大学数学信息化教学丛书

高等数学及其应用（上）

阮正顺 张忠诚 刘雁鸣
主编

科学出版社

大学数学信息化教学丛书

高等数学及其应用

（上）

阮正顺　张忠诚　刘雁鸣　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书依据《工科类本科数学基础课程基本要求》编写而成．全书分上、下两册，共11章．上册内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何．本书吸取了国内外优秀教材的优点，调整了教学内容，适应分层分级教学，各章均有相应的数学实验，注重培养学生的数学素养和实践创新能力．

本书可作为本科院校高等数学课程教材或教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用．上/阮正顺，张忠诚，刘雁鸣主编．—北京：科学出版社，2018.6

(大学数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-057806-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①阮…　②张…　③刘…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第123727号

责任编辑：谭耀文　王　晶/责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超/封面设计：彬　峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2018年6月第　一　版　印张：20

2018年6月第一次印刷　字数：467 000

定价：58.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础课.与初等数学相比,高等数学的理论更加抽象,逻辑推理更加严密.初学者往往对高等数学的概念和理论感到抽象难懂,解决问题缺少思路和方法.具有良好的数学素质是学生可持续发展的基础,它不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础,而且对培养学生抽象思维、逻辑推理能力,综合利用所学知识分析问题解决问题的能力,自主学习能力和创新能力都具有非常重要的作用.一套好的高等数学教材,作为教学内容和教学方法的知识载体,对培养学生良好的数学素质有着举足轻重的作用.我们依据《工科类本科数学基础课程基本要求》,以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的,参考了大量国内外优秀教材,充分吸取了编者们多年来教学实践经验与教学改革成果,编写了这套教材.

在教材编写过程中,我们按照精品课程的要求,体现创新教学理念,以利于激发学生自主学习,提高学生的综合素质和培养学生的创新能力;对教学内容进行适当的调整,以适应分层分级教学模式;试图在保证理论高度不降低的前提下,适当运用实例和图形,以便易教易学;以单元的方式介绍数学实验,帮助学生了解掌握数学和数学的应用;适时介绍有关数学史料,以体现人文精神.总之,编者将长期的教学实践经验渗透到教材中,力求达到便于施教授课的目的.书中带“ * ”号的内容可视学生的能力及专业要求由教师决定是否讲授.

本教材分上、下两册,上册由阮正顺、张忠诚、刘雁鸣主编,下册由刘为凯、王志宏、杨建华主编.具体分工为:第 1 章由张忠诚编写;第 2 章由宁小青编写;第 3 章由柳翠华编写;第 4 章由阮正顺、刘雁鸣编写;第 5 章由熊晓龙编写;第 6 章由杨雪帆编写;第 7 章由刘为凯编写;第 8 章由王志宏编写;第 9 章由杨建华编写;第 10 章由余荣编写;第 11 章由曾华编写;各章的数字实验由李小刚编写;姜朝君参加了部分内容和习题的编写.本书由阮正顺、张忠诚、刘雁鸣负责统稿、定稿.

由于编者水平有限,书中有不足之处,希望得到广大专家、同行和读者的批评指正.

编　　者

2018 年 3 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数是自然科学中普遍使用的数学概念之一. 它是数学的基础概念，也是微积分学的基本研究对象，而研究函数的主要方法是极限. 本章介绍函数的概念、函数的性质以及函数的运算，数列极限与函数极限的概念、性质及计算方法.

1.1　映射与函数

1.1.1　映射

定义 1.1.1　设 A, B 为两个非空集合，如果存在一个对应关系 f，使得对 A 中每个元素 a，通过 f 在 B 中有唯一确定的元素 b 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的**映射**，记为

$$f: A \to B,\ a \mapsto b \quad 或 \quad b = f(a),$$

其中：b 称为 a 的**像**，a 称为 b 的**原像**，A 称为 f 的**定义域**，记为 D_f，A 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，记为 R_f.

注　(1) A 中每个元素都有像，且像都在 B 中；

(2) A 中每个元素的像都是唯一的；

(3) 映射 f 的值域 R_f 是 B 的子集，即 $R_f \subseteq B$；

(4) 值域 R_f 中的每个元素都有原像，但原像可以不唯一.

例 1.1.1　设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对任意 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) = |x|$，则 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 显然 R_f 中除 $y = 0$ 外每一元素的原像是不唯一的.

