九章丛书

高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·张禾瑞、郝鈵新编

教你用更多的自信面对未来！

高等代数同步辅导及习题全解（第五版）

主编 李德才

新版

习题超全解
名师一线经验**大汇集**，解题步骤**超详细**，方法技巧**最实用**

一书三用
同步辅导+考研复习+教师备课

扫码在线阅读电子书，
让你的学习更简单！

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

高等代数（第五版）同步辅导及习题全解

主　编　李德才

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本书是与高等教育出版社出版，张禾瑞、郝鈵新编写的《高等代数》（第五版）一书配套的同步辅导书。

本书共有十章，分别介绍基本概念，多项式，行列式，线性方程组，矩阵，向量空间，线性变换，欧氏空间和酉空间，二次型，群、环和域简介。本书按教材内容安排全书结构，各章基本都包括知识点归纳、典型例题与解题技巧、课后习题全解三部分内容。全书针对各章节习题给出了详细解答，思路清晰、逻辑性强，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书可作为高等院校学生学习“高等代数”课程的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题参考。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏甚至错误之处，恳请广大读者和专家批评指正。如有疑问，请联系我们（电话：15652485156 或邮箱：yapai2004@126.com）。

图书在版编目（CIP）数据

高等代数（第五版）同步辅导及习题全解 / 李德才主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2018.3
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5170-5571-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①高等代数－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第161054号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：李　炎　加工编辑：赵佳琦　封面设计：李　佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 高等代数（第五版）同步辅导及习题全解 GAODENG DAISHU（DI-WU BAN）TONGBU FUDAO JI XITI QUANJIE
作　　者	主　编　李德才
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	三河航远印刷有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　16.75 印张　387 千字
版　　次	2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
印　　数	0001—7000 册
定　　价	32.00 元

前 言

张禾瑞、郝鈵新编写的《高等代数》(第五版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的辅导用书。本书旨在帮助广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到“高等代数”这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 知识点归纳。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在学习过程中目标明确,有的放矢。

2. 典型例题与解题技巧。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

3. 课后习题全解。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促使其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题进行了详细的解答。

编者

2018 年 1 月

contents

目录

contents

第一章
基本概念

知识点归纳

一、集合

1. 定义

由某些确定事物组成的集体称为集合，其中每个事物称为这个集合的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a \in A$；或者说 A 包含 a，记作 $A \ni a$.

如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a \notin A$；或者说 A 不包含 a，记作 $A \not\ni a$.

2. 分类

按集合中所含元素的个数，可分为：有限集合，含有有限多个元素的集合；无限集合，由无限多个元素组成的集合；空集，不含任何元素的集合，用 $\varnothing$ 表示.

3. 集合间的关系

(1) 子集：设 A，B 是两个集合. 如果 A 的每一元素都是 B 的元素，那么就说 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$(读作 A 属于 B)，或记作 $B \supseteq A$(读作 B 包含 A).

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\text{对一切 } x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$(A \not\subseteq B) \Leftrightarrow (\text{存在一个元素 } x, x \in A \text{ 但 } x \notin B)$$

(2) 集合相等：如果集合 A 与 B 是由完全相同的元素组成的，就说 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

$$(A = B) \Leftrightarrow (\text{对一切 } x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

(3) 性质：

①$A \subseteq A$；

②$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$；

③$(A \subseteq B \text{ 且 } B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)$.

(4) 集合的运算

① 并集：设A,B是两个集合. 由A的一切元素和B的一切元素所组成的集合叫作A与B的并集(简称并)，记作$A\cup B$.

$$(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A\text{或}x\in B)$$

$$(x\notin A\cup B)\Leftrightarrow(x\notin A\text{且}x\notin B)$$

② 交集：设A,B是两个集合. 由集合A与B的公共元素所组成的集合叫作A与B的交集(简称交)，记作$A\cap B$.

$$(x\in A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A\text{且}x\in B)$$

$$(x\notin A\cap B)\Leftrightarrow(x\notin A\text{或}x\notin B)$$

另外，两个集合的并与交的概念可以推广到任意n个集合上去.

③ 差：设A,B是两个集合，由一切属于A但不属于B的元素所组成的集合称为A与B的差，记作$A-B$.

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{但}x\notin B\}$$

④ 笛卡尔积：设A,B是两个集合. 令

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为A与B的笛卡尔积(简称积).

