可积系统中的非线性波

●扎其劳　著

科学出版社

可积系统中的非线性波

扎其劳　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以 Lax 可积为主线，从变换的角度系统地研究可积系统中的非线性波的构造问题，所介绍的内容绝大部分是作者近年来的研究成果. 具体采用 N 重 Darboux 变换、可对角化 Darboux 变换、广义 Darboux 变换、Hirota 直接方法、双 Wronskian 技巧和分部理论，通过大量实例详细地介绍如何构造非线性波，即孤立波、周期波、呼吸波、怪波、尖峰波、kink 波以及作用解等，并对各种非线性波的相互作用作详尽的描述.

本书可供理工科高年级本科生、研究生和相关科技人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

可积系统中的非线性波/扎其劳著. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-058329-1

I. ①可… II. ①扎… III. ①非线性波-可积性 IV. ①O534

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 163734 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：邹慧卿

责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2018 年 8 月第一次印刷 印张：15 1/2

字数：304 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

自然界有五彩缤纷的波动现象, 其中普遍存在着非线性效应. 因此非线性波问题成为当今众多科学领域受关注的热点问题之一. 自然科学和工程技术等应用领域对非线性波相关理论的迫切需求使得对非线性系统求解研究进一步深入.

Darboux 变换为具有 Lax 对的非线性可积系统求解显式解的十分有效的方法之一. Darboux 变换实际上是带谱 (Lax 对) 参数的能保持谱的形式不变的规范变换, 人们可用纯代数的算法构造它, 并且对谱问题中任何方程都是统一的. 从已知解出发, 应用多次 Darboux 变换或多重 Darboux 变换可得到非线性可积系统的多重非线性波解. 本书的第 1 章给出了几个 Lax 可积系统, 它们是广义 BKK-BB 族、广义 WKI 族、广义 KdV 族、广义 AKNS 族和耦合 KdV 族的可积耦合系统. 第 2~4 章分别叙述了 N 重 Darboux 变换、可对角化 Darboux 变换和广义 Darboux 变换方法, 并构造了一些非线性可积方程的孤立波解、周期波解、呼吸波解和怪波解. 第 5 章基于 Hirota 直接方法构造了非线性波方程的非奇异多 complexiton 解和高阶怪波解等. 第 6 章说明了广义 Wronskian 行列式和双 Wronskian 行列技巧如何应用于求解. 第 7 章首先利用 Darboux 变换求解 DGH 方程的多孤立子解, 然后应用分布理论讨论了 DGH 方程和 CH 类型方程的尖峰波解和 kink 波解.

本书的出版得到了国家自然科学基金（批准号：11261037, 11861050）、内蒙古自治区自然科学基金（批准号：2014MS0111）、内蒙古“草原英才”工程（批准号：CYYC2011050）和内蒙古青年科技英才计划领军人才（批准号：NJYT14A04）的资助. 感谢李志斌教授、斯仁道尔吉教授、乔志军教授、张友金教授的热情支持和真诚帮助. 同时感谢课题组的合作者以及我的研究生一起开展了有益的讨论. 特别感谢科学出版社陈玉琢对本书的出版所付出的辛勤劳动和给予的大力帮助.

由于作者的水平和能力有限, 书中难免存在不当之处, 恳请读者批评指正.

扎其劳
内蒙古师范大学
2018 年 1 月

目　　录

第1章 可积系统

如果一个非线性偏微分方程可以写成一对线性谱问题的相容性条件, 则称此非线性偏微分方程是在 Lax 意义下的可积系统 [1–16]. 该线性谱问题被称为非线性偏微分方程的 Lax 对. 本章以 Lax 可积为主线, 推导出几个广义谱问题的孤子方程族.

1.1 广义 BKK-BB 族

考虑一类等谱问题 [17–20]

$$\Phi_x = U\Phi = \lambda J\Phi + P\Phi,\ \ \Phi_{t_n} = V^{(n)}\Phi = \sum_{j=0}^{n} V_j^{(n)}\lambda^{n-j}\Phi, \tag{1.1}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ P = \begin{pmatrix} u & v+f(u) \\ 1 & -u \end{pmatrix},\ \ V^{(n)} = \begin{pmatrix} V_{11}^{(n)} & V_{12}^{(n)} \\ V_{21}^{(n)} & -V_{11}^{(n)} \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$$V_{11}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^{n-j},\ \ V_{12}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} b_j\lambda^{n-j},\ \ V_{21}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} c_j\lambda^{n-j}, \tag{1.3}$$

u, v, a_j, b_j, c_j 是 x, t_n 的复值或实值函数, $f(u)$ 是 u 及其任意阶导数的可微函数, λ 是复参数, 称为谱参数. 对 $f(u)$ 任意选取, 我们可以得到许多的谱问题. 如取 $f(u) = 0$, 则 (1.1) 式就成为 Broer-Kaup-Kupershmidt (BKK) 谱问题 [17]. 如取 $f(u) = u_x$, 则 (1.1) 式就成为 Boussinesq-Burgers (BB) 谱问题 [18].