例 1.1.2　设 $f: [0, 1] \to [1, 2]$，对每个 $x \in [0, 1]$，$f(x) = x + 1$，则 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = [0, 1]$，值域 $R_f = [1, 2]$，且 R_f 中每一个元素的原像是唯一的.

例 1.1.3　设 $f: \mathbf{R} \to [-1, 1]$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$f(x) = \cos x$，则 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = [-1, 1]$，值域 R_f 中每一个元素的原像不唯一.

映射是集合之间元素的一种对应关系，这种对应关系可以是多对一，也可以是一对一. 按照对应关系，可以将映射进行分类.

定义 1.1.2　设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射，若 A 中任意两个不同元素 $a_1 \neq a_2$，它们的像 $f(a_1) \neq f(a_2)$，则称 f 为**单射**；若 $R_f = B$，即 B 中任一元素在 A 中都有原像，则称 f 为**满射**；若 f 既是单射又是满射，则称 f 为**双射**或**一一映射**.

笔记栏

由此分类可知，例 1.1.1 不是单射也不是满射；例 1.1.2 是一一映射；例 1.1.3 不是单射是满射.

1.1.2 函数

1. 函数概念

定义 1.1.3 设 f 为集合 A 到 B 的映射，即 $\forall x \in A$，按照映射 f，都有唯一的 $y \in B$，如果 B 为数集，则称映射 f 为**函数**，记为

$$f: A \to B, \ x \mapsto y = f(x).$$

当 B 为实数集时，称 f 为**实值函数**；当 B 为复数集时，称 f 为**复值函数**.

2. 几点说明

1) 关于定义域

函数的定义域 A 可以是数集，也可以不是数集. 当 A 为实数集时，f 称为实变量函数；当 A 为复数集时，f 称为复变量函数. 给定一个函数 f，同时也就给出了函数 f 的定义域 A. 有时给定的函数 $y = f(x)$ 并不明确指出它的定义域，这时认为函数 $y = f(x)$ 的定义域 A 是自明的，即定义域是使函数 $y = f(x)$ 有意义的数 x 的集合.

例如，给定的函数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ 没有指出它的定义域，它的定义域就是使函数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ 有意义的数 x 的集合 A，即 A: $\{x \mid x \leqslant 1\}$.

在具有实际意义的函数中，函数的定义域受实际意义的约束. 例如，半径为 r 的圆的面积 $S = \pi r^2$. 从抽象的数学公式来说，r 可以取任意实数，但是从它的实际意义来说，圆的半径不能取负值，即 $r \geqslant 0$ 或定义域是区间 $[0, +\infty)$.

2) 关于函数 f

在函数定义中，函数 f 是抽象的，只有在给定的具体函数中，函数 f 才是具体的. 具体的函数表示有列表法、解析法、图像法. 只要对数集 A 中的任意 x 都能明确指出它所对应的唯一的 y，就具体地表现了一个映射 f，即给定了定义在 A 上的函数 f，至于这种对应规律用什么方法给出是无关紧要的.

3) 关于值域

函数 f 的值域 R_f 一般为集合 B 的子集，在具体的函数表达式中，是通过集合 A 中的元素来确定的，即

$$R_f = f(A) = \{y \mid y = f(x), \ x \in A\}.$$

例 1.1.4 取整函数：$\forall x \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ 为实数集合)，定义

$$f(x) = [x] = n \quad (n \leqslant x < n+1, \ n \text{ 为整数}),$$

即 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数. 例如，$[-1.5] = -2$，$[2.5] = 2$，$[3] = 3$. 称 $[x]$ 为取整函数，如图 1-1 所示.

显然有

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

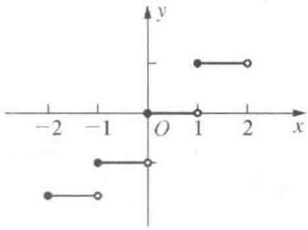


图 1 - 1

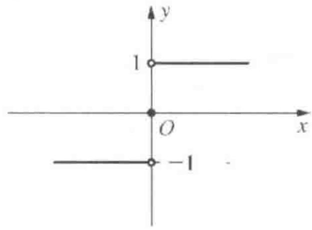


图 1 - 2

例 1.1.5　符号函数：

$$\operatorname{sgn}^{①} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbf{R}$，有 $|x| = x\operatorname{sgn}x$，所以 $\operatorname{sgn}x$ 起了符号的作用. 这个函数称为符号函数，如图 1 - 2 所示.