二、映射

1. 定义

设A,B是两个非空集合. A到B的一个映射指的是一个对应法则，通过这个法则，对于集合A中每一元素x，有集合B中一个唯一确定的元素y与它对应. 常用字母$f,g,\cdots$表示映射，用记号$f:A\to B$表示f是A到B的一个映射.

如果通过映射f，与A中元素x对应的B中元素是y，就写成$f:x\mapsto y$. 其中，y叫作元素x在f之下的像，记作$f(x)$. A中一切x的像作成B的一个子集，用$f(A)$表示，即$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，叫作A在f之下的像，或映射f的像.

2. 特殊的映射

(1) 满射：设f是A到B的一个映射. 如果$f(A)=B$，那么就称f是A到B上的一个映射，这时也称f是一个满映射，简称满射.

一般地，$f:A\to B$是满射当且仅当对于B中每一元素y，都有A中元素x使得$f(x)=y$.

(2) 单射：设$f:A\to B$是一个映射. 如果对于A中任意两个元素x_1和x_2，只要$x_1\neq x_2$，就有

$f(x_1) \neq f(x_2)$，那么就称 f 是 A 到 B 的一个单映射，简称单射.

(3) 双射：如果 $f:A \to B$ 既是满射，又是单射，即如果 f 满足下列两个条件：

(i) $f(A) = B$；

(ii) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，对一切 $x_1, x_2 \in A$，

那么就称 f 是 A 到 B 的一个双射或一一映射.

特别地，我们把一个有限集合 A 到自身的双射叫作 A 的一个置换.

3. 映射的合成

设 $f:A \to B$ 是 A 到 B 的一个映射，$g:B \to C$ 是 B 到 C 的一个映射. 这样得到 A 到 C 的一个映射，这个映射是由映射 $f:A \to B$ 和 $g:B \to C$ 所决定的，称为 f 与 g 的合成，记作 $g \circ f$. 于是我们有

$$g \circ f:A \to C;(g \circ f)(x) = g(f(x)),\text{对一切 } x \in A.$$

4. 可逆映射及其逆映射

设 $f:A \to B$，若存在 $g:B \to A$，使得 $g \circ f = j_A$，$f \circ g = j_B$，则称 f 是可逆映射，且称 g 为 f 的逆映射. 其中，j_A 和 j_B 分别是非空集合 A 和 B 上的恒等映射，把 f 的逆映射记作 f^{-1}，故有 $f^{-1} \circ f = j_A$，$f \circ f^{-1} = j_B$.

5. 代数运算

设 A 是一个非空集合，我们把 $A \times A$ 到 A 的一个映射叫作集合 A 的一个代数运算.

三、数学归纳法

1. 最小数原理

正整数集 $\mathbf{N}^*$ 的任意一个非空子集 S 必含有一个最小数，也就是这样一个数 $a \in S$，对于任意 $c \in S$ 都有 $a \leqslant c$.

2. 数学归纳法原理

设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

(i) 当 $n = 1$ 时，命题成立；

(ii) 假设 $n = k$ 时命题成立，则 $n = k + 1$ 时命题也成立；

那么这个命题对于一切正整数 n 都成立.

3. 第二数学归纳法原理

设有一个与正整数 n 有关的命题. 如果

(i) 当 $n = 1$ 时命题成立；

(ii) 假设命题对于一切小于 k 的自然数来说都成立，则命题对于 k 也成立；那么命题对于一切自

然数 n 来说都成立.

四、整数的一些整除性质

1. 整除

设 a,b 是两个整数. 如果存在一个整数 d，使得 $b=ad$，那么就说 a 整除 b（或者说 b 被 a 整除）. 用符号 $a\mid b$ 来表示 a 整除 b，这时 a 叫作 b 的一个因数，而 b 叫作 a 的一个倍数. 如果 a 不整除 b，那么就记作 $a\nmid b$.

2. 整除的一些基本性质

(1)$a\mid b,b\mid c\Rightarrow a\mid c$；

(2)$a\mid b,a\mid c\Rightarrow a\mid(b+c)$；

(3)$a\mid b$，而 $c\in\mathbf{Z}\Rightarrow a\mid bc$；

(4)$a\mid b_i$，而 $c_i\in\mathbf{Z},i=1,2,\cdots,t\Rightarrow a\mid(b_1c_1+\cdots+b_tc_t)$；

(5) 每一个整数都可以被 1 和 -1 整除；

(6) 每一个整数 a 都可以被它自己和它的相反数 $-a$ 整除；

(7)$a\mid b$ 且 $b\mid a\Rightarrow b=a$ 或 $b=-a$.