根据 $\Phi_{xt_n} = \Phi_{t_nx}$, 可推出 (1.1) 式的可积条件是

$$U_{t_n} - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0 \quad ([U, V^{(n)}] = UV^{(n)} - V^{(n)}U), \tag{1.4}$$

对一切 λ 成立. 将 (1.4) 式写成分量形式, 即

$$\begin{aligned}
&V_{11,x}^{(n)} = -V_{12}^{(n)} + (v + f(u))V_{21}^{(n)} + u_t,\\
&V_{12,x}^{(n)} = 2\lambda V_{12}^{(n)} - 2(v + f(u))V_{11}^{(n)} + 2uV_{12}^{(n)} + (v + f(u))_t,\\
&V_{21,x}^{(n)} = 2V_{11}^{(n)} - 2\lambda V_{21}^{(n)} - 2uV_{21}^{(n)}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.5) 式中等式两端都是 λ 的多项式. 如果按 λ 的幂次展开, 则有

$$
\begin{aligned}
&b_0 = c_0 = 0,\\
&a_{j,x} = -b_j + (v + f(u))c_j \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),\\
&b_{j+1} = -ub_j + (v + f(u))a_j + \frac{1}{2}b_{j,x} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),\\
&c_{j+1} = a_j - uc_j - \frac{1}{2}c_{j,x} \quad (0 \leqslant j \leqslant n-1),
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

及

$$
\begin{aligned}
&a_n = \frac{1}{2}c_{n,x} + uc_n,\\
&u_{t_n} = b_n + a_{n,x} - (v + f(u))c_n,\\
&v_{t_n} = b_{n,x} + 2(v + f(u))a_n - 2ub_n - (f(u))_{t_n}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

由 (1.7) 式可得

$$
\begin{aligned}
u_{t_n} &= \frac{1}{2}c_{n,x,x} + uc_{n,x} + u_x c_n - (v + f)c_n + b_n,\\
v_{t_n} &= -\frac{1}{2}f' c_{n,x,x} + (v + f - f'u)c_{n,x} + [2uf + 2uv\\
&\quad - f'(u_x - v - f)]c_n + b_{n,x} - (2u + f')b_n,
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

其中 $f = f(u), f' = \dfrac{\partial f}{\partial u}$. 这时 (1.6) 式和 (1.7) 式的第一个方程可以看成是 $V_{11}^{(n)}$, $V_{12}^{(n)}$, $V_{21}^{(n)}$ 的系数所满足的微分方程, 而 (1.8) 式是 $u, v, f(u)$ 所满足的发展型方程. 这里 $a_j, b_j, c_j (j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ 是 $u, v, f(u)$ 及其关于 x 的导数的多项式. 这些多项式的系数由 t_n 的一些任意函数所构成. 如果从 (1.7) 式和 (1.8) 式中解出 a_j, b_j, c_j 后, 将 a_j, b_j, c_j 代入 (1.8) 式, 就可得到 u, v 所满足的非线性演化方程族.

对 $j = 0, 1, 2, 3$ 时的系数是

$$
\begin{aligned}
&a_0 = \alpha_0(t_n),\ b_0 = c_0 = 0,\\
&a_1 = \alpha_1(t_n),\ b_1 = (v + f)\alpha_0(t_n),\ c_1 = \alpha_0(t_n),\\
&a_2 = -\frac{1}{2}(v + f)\alpha_0(t_n) + \alpha_2(t_n),\ c_2 = -u\alpha_0(t_n) + \alpha_1(t_n),\\
&b_2 = -(v + f)u\alpha_0(t_n) + (v + f)\alpha_1(t_n) + \frac{1}{2}(v + f)_x\alpha_0(t_n),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{4}[4(v + f)u\alpha_0(t_n) - 2(v + f)\alpha_1(t_n) - (v + f)_x\alpha_0(t_n)] + \alpha_3(t_n),\\
b_3 &= \frac{1}{4}[-2(v + f)^2\alpha_0(t_n) + (v + f)_{xx}\alpha_0(t_n) - 4u(v + f)_x\alpha_0(t_n)
\end{aligned}
$$

$$- 2u_x(v+f)\alpha_0(t_n) + 4u^2(v+f)\alpha_0(t_n) - 4u(v+f)\alpha_1(t_n) \\ + 2(v+f)_x\alpha_1(t_n) + 4(v+f)\alpha_2(t_n)], \tag{1.9}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}[-(v+f)\alpha_0(t_n) + 2u^2\alpha_0(t_n) + u_x\alpha_0(t_n) - 2u\alpha_1(t_n) + 2\alpha_2(t_n)],$$

其中 $\alpha_0(t_n), \alpha_1(t_n), \alpha_2(t_n), \alpha_3(t_n)$ 是 t_n 的任意函数, 它们是由 (1.6) 式的第二式为求 a_0, a_1, a_2, a_3 所作的积分而出现的积分常数.

