此忆阻元件也称为广义电阻元件。

忆阻元件是一个基本的无源二端电路元件,分为荷控型(或流控型)和磁控型(或压控型)两种^[1,2]。

忆阻元件的定义是:如果一个二端元件,在任一时刻的磁通量 $\varphi(t)$ 和电荷量 $q(t)$ 之间存在代数关系

$$f(\varphi, q) = 0 \quad (1.1)$$

即这一关系可以由 φ - q 或 q - φ 平面上的一条曲线所确定,则此二端元件称为忆阻元件。

忆阻元件的符号如图 1.1 所示。当式(1.1)由电荷的单值函数(single-valued function)表示时,称其为电荷控制型忆阻(charge-controlled memristor)元件(简称荷控忆阻元件或荷控忆阻,也称流控忆阻);相应地,当式(1.1)由磁通量的单值函

数表示时, 称其为磁通控制型忆阻 (flux-controlled memristor) 元件 (简称磁控忆阻元件或磁通忆阻, 也称压控忆阻)。两类忆阻元件的特性曲线是一条通过原点的非线性曲线, 分别如图 1.2(a) 和图 1.2(b) 所示。

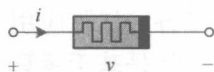
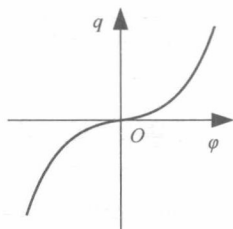
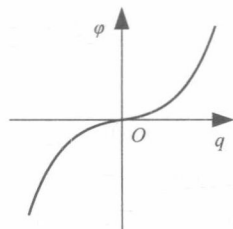


图 1.1 忆阻元件的符号



(a) 荷控忆阻



(b) 磁控忆阻

图 1.2 忆阻元件的特性曲线

荷控忆阻元件可以用如图 1.2(a) 中 q - φ 平面上一条通过原点的特性曲线 $\varphi = \varphi(q)$ 来描述, 其特性曲线的斜率即磁通量按电荷的改变率

$$M(q) = \frac{d\varphi(q)}{dq} \quad (1.2)$$

称为忆阻。 $M(q)$ 是关于 $q(t)$ 的非线性函数 (nonlinear function), 具有与电阻 (值) 一样的量纲, 其单位是欧姆 (Ω)。

磁控忆阻元件可以用如图 1.2(b) 中 φ - q 平面上一条通过原点的特性曲线 $q = q(\varphi)$ 来描述, 其特性曲线的斜率即电荷量按磁通的改变率

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \quad (1.3)$$

称为忆导 (memductance)。 $W(\varphi)$ 是关于 $\varphi(t)$ 的非线性函数, 具有与电导 (值) 一样的量纲, 其单位是西门子 (S)。

假设忆阻元件上的电压 $v(t)$ 与电流 $i(t)$ 采用关联参考方向。对于荷控忆阻元件, 流过它的电流 $i(t)$ 和它两端的电压 $v(t)$ 之间的伏安关系 (voltage-current relation, VCR) 可以描述为

$$v(t) = M(q)i(t) \quad (1.4)$$

对于磁控忆阻元件, 流过它的电流和它两端的电压之间的 VCR 可以描述为

$$i(t) = W(\varphi)v(t) \quad (1.5)$$

若 $v(t)$ 与 $i(t)$ 为非关联参考方向, 则式 (1.4) 和式 (1.5) 的右侧应加以负号。

式 (1.4) 和式 (1.5) 也分别称为荷控忆阻和磁控忆阻的本构关系 (constitutive relation)。

式 (1.4) 中的内部状态变量是电荷 $q(t)$, 它是电流 $i(t)$ 的积分。典型荷控忆阻

VCR 曲线如图 1.3 (a) 所示。式 (1.5) 中的内部状态变量是磁通 $\varphi(t)$ ，它是电压 $v(t)$ 的积分。典型磁控忆阻 VCR 曲线如图 1.3 (b) 所示。