3. 带余除法

设 a,b 是两个整数且 $a\neq 0$，那么存在一对整数 q 和 r，使得

$$b=aq+r \text{ 且 } 0\leqslant r<|a|$$

其中 q 和 r 是唯一确定的，分别叫作以 a 除 b 所得的商和余数.

4. 最大公因数

设 a,b 是两个整数. 满足下列条件的整数 d 叫作 a 与 b 的一个最大公因数：

(i)$d\mid a$ 且 $d\mid b$；

(ii) 如果 $c\in\mathbf{Z}$，且 $c\mid a,c\mid b$，那么 $c\mid d$.

一般地，设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数. 满足下列条件的整数 d 叫作 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数：

(i)$d\mid a_i,i=1,2,\cdots,n$；

(ii) 如果 $c\in\mathbf{Z}$ 且 $c\mid a_i,i=1,2,\cdots,n$，那么 $c\mid d$.

关于最大公因数，我们有

(1) 任意 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都有最大公因数. 如果 d 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数，那么 $-d$ 也是一个最大公因数；$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的两个最大公因数至多相差一个符号.

(2) 设 d 是整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个最大公因数,那么存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,使得

$$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=d$$

5. 互素

设 a,b 是两个整数. 如果 $(a,b)=1$,那么就说 a 与 b 互素. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个整数,如果 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$,那么就说这 n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素.

n 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互素的充要条件是存在整数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 使得

$$t_1a_1+t_2a_2+\cdots+t_na_n=1$$

6. 素数及其性质

(1) 定义:一个正整数 $p>1$ 叫作一个素数,若除 $\pm1,\pm p$ 外没有其他因数. 1既不是素数也不是合数.

(2) 性质:

(i) 若 p 是一个素数,则对 $\forall a\in\mathbf{Z}$ 有 $(a,p)=p$ 或 $(a,p)=1$.

(ii) $\forall a\in\mathbf{Z}$ 且 $a\neq0,\pm1$,则 a 可被某一素数整除.

(iii) 设 p 是一个素数且 $a,b\in\mathbf{Z}$,若 $p\mid ab$,则 $p\mid a$ 或 $p\mid b$.

五、数环和数域

1. 数环

设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集. 如果对于 S 中任意两个数 a,b 来说,$a+b,a-b,ab$ 都在 S 内,那么就称 S 是一个数环.

2. 数域

设 F 是一个数环. 如果

(i) F 含有一个不等于零的数;

(ii) 如果 $a,b\in F$,且 $b\neq0$,则 $\frac{a}{b}\in F$,

那么就称 F 是一个数域.

3. 性质

(1) 设 S 是一个数环,则 $0\in S$.

(2) 设 F 是一个数域,则 $0,1\in F$.

(3) 任何数域都包含有理数域(即:有理数域是最小的数域).

典型例题与解题技巧

例 1 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{x,y,z\}$

$f:a\mapsto 1, b\mapsto 3.$

$g:1\mapsto x, 2\mapsto y, 3\mapsto z, 4\mapsto z.$

则 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的映射，试写出合成映射 $g\circ f$.

分析 根据合成映射的概念即可得出.

解析 $g\circ f:a\mapsto g(f(a))=g(1)=x, b\mapsto g(f(b))=g(3)=z.$

例 2 设 F 是至少含有两个不同数的集合，证明：如果 F 中任意两个数的差与商(除数不为 0)仍属于 F，则 F 是数域.

分析 要证明 F 是数域，只需证明 F 对减法、除法封闭，对于加法、乘法也封闭即可.

解析 因为 F 至少含有两个数，所以有 $a\in F$ 且 $a\neq 0$，于是 $a-a=0\in F$，$a\div a=1\in F$. 于是对任意 $a,b\in F$，$0-b=-b\in F$，$a+b=[a-(-b)]\in F$，$ab=a\div(1\div b)\in F$，从而 F 是数域.

课后习题全解

1.1 集合

1. 解题过程 不是. 因为 $0\in \mathbf{Z}$，但 $0\notin X$.

2. 解题过程 不对. 记号 $\{a\}$ 表示一个集合，该集合中仅有元素 a. 写法 $\{a\}\in A$ 不对，由于 $\{a\}$ 与 A 是两个集合，只能用包含或不包含来表示，即应写成 $\{a\}\subseteq A$.