从 (1.9) 式, 我们容易看出 a_j, b_j, c_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ 是 u, v, f 的微分多项式, 它们的系数是 t_n 的函数, 这对一般的 j 结论也成立. 我们在下面的命题中给出了证明.

命题 1.1(1) (1.6) 式, (1.7) 式所给出的 a_j, b_j, c_j 是 u, v, f 的微分多项式.

证明 用数学归纳法证明:

对 $j = 0$, 结论显然成立.

假设当 $j < l$ $(l \leqslant n-1)$ 时 a_j, b_j, c_j 是 u, v, f 的微分多项式, 现在要证明 a_l, b_l, c_l 也是 u, v, f 的微分多项式.

由 (1.6) 式得 b_l, c_l 是 u, v, f 的微分多项式, 因此只需要证明 a_l 是 u, v, f 的微分多项式即可. 而对 $1 \leqslant j \leqslant l-1$, 有

$$\begin{aligned} & b_j c_{l+1-j} - c_j b_{l+1-j} \\ &= b_j\left(a_{l-j} - uc_{l-j} - \frac{1}{2}c_{l-j,x}\right) - c_j\left((v+f)a_{l-j} - ub_{l-j} + \frac{1}{2}b_{l-j,x}\right) \\ &= (b_j - c_j(v+f))\,a_{l-j} + \left(-\frac{1}{2}b_jc_{l-j,x} - ub_jc_{l-j} + uc_jb_{l-j} - \frac{1}{2}c_jb_{l-j,x}\right) \\ &= \left(-a_ja_{l-j} - \frac{1}{2}b_jc_{l-j} - \frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)_x - \left(a_j - \frac{1}{2}c_{j,x} - uc_j\right)b_{l-j} \\ &\quad + \left(a_j(v+f) + \frac{1}{2}b_{j,x} - ub_j\right)c_{l-j} \\ &= \left(-a_ja_{l-j} - \frac{1}{2}b_jc_{l-j} - \frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)_x - c_{j+1}b_{l-j} + b_{j+1}c_{l-j}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

对 j 从 1 到 $l-1$ 求和, 得到

$$b_1c_l - c_1b_l = \sum_{j=1}^{l-1}\left(-a_ja_{l-j} - \frac{1}{2}b_jc_{l-j} - \frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)_x - (b_1c_l - c_1b_l), \tag{1.11}$$

即

$$(-b_l + (v+f)c_l) = \sum_{j=1}^{l-1}\frac{1}{2\alpha_0(t_n)}\left(-a_ja_{l-j} - \frac{1}{2}b_jc_{l-j} - \frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)_x, \tag{1.12}$$

从而

$$a_l=\sum_{j=1}^{l-1}\frac{1}{2\alpha_0(t_n)}\left(-a_ja_{l-j}-\frac{1}{2}b_jc_{l-j}-\frac{1}{2}c_jb_{l-j}\right)+\alpha_l(t_n) \tag{1.13}$$

是 u,v,f 的微分多项式.

假设当 $j=n-1$ 时, $a_{n-1},b_{n-1},\ c_{n-1}$ 是 $u,\ v,\ f$ 的微分多项式. 由 (1.6) 式得, $b_n,\ c_n$ 是 $u,\ v,\ f$ 的微分多项式, 再由 (1.7) 式的第一式得知 a_n 也是 $u,\ v,\ f$ 的微分多项式. 这就证明了命题.

(1.1) 式的第一个方程 (空间部分) 是完全确定的, 而第二个方程 (时间部分) 却依赖于 $\alpha_0(t_n),\ \cdots,\ \alpha_n(t_n)$ (以及 n 本身) 的选取, 发展型方程组 (1.8) 也依赖于 $\alpha_0(t_n),\ \cdots,\ \alpha_n(t_n)$ (以及 n 本身) 的选取, 而且 (1.8) 式是一系列方程. 如果 $\alpha_0(t),\ \cdots,\ \alpha_n(t)$ 都是常数, 则方程 (1.8) 的系数与 t_n 无关. 特别取 $\alpha_0(t_n)=1,\alpha_1(t_n)=\cdots=\alpha_n(t_n)=0$, 方程 (1.8) 可以用如下的递推算子生成:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{t_n}=JK^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ v+f \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

其中

$$J=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\partial^2+u\partial+(u_x-v-f) & 1 \\ J_{21} & \partial-(2u+f') \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

$$K=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\partial+\partial^{-1}(v+f)-u & -\partial^{-1} \\ (v+f)\partial^{-1}(v+f) & \frac{1}{2}\partial-(v+f)\partial^{-1}-u \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

且 $J_{21}=-\frac{1}{2}f'\partial^2+(v+f-f'u)\partial+(2uf+2uv-f'(u_x-v-f))$.