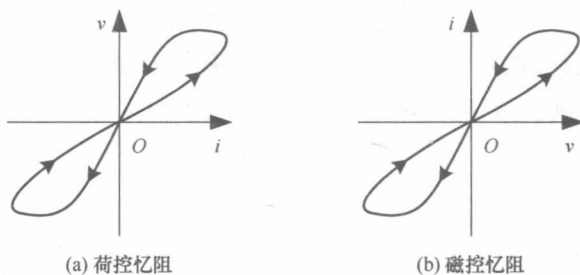


图 1.3 忆阻元件的 VCR

从图 1.3 中可以看出，忆阻元件的 VCR 具有典型的斜体“8”字型的紧磁滞回线 (pinched hysteresis loop) 特性，除原点外，荷控忆阻元件的 $v(t)$ 是 $i(t)$ 的双值函数 (double-valued function)，而磁控忆阻元件的 $i(t)$ 是 $v(t)$ 的双值函数。

以磁控忆阻说明忆阻的无源性和有源性。上述磁控忆阻所消耗的即时功率为

$$p(t) = W(\varphi)v(t)^2 \geq 0 \quad (1.6)$$

从时刻 t_0 至 t ，对所有 $t \geq t_0$ ，流入此忆阻的能量满足

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad (1.7)$$

若图 1.2 (a) 中磁控忆阻的特性曲线是单调上升的，其磁通 φ 是电荷 q 的单值函数，则此元件是无源的，称为无源忆阻元件^[1]。若图 1.2 (a) 中磁控型忆阻元件的特性曲线是非单调上升的，其忆导在 q 的变化区间有可能变成负值，则此元件是有源的，称为有源忆阻元件。

1.1.2 忆阻的一般定义

一个时不变忆阻元件是任意的二端电气器件，它的即时端口电流 $i(t)$ 与电压 $v(t)$ 遵循状态依赖的欧姆定律 (Ohm's law)^[3]。流控忆阻 (current-controlled memristor) 可定义为

$$\begin{cases} v = M(\mathbf{x})i \\ d\mathbf{x}/dt = f(\mathbf{x}, i) \end{cases} \quad (1.8)$$

式中， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 为 n 维状态变量 (state variable)，是由一个 n 维微分方程 (称为关联状态方程) 构成的系统定义； M 为 $\mathbf{x}$ 的连续函数，称为忆阻 (值)；忆阻的状态方程 (state equation) 为电流 $i(t)$ 的函数。或者，压控忆阻

(voltage-controlled memristor) 可定义为

$$\begin{cases} i = W(\mathbf{x})v \\ \mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = f(\mathbf{x}, v) \end{cases} \quad (1.9)$$

式中, W 为 $\mathbf{x}$ 的连续函数, 称为忆导; 忆阻的状态方程为电压 $v(t)$ 的函数。

理想流控(或荷控)忆阻可定义为

$$\begin{cases} v = M(q)i \\ \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = i \end{cases} \quad (1.10)$$

或等效为

$$\varphi = f(q) \quad (1.11)$$

式中, φ 和 q 分别表示磁通和电荷, $f(q) = \int M(q)\mathrm{d}q + \text{任意常数}$ 。由电路对偶性, 理想压控(或磁控)忆阻可定义为

$$\begin{cases} i = W(\varphi)v \\ \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t = v \end{cases} \quad (1.12)$$

或等效为

$$q = g(\varphi) \quad (1.13)$$

忆阻的概念可以拓展到更一般的称为忆阻系统的动力学系统(dynamical system)^[4]。一个时不变 n 阶 u 控制的忆阻系统(memristive system)也称为一个广义忆阻^[3], 定义为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = g(\mathbf{x}, u)u \\ \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \end{cases} \quad (1.14)$$

式中, $g(\mathbf{x}, u)$ 为一个分段连续函数且 $g(\mathbf{x}, 0) \neq \infty$, y 和 u 表示电路变量, $\mathbf{x}$ 为一个内部状态变量的 n 维矢量, $\dot{\mathbf{x}}$ 为状态矢量的时间导数。若 $i(t)$ 是输入, 则式(1.14)称为一个广义流控忆阻; 若 $v(t)$ 是输入, 则式(1.14)称为一个广义压控忆阻。从实际物理器件来看, 可设定 $g(\mathbf{x}, u)$ 为一个有界函数, $f(\mathbf{x}, u)$ 为一个利普希茨(Lipschitz)函数。注意, 忆阻与广义忆阻的区别在于后者允许忆阻(或忆导)包含控制变量 u , 其限定条件为: 当 $u = 0$ 时, $g(\mathbf{x}, 0) \neq \infty$ 。