3. 解题过程 易得 $B\cup C=\{x\mid x\in R, x>-1\}$. 进一步得到

$$A\cap(B\cup C)=\{x\mid x\in \mathbf{R}, -1<x\leqslant 1\}$$

$$A\cup(B\cup C)=\{x\mid x\in \mathbf{R}, x\geqslant -1\}$$

4. 解题过程 共有 2^4 个子集. 它们是 $\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_4\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,a_4\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_2,a_4\}$，$\{a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_4\}$，$\{a_1,a_3,a_4\}$，$\{a_2,a_3,a_4\}$，$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.

5. 解题过程 由集合中元素的确定性、互异性和无序性可得，A 中含有 k 个元素的子集共有 C_n^k 个.

6. 逻辑推理 本题是要读者弄清“且”与“或”之间的异同及集合间交并的定义.

解题过程 (i) 正确.

(ii) 错误. 当 $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, $x=1$, 则 $x\in A$, 从而 $x\in A$ 或 $x\in B$, 但 $x\notin A\cap B$, 由于 $A\cap B=\varnothing$. 正确的论断为:

①$x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$;

②$x\in A$ 且 $x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$.

(iii) 错误. 如 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $x=1$, 由于 $A\cap B=\varnothing$, 故 $x\notin A\cap B$, 但我们有 $x\in A$. 正确的论断为:

①$x\notin A\cap B\Rightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B$;

②$x\notin A\cup B\Rightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$.

(iv) 正确.

7. 解题过程 (i) $\forall x\in(A\cup B)\cup C\Rightarrow x\in A\cup B$ 或 $x\in C$. 当 $x\in C$ 时, 有 $x\in B\cup C$, 则 $x\in A\cup(B\cup C)$; 当 $x\in A\cup B$ 时, 有 $x\in A$ 或 $x\in B$, 即有 $x\in A$ 或 $x\in B\cup C$, 则 $x\in A\cup(B\cup C)$, 故对任意 $x\in(A\cup B)\cup C$, 总有 $x\in A\cup(B\cup C)$, 于是

$$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$$

同理可证
$$A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$$

故
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

(ii) 显然 $A\cap(A\cup B)\subseteq A$; 又 $\forall x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$, 所以 $x\in A\cap(A\cup B)$, 于是 $A\subseteq A\cap(A\cup B)$, 故 $A\cap(A\cup B)=A$.

(iii) $\forall x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. 当 $x\in A$, 则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 从而 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$; 当 $x\in B\cap C$, 则 $x\in B$ 且 $x\in C$, 从而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$, 于是

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

故

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

反之, 若 $\forall x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, 则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 由此可知 $x\in A$, 或者 $x\in B$ 且 $x\in C$, 即 $x\in B\cap C$. 于是 $x\in A\cup(B\cap C)$, 故

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$$

综上可得

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

小结　一般地，对于集合 A 和 B，要证 $A=B$，只需证 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 即可.

8. 解题过程　设 $\forall x\in C-(A\cup B)$，那么 $x\in C$ 但 $x\notin A\cup B$，$x\notin A\cup B$ 意味着 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，所以 $x\in(C-A)$ 且 $x\in C-B$，故 $x\in(C-A)\cap(C-B)$.

反之，设 $\forall x\in(C-A)\cap(C-B)$，那么 $x\in(C-A)$ 且 $x\in(C-B)$，故 $x\notin A$ 且 $x\notin B$，这意味着 $x\notin A\cup B$，所以 $x\in(C-A\cup B)$.

9. 解题过程　(1) 设 $\forall x\in A\cap(B-C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in(B-C)$，所以 $x\in B$ 但 $x\notin C$. 又 $x\in A$，故 $x\in A\cap B$，但 $x\notin C$，即 $x\in(A\cap B)-C$.

反之，设 $\forall x\in(A\cap B)-C$，则 $x\in(A\cap B)$ 但 $x\notin C$，由前一种情形知 $x\in A$ 且 $x\in B$.

所以 $x\in(B-C)$，由 $x\in A$ 知 $x\in A\cap(B-C)$.

(2)"$\Rightarrow$"若 $A-B=\Phi$，$\forall x\in A$，因为 $A-B=\Phi$，所以 $x\in B$，故 $A\subseteq B$.