应用 (1.14) 式计算出几个特殊孤子方程如下:

(1) 取 $n=2,\ f=u_x,\ f'=\partial$, 得

$$\begin{cases} u_{t_2}=\frac{1}{2}[v_x-4uu_x], \\ v_{t_2}=\frac{1}{2}[-4(vu)_x+u^{(3)}]. \end{cases} \tag{1.17}$$

(2) 取 $n=2,\ f=u_{xx},\ f'=\partial^2$, 得

$$\begin{cases} u_{t_2}=\frac{1}{2}[(v+u_{xx})_x-4uu_x-u_{xx}], \\ v_{t_2}=\frac{1}{2}[-4(vu)_x+8u_xu_{xx}+v_{xx}-v^{(3)}+2u^{(4)}-u^{(5)}]. \end{cases} \tag{1.18}$$

(3) 取 $n=2$, $f=u_{xxx}$, $f'=\partial^3$, 得

$$\begin{cases} u_{t_2}=\dfrac{1}{2}[(v+u^{(3)})_x-4uu_x-u_{xx}], \\ v_{t_2}=\dfrac{1}{2}[-4(vu)_x+12u_{xx}^2+v_{xx}+12u_xu^{(3)}-v^{(4)}+2v^{(5)}-u^{(7)}]. \end{cases} \tag{1.19}$$

(4) 取 $n=2$, $f=u_{xxxx}$, $f'=\partial^4$, 得

$$\begin{cases} u_{t_2}=\dfrac{1}{2}[(v+u^{(4)})_x-4uu_x-u_{xx}], \\ v_{t_2}=\dfrac{1}{2}[v_{xx}-4(vu)_x+40u_{xx}u^{(3)}+16u_xu^{(4)}-v^{(5)}+2u^{(6)}-u^{(9)}]. \end{cases} \tag{1.20}$$

(5) 取 $n=2$, $f=u_{xxxxx}$, $f'=\partial^5$, 得

$$\begin{cases} u_{t_2}=\dfrac{1}{2}[(v+u^{(5)})_x-4uu_x-u_{xx}], \\ v_{t_2}=\dfrac{1}{2}[v_{xx}-4(vu)_x+40u_{xxx}^2+60u_{xx}u^{(4)}+20u_xu^{(5)}-v^{(6)}+2u^{(7)} \\ \qquad -u^{(11)}]. \end{cases} \tag{1.21}$$

(6) 取 $n=3$, $f=u_{xx}$, $f'=\partial^2$, 得

$$\begin{cases} u_{t_3}=\dfrac{1}{4}[12u^2u_x-6u_x(v+u_{xx})+6u_x^2-6u(v+u_{xx})_x+6uu_{xx}+u_{xxx}], \\ v_{t_3}=\dfrac{1}{4}[6(2u^2-v+2u_{xx})v_x-24u_x^3+18(u_{xxx}-u_{xx})u_{xx}+v_{xxx} \\ \qquad -6u_x(v_x+5u_{xxx}-3(v+u_{xx})_{xx})+6u(4vu_x-8u_xu_{xx}-v_{xx} \\ \qquad -2u_{xxxx}+(v+u_{xx})_{xxx})]. \end{cases} \tag{1.22}$$

1.2 广义 WKI 族

考虑谱问题 [21]

$$\Phi_x=U\Phi,\ \ U=\begin{pmatrix} \lambda w & \lambda u \\ \lambda v & -\lambda w \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

其中 u, v, w 是位势, λ 是谱参数. 当 $w=1$ 或 $w=i$ 时, 谱问题 (1.23) 就变为 Wadati-Konno Ichikawa(WKI) 谱问题, 所以它被称为广义 WKI 谱. 我们考虑谱问题 (1.23) 的驻零曲率方程

$$V_x-[U,V]=0,\quad V=(V_{ij})_{2\times 2}\ \ ([U,V]=UV-VU), \tag{1.24}$$

其中

$$V_{11}=-V_{22}=\sum_{j\geqslant 0}a_j\lambda^j,\quad V_{21}=\sum_{j\geqslant 0}b_j\lambda^j,\quad V_{12}=\sum_{j\geqslant 0}c_j\lambda^j. \tag{1.25}$$