1.1.3 忆阻的本质特征

一个器件是忆阻元件, 它必须呈现出三个本质特征^[19]: ①当一个双极性周期信号驱动时, 该器件在电压-电流平面上为一条在 origin 紧缩的紧磁滞回线, 且响应是周期性的; ②从临界频率开始, 磁滞旁瓣面积随激励频率增加而单调减少; ③当频率趋近于无限大时, 紧磁滞回线收缩为一个单值函数。

以 HP TiO₂ 忆阻器的线性杂质漂移模型^[20]为例, 简单分析忆阻元件所呈现出的三个本质特征。

1) 紧磁滞回线

忆阻的第一个特征是紧磁滞回线。忆阻呈现出的称为“紧磁滞回线”这一独特特征使得忆阻器件区别于非忆阻器件。

文献[20]描述的 HP TiO₂ 忆阻器是一个简单的动力学系统，其数学关系式为

$$\begin{cases} v = M(x)i \\ M(x) = R_{\text{ON}}x + R_{\text{OFF}}(1-x) \\ dx/dt = ki \end{cases} \quad (1.15)$$

式中， i 为输入电流； v 为输出电压； R_{ON} 、 R_{OFF} 和 k 为系统参数； x 为状态变量。设系统输入电流为 $i(t) = I \sin(\omega t)$ ，初始条件为 $x(0) = c$ ，则状态方程的解为

$$x(t) = c + \frac{kI}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \quad (1.16)$$

系统的输出电压为

$$v(t) = a_1 \sin(\omega t) + a_2 \sin(2\omega t) \quad (1.17)$$

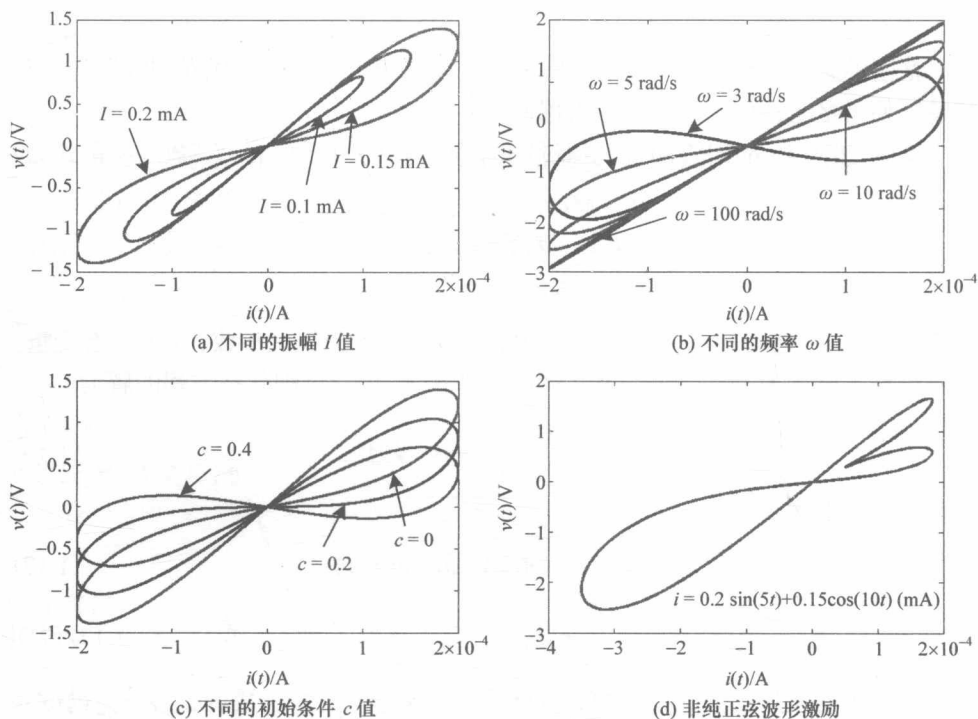
式中， $a_1 = (R_{\text{ON}} - R_{\text{OFF}})I \left(c + \frac{kI}{\omega} \right) + R_{\text{OFF}}I$ ； $a_2 = (R_{\text{ON}} - R_{\text{OFF}}) \frac{kI^2}{2\omega}$ 。式(1.17)说明系统的输出电压是由激励频率的基波分量和二次谐波分量组成的，各分量前的系数取决于忆阻系统参数、忆阻初始条件和正弦电流激励的振幅与频率。