例 1.1.6　狄利克雷②函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

这个函数有很多“奇怪”的性质（以后会涉及），以前见到的函数大多可以通过一个解析式表示，这个函数的出现意味着数学从研究“算”到研究“概念、性质、结构”的转变.

如果一个函数在定义域的不同区间上（个别的区间也可退缩为一点）分别用不同的解析式表示，则称之为分段定义的函数，简称为分段函数. 例 1.1.5 即为分段函数.

1.1.3　基本初等函数

在数学的发展过程中，逐步筛选出最简单、最基础、最常用的六种函数，即常数函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数与反三角函数. 这六种函数统称为**基本初等函数**.

1. 常数函数

$$y = C \quad \text{或} \quad f(x) = C \quad (C \text{ 是常数}, x \in \mathbf{R}).$$

定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = \{C\}$.

2. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R}).$$

定义域 $D_f = \mathbf{R}$，值域 $R_f = (0, +\infty)$.

3. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

---

① sgn 是拉丁文 signum（符号）的缩写.

② 狄利克雷（P. G. Dirichlet，1805—1859），德国数学家.

定义域 $D_f = (0, +\infty)$，值域 $D_f = \mathbf{R}$.

4. 幂函数

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

幂函数 $y = x^{\alpha}$ 的性态与幂指数 α 有关. 通常幂函数 $y = x^{\alpha}$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

5. 三角函数

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是闭区间 $[-1, 1]$.

$y = \tan x$ 与 $y = \sec x$ 的定义域是

$$\left\{x \,\middle|\, x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}\right\},$$

值域分别是 $\mathbf{R}$ 与 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$y = \cot x$ 与 $y = \csc x$ 的定义域是

$$\{x \mid x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}\},$$

值域分别是 $\mathbf{R}$ 与 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

6. 反三角函数

$y = \arcsin x$ 与 $y = \arccos x$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$，值域分别是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 与 $[0, \pi]$.

$y = \arctan x$ 与 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域分别是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $(0, \pi)$.

在微积分学中，大量的函数都是由基本初等函数构造而得到的，因此，掌握好基本初等函数的性质，对学习微积分知识是很有帮助的.

习　题　1.1

1. 下列映射中哪些是单射，哪些是满射，哪些是双射？为什么？

(1) $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x + 2$；

(2) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x + 2$；

(3) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

2. 设 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，计算 $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ $(x_0 \neq 0, x_0 + h \neq 0)$.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x) = 1$, $g(x) = \csc^2 x - \cot^2 x$；

(2) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$；

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x}$；　　(2) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$；

(3) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+1$；　(4) $f(x)=\sqrt{2+x+x^2}$；

(5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$；　(6) $f(x)=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$；

(7) $f(x)=\sqrt{\cos 2x}$；　(8) $f(x)=\log_3(\log_2 x)$；

(9) $f(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；　(10) $f(x)=\sqrt{\log_4 \sin x}$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $f(-2)$,并作函数 $y=f(x)$ 的图形.

6. 将等边三角形的面积和周长表示为边长 x 的函数.

7. 将半径为 R 的圆片切掉弧长为 x 的扇形,将剩下部分的两条边相拼成为一个圆锥.

(1) 将圆锥底周长用 x 表示；

(2) 将圆锥底半径用 x 表示；

(3) 将圆锥容积用 x 表示.

8. 一块长为 a,宽为 b 的长方形铁皮,四个角上各剪去边长为 x 的正方形,折起来做成一个无盖盒子.将盒子容积 V 用 x 表示.

9. 已知直圆柱的高为 h,半径为 r,取半径 r 为自变量,将直圆柱表面积 S 用 r 表示.

1.2　函数的几种特性

1.2.1　有界性

定义 1.2.1　设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上,如果函数 $f(x)$ 的值域 $R_f=\{f(x)\mid x\in A\}$ 有上界(或有下界、有界),则称函数 $f(x)$ 在 A 上**有上界(或有下界、有界)**;否则,称函数 $f(x)$ 在 A 上**无上界(或无下界、无界)**.