将 (1.25) 式代入 (1.24) 式, 可得

$$\begin{aligned}&\lambda^{-1}V_{11,x}=2uV_{21}-2vV_{12},\quad \lambda^{-1}V_{21,x}=2vV_{11}-2wV_{21},\\&\lambda^{-1}V_{12,x}=-2uV_{11}+2wV_{12}.\end{aligned} \tag{1.26}$$

由 (1.26) 式, 可得递推关系

$$\lambda^{-1}\begin{pmatrix}2V_{11}\\V_{21}\\V_{12}\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}2V_{11}\\V_{21}\\V_{12}\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&2\partial^{-1}u&-2\partial^{-1}v\\\partial^{-1}v&-2\partial^{-1}w&0\\-\partial^{-1}u&0&2\partial^{-1}w\end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

其中 $\partial=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial\partial^{-1}=\partial^{-1}\partial=1$.

将 (1.25) 式代入 (1.27) 式, 比较 λ 各次幂的系数, 可得

$$G_{j+1}=LG_j,\quad G_j=(2a_j,b_j,c_j)^{\mathrm{T}},\quad j\geqslant 0. \tag{1.28}$$

取初值为

$$G_0=(2a(t),b(t),c(t))^{\mathrm{T}}\equiv(2a,b,c)^{\mathrm{T}},$$

则可以利用 (1.28) 式计算出 G_j, 其中的前几组为

$$G_1=\begin{pmatrix}2b\partial^{-1}u-2c\partial^{-1}v\\2a\partial^{-1}v-2b\partial^{-1}w\\-2a\partial^{-1}u+2c\partial^{-1}w\end{pmatrix},$$

$$G_2=\begin{pmatrix}4(\partial^{-1}u(a\partial^{-1}v-b\partial^{-1}w)+\partial^{-1}v(a\partial^{-1}u-c\partial^{-1}w))\\2\partial^{-1}v(b\partial^{-1}u-c\partial^{-1}v)-4\partial^{-1}w(a\partial^{-1}v-b\partial^{-1}w)\\-2\partial^{-1}u(b\partial^{-1}u-c\partial^{-1}v)-4w\partial^{-1}(a\partial^{-1}u-c\partial^{-1}w)\end{pmatrix}.$$

假设辅助谱问题为

$$\phi_{t_n}=V^{(-n)}\phi,\quad V^{(-n)}=(\lambda^{-n}V)_-\quad(n\geqslant 0) \tag{1.29}$$

其中负号“$-$”代表取 λ 的非正次幂. 由谱问题 (1.23) 式和 (1.29) 式的相容性条件

$$U_{t_n}-V_x^{(-n)}+[U,V^{(-n)}]=0, \tag{1.30}$$

可得到广义 WKI 孤子方程族

$$\begin{pmatrix} w \\ u \\ v \end{pmatrix}_{t_n} = X_n = JG_n = KG_{n-1}, \tag{1.31}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -u & v \\ u & 0 & -2w \\ -v & 2w & 0 \end{pmatrix}, \quad K = JL = \begin{pmatrix} K_{11} & 2u\partial^{-1}w & 2v\partial^{-1}w \\ 2w\partial^{-1}u & 2u\partial^{-1}u & K_{23} \\ 2w\partial^{-1}v & K_{32} & 2v\partial^{-1}v \end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

$K_{11} = -u\partial^{-1}v - v\partial^{-1}u$, $K_{23} = -2u\partial^{-1}v - 4w\partial^{-1}w$, $K_{32} = -2v\partial^{-1}u - 4w\partial^{-1}w$. 当 $n = 1$ 和 $t_1 = t$ 时, 辅助谱问题可写成

$$\Phi_t = V^{(-1)}\Phi, \tag{1.33}$$

$$V^{(-1)} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1}a + 2b\partial^{-1}u - 2c\partial^{-1}v & \lambda^{-1}c - 2a\lambda^{-1}u + 2c\lambda^{-1}w \\ \lambda^{-1}b + 2a\partial^{-1}v - 2b\partial^{-1}w & -\lambda^{-1}a - 2b\partial^{-1}u + 2c\partial^{-1}v \end{pmatrix}.$$

把 (1.23) 式和 (1.33) 式代入零曲率方程 (1.30), 就得到一个耦合非线性方程组

$$\begin{cases} w_t = -2a(u\partial^{-1}v + v\partial^{-1}u) + 2bu\partial^{-1}w + 2cv\partial^{-1}w, \\ u_t = 4aw\partial^{-1}u + 2bu\partial^{-1}u - 2c(u\partial^{-1}v + 2w\partial^{-1}w), \\ v_t = 4aw\partial^{-1}v - 2b(v\partial^{-1}u + 2w\partial^{-1}w) + 2cv\partial^{-1}v. \end{cases} \tag{1.34}$$

由方程组 (1.34) 可以约化出已知的无色散可积系统.