选择参数为 $k = 1 \times 10^4$ ， $R_{\text{ON}} = 100 \Omega$ 和 $R_{\text{OFF}} = 10 \text{ k}\Omega$ 。当输入电流为 $i(t) = I \sin(\omega t)$ 时，在不同的振幅和频率的电流激励下，以及在不同的忆阻内部初始条件作用下，式(1.15)所表示的 HP TiO₂ 忆阻器在 i - v 平面上的轨迹都呈现出在原点收缩的紧磁滞回线，分别如图 1.4(a)～图 1.4(c) 所示。这里，图 1.4(a) 的结果对应于 $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 和 $c = 0$ ；图 1.4(b) 的结果对应于 $I = 0.1 \text{ mA}$ 和 $c = 0$ ；图 1.4(c) 的结果对应于 $I = 0.1 \text{ mA}$ 和 $\omega = 5 \text{ rad/s}$ 。当输入电流为一个非纯正弦波形，例如， $i(t) = 0.2 \sin(5t) + 0.15 \cos(10t) \text{ (mA)}$ 时，该器件也显示出在原点收缩的紧磁滞回线，如图 1.4(d) 所示。

总之，之所以能把一个动力学系统称为忆阻元件，在于受一个正弦激励信号 $A \sin(\omega t)$ 驱动时，对于任意振幅、任意频率以及状态变量的任意初始条件，它的紧磁滞回线的特征是在原点必须是“紧”的。

2) 磁滞旁瓣面积频率依赖性

忆阻的另一个特征是磁滞旁瓣面积对周期激励信号频率的依赖性。该特性表明，在某个临界频率 ω^* 以上，紧磁滞旁瓣面积随周期输入电压 $v(t)$ (或电流 $i(t)$) 的频率 ($\omega > \omega^*$) 增大而单调减小。

图 1.4 HP TiO₂ 忆阻的紧磁滞回线特征

考虑一个理想忆阻器，它是由磁通 φ 与电荷 q 之间的本构关系 (constitutive relation) 定义的，有

$$f(\varphi, q) = 0 \quad (1.18)$$

在 $t = 0$ 处，初始磁通为 φ_0 ，相应的初始电荷为 q_0 ，则磁通 $\varphi(t)$ 与电荷 $q(t)$ 可分别计算如下：

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (1.20)$$

对一个荷控忆阻，从它的初始值开始，忆阻的变化量取决于注入忆阻的电荷量，即取决于施加电流的时间积分。若忆阻由一个正弦电流 $i(t) = I \sin(\omega t)$ 驱动，则在正半周期期间即区间 $[0, T/2]$ 内注入的电荷量为

$$Q_p = \int_0^{T/2} I \sin(\omega t) dt = \frac{2I}{\omega} \quad (1.21)$$

式中， T 为正弦电流 $i(t)$ 的周期。由于在正半周期内忆阻元件的忆阻变化量与注

入电荷量成正比, 而注入电荷量与激励正弦量的频率成反比, 因此忆阻变化量也与正弦量频率 ω 成反比。

忆阻两端施加电流 $i(t)$ 和输出电压 $v(t)$ 之间的关系式画在 i - v 平面上时, 呈现出紧磁滞回线特性, 其形状取决于忆阻的本构关系。尽管所有忆阻紧磁滞回线的形状是不相同的, 但紧磁滞回线每个旁瓣包围的面积可以由

$$S = \int v di \quad (1.22)$$

估计出^[21]。

对忆阻值为 $M(q)$ 的荷控 HP TiO₂ 忆阻, 激励为一个周期电流 $i(t) = I \sin(\omega t)$, 在时间区间 $[0, T/2]$ 内每个旁瓣包围的面积为^[21]