函数 $f(x)$ 在 A 上有上界和无上界,有下界和无下界,有界和无界,用不等式表示如下:

函数 $f(x)$ 在 A 上有上界: $\exists M\in\mathbf{R}$, $\forall x\in A$,有 $f(x)\leqslant M$;

函数 $f(x)$ 在 A 上无上界: $\forall M\in\mathbf{R}$, $\exists x_0\in A$,有 $f(x_0)>M$;

函数 $f(x)$ 在 A 上有下界: $\exists M\in\mathbf{R}$, $\forall x\in A$,有 $f(x)\geqslant M$;

函数 $f(x)$ 在 A 上无下界: $\forall M\in\mathbf{R}$, $\exists x_0\in A$,有 $f(x_0)<M$;

函数 $f(x)$ 在 A 上有界: $\exists M>0$, $\forall x\in A$,有 $|f(x)|\leqslant M$;

函数 $f(x)$ 在 A 上无界: $\forall M>0$, $\exists x_0\in A$,有 $|f(x_0)|>M$.

显然,函数 $f(x)$ 在 A 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 A 上既有上界又有下界.

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界的几何意义是:存在两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$,函数 $y=f(x)$ 的图像位于这两条直线之间,如图 1-3 所示.

例 1.2.1　反正切函数 $y=\arctan x$ 与反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上有界,如图 1-4 与图 1-5 所示.

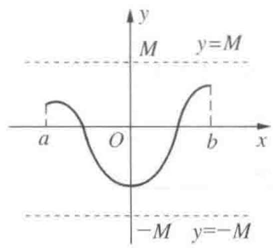


图 1－3

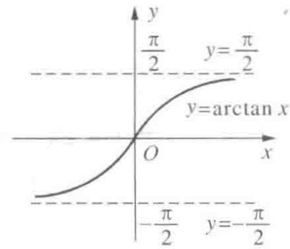


图 1－4

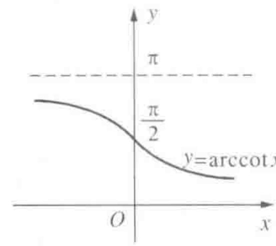


图 1－5

例 1.2.2 数列$\{(-1)^n\}$与$\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}$都有界.

事实上，$\exists M=1$与$M=2$，$\forall n\in\mathbf{N}^+$,有$|(-1)^n|\leqslant 1$，$\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=\left|1+\dfrac{1}{n}\right|<2.$

定理 1.2.1 设$f(x)$，$g(x)$均为A上的有界函数,则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$也为A上的有界函数.

证 由于$f(x)$，$g(x)$在A上有界,则存在常数$M_1>0$，$M_2>0$，$\forall x\in A$,有

$$|f(x)|\leqslant M_1,\qquad |g(x)|\leqslant M_2,$$

从而

$$|f(x)\pm g(x)|\leqslant|f(x)|+|g(x)|\leqslant M_1+M_2,$$

$$|f(x)g(x)|=|f(x)||g(x)|\leqslant M_1M_2.$$

这说明$f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$在A上有界.

注 定理 1.2.1 可推广为：有限个有界函数的和、积仍为有界函数.

1.2.2 单调性

定义 1.2.2 设函数$f(x)$在A上有定义.若$\forall x_1, x_2\in A$，且$x_1<x_2$，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在A上**单调递增**(或**单调递减**).

如果将上述不等式改为

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数$f(x)$在A上**严格递增**(或**严格递减**).

在几何上,$f(x)$单调递增(或单调递减)意味着：$y=f(x)$的图形沿x轴的正向渐升(或渐降),如图 1－6 所示.

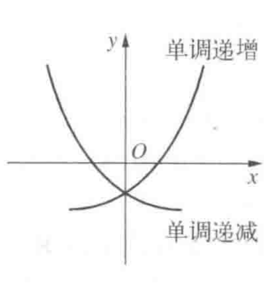


图 1－6

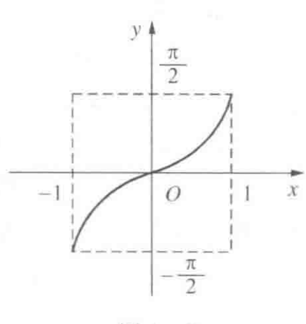


图 1－7

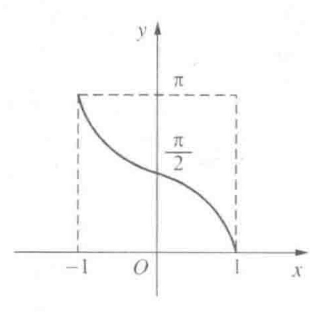


图 1－8

例 1.2.3 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 在闭区间$[-1, 1]$上严格递增,如图 1-7 所示. 反余弦函数 $y = \arccos x$ 在闭区间$[-1, 1]$上严格递减,如图 1-8 所示.