(1) 当 $w = q_x$, $u = r_x$, $v = s_x$, $a = \frac{1}{2}\gamma(t)$, $b = \alpha(t)$, $c = \beta(t)$ 时, 方程组 (1.34) 约化为广义无色散可积系统

$$\begin{cases} q_{xt} - 2\alpha(t)qr_x - 2\beta(t)qs_x + \gamma(t)(rs)_x = 0, \\ r_{xt} - 2\alpha(t)rr_x + 2\beta(t)(2qq_x + r_xs) - 2\gamma(t)q_xr = 0, \\ s_{xt} - 2\beta(t)ss_x + 2\alpha(t)(2qq_x + rs_x) - 2\gamma(t)sq_x = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

方程 (1.35) 的一些特殊情况有过大量的研究.

如果令 $\alpha(t) = \beta(t) = 0$, 可得

$$q_{xt} + \gamma(t)(rs)_x = 0, \ r_{xt} - 2\gamma(t)q_xr = 0, \ s_{xt} - 2\gamma(t)sq_x = 0. \tag{1.36}$$

如果令 $\alpha(t)=\beta(t)=0$, $\gamma(t)=1$, $r=s$, 可得

$$q_{xt}+rr_x=0,\ r_{xt}-2q_xr=0. \tag{1.37}$$

近十年来, 关于方程 (1.37) 的研究一直在深入, 先后利用反散射变换、Darboux 变换、Bäcklund 变换、Painlevé 测试等方法, 获得了丰富的结果.

(2) 当 $w=\alpha q_x$, $u=v=\beta r_x$, $a=-b=-c=\dfrac{1}{4}$ 时, 方程组 (1.34) 约化为广义无色散耦合可积系统

$$q_{xt}+\beta\left(q+\frac{\beta}{\alpha}r\right)r_x=0,\ r_{xt}-\alpha\left(\frac{\alpha}{\beta}q+r\right)q_x=0. \tag{1.38}$$

为了获得孤子方程族 (1.31) 的广义哈密顿结构, 取 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(AB)$. 通过直接计算, 可得

$$\begin{aligned}&\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right\rangle=2wV_{11}+uV_{21}+vV_{12},\ \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial w}\right\rangle=2\lambda V_{11},\\&\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial u}\right\rangle=\lambda V_{21},\ \left\langle V,\frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle=\lambda V_{12}.\end{aligned} \tag{1.39}$$

利用迹恒等式 [14], 我们得到

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\delta}{\delta w},\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta v}\right)\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial\lambda}\right\rangle\\&=\left(\lambda^{\Gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\lambda^{-\Gamma}\right)\left(\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial w}\right\rangle,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial u}\right\rangle,\left\langle V,\frac{\partial U}{\partial v}\right\rangle\right).\end{aligned} \tag{1.40}$$

把 (1.25) 式和 (1.39) 式代入 (1.40) 式, 可得

$$\left(\frac{\delta}{\delta w},\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta v}\right)(2wa_j+ub_j+vc_j)=(1-\Gamma+j)(2a_j,b_j,c_j)\ (j\geqslant 0) \tag{1.41}$$

为确定常数 Γ 的值, 取 $j=0$ 时, 比较系数, 可得 $\Gamma=0$. 把 $\Gamma=0$ 代入 (1.41) 式中, 可得

$$\left(\frac{\delta}{\delta w},\frac{\delta}{\delta u},\frac{\delta}{\delta v}\right)H_j=G_j^{\mathrm{T}},\ \ H_j=\frac{2wa_j+ub_j+vc_j}{1-j}\ \ (j\geqslant 0) \tag{1.42}$$

进而, 我们得到了孤子方程族 (1.31) 的如下广义哈密顿结构:

$$\begin{pmatrix}w\\u\\v\end{pmatrix}_{t_n}=K\begin{pmatrix}\dfrac{\delta H_{n-1}}{\delta w}\\\dfrac{\delta H_{n-1}}{\delta u}\\\dfrac{\delta H_{n-1}}{\delta v}\end{pmatrix}=J\begin{pmatrix}\dfrac{\delta H_n}{\delta w}\\\dfrac{\delta H_n}{\delta u}\\\dfrac{\delta H_n}{\delta v}\end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

其中 K 和 J 在 (1.32) 式中给出.