$$S = \frac{2\Delta R I^3}{3Q_0\omega} \quad (1.23)$$

式中, $\Delta R = R_{\text{OFF}} - R_{\text{ON}}$, R_{OFF} 和 R_{ON} 为 HP TiO₂ 忆阻的最大和最小电阻值; Q_0 为由 ΔR 改变忆阻所需的电荷量。进一步, 紧磁滞回线的旁瓣面积为

$$S = \frac{1}{3}(R_{\text{MAX}} - R_{\text{MIN}})I^3 \quad (1.24)$$

式中, R_{MAX} 和 R_{MIN} 分别为正半周期开始 ($\omega t = 0$) 和结束 ($\omega t = \pi$) 处的忆阻值。

图 1.5(a) 显示了紧磁滞回线内切于三角形 OAB 中, 两条边 OB 和 OA 为斜率分别对应于忆阻值 R_{MAX} 和 R_{MIN} 的切线, 第三条边 AB 为在 $i(t) = I$ 处的垂直线。由式 (1.24) 可知, 面积 S 总等于三角形 OAB 面积的 $2/3$, 即 $S = (2/3)S_{\Delta OAB}$ 。

设初始条件为 $x(0) = c$, 则当 $t = 0$ 时, 由式 (1.15) 的第二式可得

$$M(x)|_{t=0} = R_{\text{ON}}c + R_{\text{OFF}}(1-c) \quad (1.25)$$

即

$$R_{\text{MAX}} = dv/di|_{t=0} = (R_{\text{ON}} - R_{\text{OFF}})c + R_{\text{OFF}} \quad (1.26)$$

当 $t = T/2$ 时, 状态方程的解为

$$x(T/2) = c + kI/\omega \quad (1.27)$$

因此有

$$\begin{aligned} R_{\text{MIN}} &= dv/di|_{t=T/2} \\ &= (R_{\text{ON}} - R_{\text{OFF}})(c + kI/\omega) + R_{\text{OFF}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

将式 (1.26) 和式 (1.28) 代入式 (1.24), 即可计算出紧磁滞回线的旁瓣面积为

$$S = \frac{k(R_{\text{OFF}} - R_{\text{ON}})I^4}{3\omega} = \frac{k\Delta R I^4}{3\omega} \quad (1.29)$$

由式(1.29)可知, 荷控 HP TiO_2 忆阻紧磁滞回线的旁瓣面积与输入电流振幅的四次幂成正比, 而与其频率成反比。特别是, 荷控 HP TiO_2 忆阻器紧磁滞回线的旁瓣面积与其初始条件无关。

对于参数 $k = 1 \times 10^4$ 、 $R_{\text{ON}} = 100 \Omega$ 、 $R_{\text{OFF}} = 10 \text{ k}\Omega$ 和 $I = 0.1 \text{ mA}$, 由式(1.29)可绘出式(1.15)所表示的 HP TiO_2 忆阻磁滞旁瓣面积为激励频率函数的变化曲线, 如图 1.5 (b) 所示。可见, 随着激励频率的增大, 磁滞旁瓣面积减少。