例 1.2.4 取整函数 $f(x) = [x]$ 与符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增,如图 1-1 和图 1-2 所示.

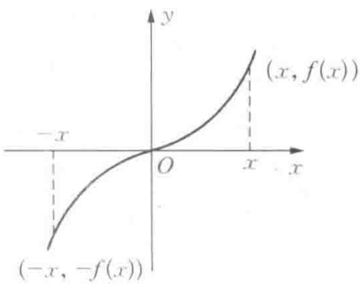
1.2.3 奇偶性

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$定义在数集 A 上. 如果 $\forall x \in A$,且 $-x \in A$,有

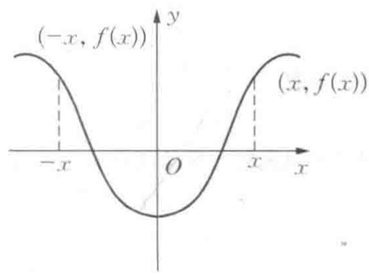
$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x)),$$

则称函数 $f(x)$在 A 是**奇函数(或偶函数)**.

在几何上,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1-9 所示.



(a) 奇函数图像



(b) 偶函数图像

图 1-9

依定义 1.2.3 可知, $\sin x$, $\operatorname{sgn} x$ 是$(-\infty, +\infty)$内的奇函数; $\cos x$, $D(x)$是$(-\infty, +\infty)$内的偶函数,其中 $D(x)$为狄利克雷函数.

定理 1.2.2 (1) 两个奇函数之和为奇函数,两个偶函数之和为偶函数;

(2) 两个奇函数或两个偶函数之积为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

证 只证(3).

设 $f(x)$, $g(x)$分别为 A 上的奇函数和偶函数,即 $\forall x \in A$,有 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$,则

$$f(-x)g(-x) = [-f(x)]g(x) = -[f(x)g(x)],$$

从而 $f(x)g(x)$为奇函数.

同理可证(1)与(2).

1.2.4 周期性

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$的定义域为 A. 若存在正常数 $T \neq 0$, $\forall x \in A$,且 $x \pm T \in A$,有

笔记栏

$$f(x+T)=f(x)$$

成立.则称函数 $f(x)$是**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**.

若 T 是 $f(x)$的周期,则 $nT(n=1,2,\cdots)$ 都是 $f(x)$的周期,因此 $f(x)$有无限多个周期.

若函数 $f(x)$有最小的正周期,则通常把这个最小的正周期称为函数的周期,亦称为基本周期.

例如,$f(x)=\sin x$ 与 $f(x)=\cos x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上都是以 2π 为周期的周期函数.

例 1.2.5 狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$ 是周期函数.

事实上,任何正有理数都是它的周期,但它没有最小正周期.

习 题 1.2

1. 判定函数 $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在所给区间上的有界性.

2. 判定下列函数在所给区间的单调性:

(1) $f(x)=x^2+1$, $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$;

(2) $f(x)=\sin x-1$, $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f(x)=3\ln x^2$, $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.

3. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\sin x+x$;　　(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

(3) $f(x)=\sin x^2$;　　(4) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

(5) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;　　(6) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(7) $f(x)=x^2\operatorname{sgn}x$;　　(8) $f(x)=x\sin x$.

4. 证明:

(1) 两个偶函数的和与积为偶函数;

(2) 两个奇函数的和是奇函数,其积是偶函数;

(3) 奇函数与偶函数的积是奇函数.

5. 判定下列函数的周期性.若是周期函数,指出其周期.

(1) $f(x)=\sin(x+2)$;　　(2) $f(x)=x\cos x$;

(3) $f(x)=\sin x^2$;　　(4) $f(x)=\sin^2 x$;

(5) $f(x)=[x]$;　　(6) $f(x)=x-[x]$.

6. 证明:若函数 $f(x)$定义在 $\mathbf{R}$,则

$$F_1(x)=f(x)+f(-x),\qquad F_2(x)=f(x)-f(-x)$$

分别是偶函数与奇函数,且定义在 $\mathbf{R}$ 的任意函数都可表为偶函数与奇函数之和.

7. 证明下列函数在所给区间的单调性:

(1) $f(x)=x^3\ (x\in(-\infty,+\infty))$;　　(2) $f(x)=\ln x\ (x>0)$.