"$\Leftarrow$"若 $A\subseteq B$，则 $\forall x\in A$ 有 $x\in B$，那么 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}=\Phi$.

1.2　映射

1. 解题过程　例如 $f:A\mapsto A;x\mapsto 1$.

2. 解题过程　$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+;x\mapsto e^x$，容易验证这是一个双射.

3. 解题过程　不是. 因为当 $x=0$ 时，$\frac{1}{x}$ 无意义.

4. 解题过程　f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射，但不是单射也不是满射，例如：取 $x_1=0,x_2=\frac{1}{2}$，有 $x_1\neq x_2$，但 $f(x_1)=f(x_2)=1$，且 $\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}\}\neq\mathbf{R}$.

5. 逻辑推理　注意 A 到 A 的映射域为 A 的非空子集，因此可分别以 A 的每个非空子集为值域，写出所有映射.

解题过程　所有映射为：

$$f_1(x)=1(x\in A),f_2(x)=2(x\in A),f_3(x)=3(x\in A)$$

$$f_4(x)=\begin{cases}1,x=1\text{ 或 }2\\2,x=3\end{cases},f_5(x)=\begin{cases}1,x=3\\2,x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_6(x)=\begin{cases}1,x=1\text{ 或 }3\\2,x=2\end{cases},f_7(x)=\begin{cases}1,x=2\\2,x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_8(x)=\begin{cases}1,x=2\text{ 或 }3\\2,x=1\end{cases},f_9(x)=\begin{cases}1,x=1\\2,x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{10}(x)=\begin{cases}1,x=1\text{ 或 }2\\3,x=3\end{cases},f_{11}(x)=\begin{cases}1,x=3\\3,x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_{12}(x)=\begin{cases}1,x=1\text{ 或 }3\\3,x=2\end{cases},f_{13}(x)=\begin{cases}1,x=2\\3,x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{14}(x)=\begin{cases}1,x=2\text{ 或 }3\\3,x=1\end{cases},f_{15}(x)=\begin{cases}1,x=1\\3,x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{16}(x)=\begin{cases}2,x=1\text{ 或 }2\\3,x=3\end{cases},f_{17}(x)=\begin{cases}2,x=3\\3,x=1\text{ 或 }2\end{cases}$$

$$f_{18}(x)=\begin{cases}2,x=1\text{ 或 }3\\3,x=2\end{cases},f_{19}(x)=\begin{cases}2,x=2\\3,x=1\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{20}(x)=\begin{cases}2,x=2\text{ 或 }3\\3,x=1\end{cases},f_{21}(x)=\begin{cases}2,x=1\\3,x=2\text{ 或 }3\end{cases}$$

$$f_{22}(x)=\begin{cases}1,x=1\\2,x=2\\3,x=3\end{cases},f_{23}(x)=\begin{cases}1,x=1\\2,x=3\\3,x=2\end{cases}$$

$$f_{24}(x)=\begin{cases}1,x=2\\2,x=1\\3,x=3\end{cases},f_{25}(x)=\begin{cases}1,x=2\\2,x=3\\3,x=1\end{cases}$$

$$f_{26}(x)=\begin{cases}1,x=3\\2,x=1\\3,x=2\end{cases},f_{27}(x)=\begin{cases}1,x=3\\2,x=2\\3,x=1\end{cases}$$

所以从 A 到 A 自身的映射个数为 27，且最后六个（即 $f_{22},f_{23},f_{24},f_{25},f_{26},f_{27}$）为双射.

6. 逻辑推理 我们注意到线性映射 $f(x)=ax+b$ 都是从其定义域到值域的双射，所以只需找出一个线性映射满足 $f(0)=a,f(1)=b$ 即可.

解题过程 设 $x\in[0,1]$，令 $f:x\mapsto a+(b-a)x$，则 f 是 $[0,1]$ 到 $[a,b]$ 的映射. 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则有

$$a+(b-a)x_1=a+(b-a)x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

故 f 是单射. 又对 $\forall y\in[a,b]$，有

$$\frac{y-a}{b-a}\in[0,1], f\left(\frac{y-a}{b-a}\right)=a+(b-a)\cdot\frac{y-a}{b-a}=y$$

故 f 是满射. 因而 f 是$[0,1]$到$[a,b]$的双射.