1.3 广义 KdV 族

设给定一个 4×4 矩阵谱问题 [22, 23]

$$\phi_x = U\phi, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ u-\lambda & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ v & 0 & s-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.44}$$

其中 u, v, w, s 是位势, λ 是谱参数. 由它可以产生一个广义 KdV 族. 我们考虑谱问题 (1.44) 的驻零曲率方程

$$V_x - [U,V] = 0, \quad V = (V_{ij})_{4\times 4} \quad ([U,V] = UV - VU). \tag{1.45}$$

设

$$V_{12} = A, \quad V_{14} = B, \quad V_{32} = C, \quad V_{34} = D, \tag{1.46}$$

$$A = \sum_{j\geqslant 0} a_j\lambda^{-j}, \quad B = \sum_{j\geqslant 0} b_j\lambda^{-j}, \quad C = \sum_{j\geqslant 0} c_j\lambda^{-j}, \quad D = \sum_{j\geqslant 0} d_j\lambda^{-j}, \tag{1.47}$$

将 (1.46) 式和 (1.47) 式代入 (1.45) 式, 可得

$$\begin{aligned}
&V_{12} = A, \quad V_{14} = B, \quad V_{32} = C, \quad V_{34} = D, \\
&2V_{11} = \partial^{-1}(-vB + wC) - A_x, \quad 2V_{22} = \partial^{-1}(-vB + wC) + A_x, \\
&2V_{33} = \partial^{-1}(vB - wC) - D_x, \quad 2V_{44} = \partial^{-1}(vB - wC) + D_x, \\
&2V_{24} = \partial^{-1}(uB - sB - wA + wD) + B_x, \\
&2V_{31} = \partial^{-1}(sC - uC + vA - vD) - C_x, \\
&2V_{13} = \partial^{-1}(uB - sB - wA + wD) - B_x, \\
&2V_{42} = \partial^{-1}(sC - uC + vA - vD) + C_x, \\
&2V_{21} = 2(u-\lambda)A + vB + wC - A_{xx}, \\
&2V_{23} = wA + (u + s - 2\lambda)B + wD - B_{xx}, \\
&2V_{41} = (u + s - 2\lambda)C + vA + vD - C_{xx}, \\
&2V_{43} = 2(s-\lambda)D + vB + wC - D_{xx}.
\end{aligned} \tag{1.48}$$

把 (1.48) 式代入以下方程:

$$\begin{aligned}
&V_{21,x} = (u-\lambda)(V_{11} - V_{22}) - vV_{24} + wV_{31}, \\
&V_{23,x} = (u-\lambda)V_{13} - (s-\lambda)V_{24} - wV_{22} + wV_{33}, \\
&V_{43,x} = (s-\lambda)(V_{33} - V_{44}) + vV_{13} - wV_{42}, \\
&V_{41,x} = (s-\lambda)V_{31} - (u-\lambda)V_{42} + vV_{11} - vV_{44},
\end{aligned} \tag{1.49}$$

得

$$
\begin{aligned}
4\lambda A_x = {} & (-\partial^3 + 4u\partial + 2u_x - v\partial^{-1}w - w\partial^{-1}v)A + (2v\partial + v_x - v\partial^{-1}s \\
& + v\partial^{-1}u)B + (2w\partial + w_x - w\partial^{-1}s + w\partial^{-1}u)C \\
& + (v\partial^{-1}w + w\partial^{-1}v)D,
\end{aligned} \tag{1.50}
$$

$$
\begin{aligned}
4\lambda B_x = {} & (2w\partial + w_x + u\partial^{-1}w - s\partial^{-1}w)A + (-\partial^3 + 2u\partial + u_x \\
& + 2s\partial + s_x - u\partial^{-1}u - s\partial^{-1}s + s\partial^{-1}u + u\partial^{-1}s - 2w\partial^{-1}v)B \\
& + 2w\partial^{-1}wC + (2w\partial + w_x + s\partial^{-1}w - u\partial^{-1}w)D,
\end{aligned} \tag{1.51}
$$

$$
\begin{aligned}
4\lambda C_x = {} & (2v\partial + v_x + u\partial^{-1}v - s\partial^{-1}v)A + 2v\partial^{-1}vB + (-\partial^3 + 2s\partial + s_x \\
& + 2u\partial + u_x - s\partial^{-1}s - u\partial^{-1}u + s\partial^{-1}u + u\partial^{-1}s - 2v\partial^{-1}w)C \\
& + (2v\partial + v_x + s\partial^{-1}v - u\partial^{-1}v)D,
\end{aligned} \tag{1.52}
$$

$$
\begin{aligned}
4\lambda D_x = {} & (v\partial^{-1}w + w\partial^{-1}v)A + (2v\partial + v_x + v\partial^{-1}s - v\partial^{-1}u)B + (2w\partial + w_x \\
& + w\partial^{-1}s - w\partial^{-1}u)C + (-\partial^3 + 4s\partial + 2s_x - v\partial^{-1}w - w\partial^{-1}v)D.
\end{aligned} \tag{1.53}
$$