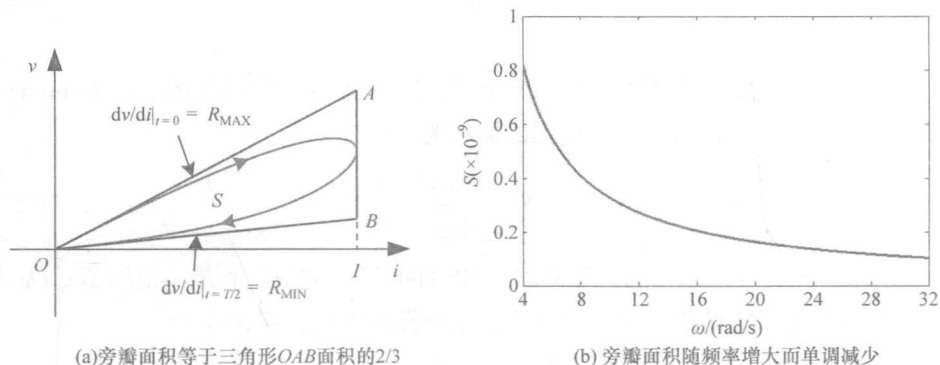


图 1.5 紧磁滞回线旁瓣面积计算与激励频率的关系

3) 当频率无限大时紧磁滞回线收缩为一个单值函数

忆阻的另一个特征是: 当激励频率趋近于无限大时, 忆阻的紧磁滞回线收缩为一个单值函数。该特性说明, 即使表征所有忆阻的紧磁滞回线形状不固定, 当频率趋近于无限大时, 周期激励电压 $v(t)$ 或激励电流 $i(t)$ 的波形都必须趋近于一个过原点的单值函数。换言之, 如果一个器件呈现出的紧磁滞回线, 在测试周期输入信号频率趋近于无限大时, 没有收缩到一个单值函数, 那么它就不是一个忆阻器。

对于由式(1.8)和式(1.9)定义的忆阻, 它的忆阻值(或忆导值)仅取决于状态变量 x , 当激励频率 ω 趋近于无限大时, 紧磁滞回线趋近于一条过原点的直线。当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 状态变量 $x(t) \rightarrow x(0)$, 式(1.10)变成为如下形式:

$$v = M[x(0)]i \triangleq M^*(0)i \quad (1.30)$$

在 v - i 平面上, 式(1.30)为一条具有斜率 $M^*(0)$ 的过原点的直线方程。在原点处直线的斜率称为极限忆阻斜率 M^* , 取决于输入周期波形。

对一个由 $i = G_M(x, v)v$ 定义的广义忆阻器, 它的忆导 $G_M(x, v)$ 为状态变量 x 和输入 v 的函数, 当激励频率 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 紧磁滞回线趋近于一条过原点的单值非线性曲线。因此, 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, 式(1.14)的输入-输出关系转变成如下形式:

$$y = g[x(0), u]u \triangleq \hat{g}(u) \quad (1.31)$$

上述以无边界条件的 HP TiO_2 忆阻器为例, 对忆阻的三个本质特征进行了阐述分析。

1.2 基于运放与乘法器的忆阻模拟器

基于运算放大器 (operational amplifier, op-amp) (简称运放) 与电阻或电容的有机组合, 可实现电路的加减或积分功能运算。借助模拟乘法器 (analog multiplier) 可实现电路的非线性功能运算。当然, 利用运放的饱和特性可实现电路的分段线性功能运算, 利用二极管或三极管的非线性伏安特性可实现电路的非线性指数或对数功能运算。

1.2.1 磁控忆阻的数学模型

由光滑连续三次非线性函数描述的磁控忆阻是用于忆阻电路建模分析的常见模型^[5, 22-24], 这里以三次非线性磁控忆阻为例, 进行磁控忆阻的特征分析与等效电路实现^[22]。

忆阻分为磁控忆阻和荷控忆阻两种, 是由关系式 $f(\varphi, q) = 0$ 描述的二端电路元件。一个光滑连续三次非线性函数描述的磁控忆阻模型可表示为^[5, 12, 22-24]

$$q(\varphi) = a\varphi + b\varphi^3 \quad (1.32)$$

式中, a 和 b 均为正常数。在等式 (1.32) 两边对时间进行微分, 可得

$$i(t) = W(\varphi)v(t) = (a + 3b\varphi^2)v(t) \quad (1.33)$$

这里, $dq/dt = i(t)$ 、 $d\varphi/dt = v(t)$, $W(\varphi)$ 为磁控忆阻的忆导, 即

$$W(\varphi) = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} = a + 3b\varphi^2 \quad (1.34)$$

式 (1.33) 即为三次非线性磁控忆阻的 VCR, 忆导受其内部状态变量磁通 $\varphi(t)$ 的控制。

式 (1.32) 描述的非线性磁控忆阻器在 φ - q 平面上的特性曲线 (characteristic curve) 如图 1.6(a) 所示; 式 (1.34) 表述的忆导关系曲线如图 1.6(b) 所示, 它是跟随内部状态变量 φ 变化的正值函数。

上述非线性磁控忆阻所消耗的即时功率 (power) 为

$$p(t) = W[\varphi(t)]v(t)^2 \geq 0 \quad (1.35)$$

从时刻 t_0 至 t , 对于所有 $t \geq t_0$, 流入此忆阻的能量 (energy) 满足

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau) d\tau \geq 0 \quad (1.36)$$