7. **解题过程** 例如：取 $A=\mathbf{R}$. 设映射 $f:x\mapsto x+1, g:x\mapsto x^3$，则 $g\circ f:x\mapsto(x+1)^3$，而 $f\circ g$: $x\mapsto x^3+1$，可见 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 一般不相等.

8. **解题过程** (i)g 是 A 到 A 的双射. 若 $x_1\neq x_2$，且 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，则$\frac{1}{x_1}\neq\frac{1}{x_2}$，即 $g(x_1)\neq g(x_2)$，所以 g 是单射. 又对 $\forall x\in\mathbf{R}^+$，只要取$\frac{1}{x}\in\mathbf{R}^+$，总有 $g\left(\frac{1}{x}\right)=x$，即 g 是满射. 从而 g 是双射.

(ii)g 不是 f 的逆映射. 因为 f 是恒等映射，所以它的逆映射是其自身，即 $f^{-1}=f$.

(iii) 因为 g 是双射，所以有逆映射，且它的逆映射也是其自身，即 $g^{-1}=g$. 因为 $(g\circ g)(x)=g(g(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=x$，即 $g\circ g=j_A$.

9. **解题过程** (i) 反证法　若 f 不是单射，则 $\exists x_1,x_2\in A$，且 $x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，从而

$$\begin{aligned}h(x_1)&=(g\circ f)(x_1)=g(f(x_1))\\&=g(f(x_2))=(g\circ f)(x_2)=h(x_2)\end{aligned}$$

由于 $x_1\neq x_2$，但 $h(x_1)=h(x_2)$，所以 h 不是一个单射，矛盾. 因此，f 是单射.

(ii) 由于 h 是满射，则对 $\forall c\in C,\exists a\in A$，使得 $h(a)=(g\circ f)(a)=g(f(a))=c$. 如果令 $b=f(a)$，则对 $\forall c\in C$，必有 $b\in B$，使得 $g(b)=c$. 从而由满射的定义，可知 g 是满射.

(iii) 根据双射的等价条件，仅需验证

$$h\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=j_C, (f^{-1}\circ g^{-1})\circ h=j_A$$

事实上，对 $\forall c\in C$，有

$$h\circ(f^{-1}\circ g^{-1})(c)=h((f^{-1}\circ g^{-1})(c))=h(f^{-1}(g^{-1}(c)))$$

则

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=1, x=1\text{ 或 }2\text{ 或 }3.$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}3, x=1\text{ 或 }3\\1, x=2\end{cases}$$

易得　　$f\circ g\neq g\circ f$

f 和 g 是双射，故 $f=g^{-1}\circ h$. 由(i) 得，h 是单射，又 $g=h\circ f^{-1}$，由(ii) 得，h 是满射，故 h 是双射.

又 $f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f=1$，故 $h^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

小结 我们常用以下结论：

f 是单射 $\Leftrightarrow$ 若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1=x_2$；

f 是满射 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall y\in B, \exists x\in A$，使 $f(x)=y$（即 B 中任一元在 f 下有原像（不一定唯一）.

10. 逻辑推理 可直接运用代数运算的定义得出来.

解题过程 (1) 不是. 因为 $(2,-1)\mapsto 2^{-1}\notin A$.

(2) 是.

(3) 是.

(4) 不是. 因为 $(2,0)$ 无对应元素.

1.3 数学归纳法

1. 解题过程 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$1\cdot 1!=1=(1+1)!-1$，命题成立；假设 $n=k$ 时命题成立，即有

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$$

于是，当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=[(k+1)!-1]+(k+1)\cdot(k+1)!\\&=(k+2)\cdot(k+1)!-1\\&=[(k+1)+1]!-1\end{aligned}$$

命题也成立. 故对一切正整数 n 命题成立.

2. 解题过程 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$(1+h)^1=1+h\geqslant 1+1\cdot h$，命题成立；假设当 $n=k$ 时命题成立，即

$$(1+h)^k\geqslant 1+kh$$

则

$$\begin{aligned}(1+h)^{k+1}&=(1+h)^k(1+h)\geqslant(1+kh)(1+h)\\&=1+(k+1)h+kh^2\geqslant 1+(k+1)h\end{aligned}$$

命题也成立. 故对一切正整数 n 命题成立.

3. 解题过程 用数学归纳法. $(a+b)^1=a+b=a^1+\binom{1}{1}a^0b$，当 $n=1$ 时，命题成立. 假设 $n=k$ 时命题成立，即有