进而, 方程 (1.50)~(1.53) 可写成如下递推关系:

$$
\lambda J(A,B,C,D)^{\mathrm{T}} = K(A,B,C,D)^{\mathrm{T}}, \tag{1.54}
$$

其中

$$
J = \begin{pmatrix} 4\partial & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\partial & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\partial & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\partial \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
& K_{11} = -\partial^3 + 2u\partial + 2\partial u - v\partial^{-1}w - w\partial^{-1}v, \quad K_{12} = v\partial + \partial v - v\partial^{-1}s + v\partial^{-1}u, \\
& K_{13} = w\partial + \partial w - w\partial^{-1}s + w\partial^{-1}u, \quad K_{14} = v\partial^{-1}w + w\partial^{-1}v, \\
& K_{21} = w\partial + \partial w + u\partial^{-1}w - s\partial^{-1}w, \quad K_{24} = w\partial + \partial w + s\partial^{-1}w - u\partial^{-1}w, \\
& K_{22} = -\partial^3 + u\partial + \partial u + s\partial + \partial s - u\partial^{-1}u - s\partial^{-1}s + s\partial^{-1}u + u\partial^{-1}s - 2w\partial^{-1}v, \\
& K_{31} = v\partial + \partial v + u\partial^{-1}v - s\partial^{-1}v, \quad K_{32} = 2v\partial^{-1}v, \\
& K_{34} = v\partial + \partial v + s\partial^{-1}v - u\partial^{-1}v, \\
& K_{33} = -\partial^3 + s\partial + \partial s + u\partial + \partial u - s\partial^{-1}s - u\partial^{-1}u + s\partial^{-1}u + u\partial^{-1}s - 2v\partial^{-1}w, \\
& K_{41} = v\partial^{-1}w + w\partial^{-1}v, \quad K_{42} = v\partial + \partial v + v\partial^{-1}s - v\partial^{-1}u, \quad K_{23} = 2w\partial^{-1}w, \\
& K_{43} = w\partial + \partial w + w\partial^{-1}s - w\partial^{-1}u, \quad K_{44} = -\partial^3 + 2s\partial + 2\partial s - v\partial^{-1}w - w\partial^{-1}v.
\end{aligned}
$$

把 (1.47) 式代入 (1.54) 式, 并比较 λ 同次幂的系数, 给出以下关系式:

$$
JG_0 = 0, \ KG_j = JG_{j+1}, \ G_j = (a_j, b_j, c_j, d_j)^{\mathrm{T}}, \quad j \geqslant 0. \tag{1.55}
$$

取初值为

$$G_0 = (1, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

则可以计算出 G_j, 它等价于 (1.54) 式, 其中的前几组为

$$G_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}w \\ \frac{1}{2}v \\ \frac{1}{2}s \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}u_{xx} + \frac{3}{8}u^2 + \frac{3}{8}vw \\ -\frac{1}{8}w_{xx} + \frac{3}{8}wu + \frac{3}{8}sw \\ -\frac{1}{8}v_{xx} + \frac{3}{8}uv + \frac{3}{8}vs \\ -\frac{1}{8}s_{xx} + \frac{3}{8}vw + \frac{3}{8}s^2 \end{pmatrix}.$$

假设辅助谱问题为

$$\phi_{t_n} = V^{(n)}\phi, \quad V^{(n)} = (\lambda^n V)_+, \quad n \geqslant 0, \tag{1.56}$$

其中正号“+”代表取 λ 的非负次幂. 由谱问题 (1.44) 式和 (1.56) 式的相容性条件

$$U_{t_n} - V_x^{(n)} + [U, V^{(n)}] = 0, \tag{1.57}$$

可得到孤子方程族

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ s \end{pmatrix}_{t_n} = X_n = JG_n = KG_{n-1}, \tag{1.58}$$

其中 K 和 J 在 (1.54) 式中已给出.

当 $n = 2$, $t_2 = t$ 时, 相应的辅助谱问题为

$$\phi_t = V^{(2)}\phi, \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u_x & 2\lambda + u & -\frac{1}{2}w_x & w \\ v_{21}^{(2)} & \frac{1}{2}u_x & v_{23}^{(2)} & \frac{1}{2}w_x \\ -\frac{1}{2}v_x & v & -\frac{1}{2}s_x & 2\lambda + s \\ v_{41}^{(2)} & \frac{1}{2}v_x & v_{43}^{(2)} & \frac{1}{2}s_x \end{pmatrix}, \tag{1.59}$$

其中

$$v_{21}^{(2)} = -2\lambda^2 + u\lambda + u^2 + vw - \frac{1}{2}u_{xx}, \quad v_{41}^{(2)} = v\lambda + sv + uv - \frac{1}{2}v_{xx},$$