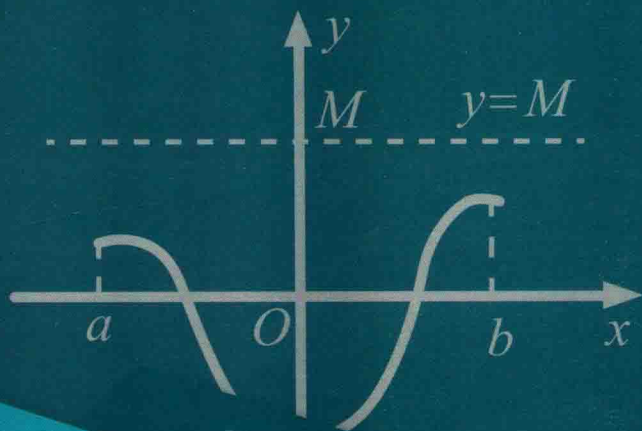


大学数学信息化教学丛书



高等数学 及其应用 (上)

阮正顺 张忠诚 刘雁鸣
主编



科学出版社



大学数字信息化教学丛书

高等数学及其应用

(上)

阮正顺 张忠诚 刘雁鸣 主编



科学出版社

北京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229,010-64034315,13501151303

内 容 简 介

本书依据《工科类本科数学基础课程基本要求》编写而成.全书分上、下两册,共11章.上册内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何.本书吸取了国内外优秀教材的优点,调整了教学内容,适应分层分级教学,各章均有相应的数学实验,注重培养学生的数学素养和实践创新能力.

本书可作为本科院校高等数学课程教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用.上/阮正顺,张忠诚,刘雁鸣主编.—北京:科学出版社,2018.6

(大学数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-057806-8

I. ①高… II. ①阮… ②张… ③刘… III. ①高等数学-高等学校-教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 123727 号

责任编辑:谭耀文 王 晶/责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超/封面设计:彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2018年6月第 一 版 印张:20

2018年6月第一次印刷 字数:467 000

定价:58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础课. 与初等数学相比, 高等数学的理论更加抽象, 逻辑推理更加严密. 初学者往往对高等数学的概念和理论感到抽象难懂, 解决问题缺少思路和方法. 具有良好的数学素质是学生可持续发展的基础, 它不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础, 而且对培养学生抽象思维、逻辑推理能力, 综合利用所学知识分析问题解决问题的能力, 自主学习能力和创新能力都具有非常重要的作用. 一套好的高等数学教材, 作为教学内容和教学方法的知识载体, 对培养学生良好的数学素质有着举足轻重的作用. 我们依据《工科类本科数学基础课程基本要求》, 以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的, 参考了大量国内外优秀教材, 充分吸取了编者多年来教学实践经验与教学改革成果, 编写了这套教材.

在教材编写过程中, 我们按照精品课程的要求, 体现创新教学理念, 以利于激发学生自主学习, 提高学生的综合素质和培养学生的创新能力; 对教学内容进行适当的调整, 以适应分层分级教学模式; 试图在保证理论高度不降低的前提下, 适当运用实例和图形, 以便易教易学; 以单元的方式介绍数学实验, 帮助学生了解掌握数学和数学的应用; 适时介绍有关数学史料, 以体现人文精神. 总之, 编者将长期的教学实践经验渗透到教材中, 力求达到便于施教授课的目的. 书中带“*”号的内容可视学生的能力及专业要求由教师决定是否讲授.

本教材分上、下两册, 上册由阮正顺、张忠诚、刘雁鸣主编, 下册由刘为凯、王志宏、杨建华主编. 具体分工为: 第1章由张忠诚编写; 第2章由宁小青编写; 第3章由柳翠华编写; 第4章由阮正顺、刘雁鸣编写; 第5章由熊晓龙编写; 第6章由杨雪帆编写; 第7章由刘为凯编写; 第8章由王志宏编写; 第9章由杨建华编写; 第10章由余荣编写; 第11章由曾华编写; 各章的数字实验由李小刚编写; 姜朝君参加了部分内容和习题的编写. 本书由阮正顺、张忠诚、刘雁鸣负责统稿、定稿.

由于编者水平有限, 书中有不足之处, 希望得到广大专家、同行和读者的批评指正.

编 者

2018年3月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 映射与函数	1
1.1.1 映射	1
1.1.2 函数	2
1.1.3 基本初等函数	3
1.2 函数的几种特性	5
1.2.1 有界性	5
1.2.2 单调性	6
1.2.3 奇偶性	7
1.2.4 周期性	7
1.3 函数的运算	9
1.3.1 函数的四则运算	9
1.3.2 复合函数	10
1.3.3 反函数	12
1.3.4 初等函数	13
1.4 数列的极限	14
1.4.1 数列极限的定义	14
1.4.2 收敛数列的性质	16
1.4.3 数列收敛的判别法	17
1.4.4 子数列	19
1.5 函数的极限	21
1.5.1 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	21
1.5.2 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	23
1.6 函数极限的性质和运算法则	26
1.6.1 函数极限的性质	26
1.6.2 极限的运算法则	27
1.6.3 函数极限与数列极限的关系	30
1.6.4 两个重要极限	30
1.7 无穷小与无穷大	34
1.7.1 无穷小	34
1.7.2 无穷大	35
1.7.3 无穷小的比较	36
1.8 函数的连续性	39
1.8.1 连续概念	39
1.8.2 连续函数的性质	41

1.8.3 函数的间断点及其分类	43
1.9 闭区间上连续函数的性质	45
1.9.1 最值定理	46
1.9.2 介值定理	46
总习题1	48
实验1 一元函数的绘图与极限的计算	50
参考答案	56
第2章 导数与微分	60
2.1 导数概念	60
2.1.1 引例及定义	60
2.1.2 求导举例	62
2.1.3 导数的几何意义	65
2.1.4 可导性与连续性之间的关系	65
2.2 求导法则	68
2.2.1 四则求导法则	68
2.2.2 反函数的求导法则	70
2.2.3 复合函数的求导法则	71
2.2.4 基本求导公式	73
2.3 高阶导数	75
2.4 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	78
2.4.1 隐函数的导数	78
2.4.2 参数方程所确定的函数的导数	81
2.4.3 相关变化率	83
2.5 函数的微分	85
2.5.1 微分的概念	85
2.5.2 微分公式与微分法则	87
2.5.3 微分在近似计算中的应用	89
总习题2	91
实验2 导数与微分	93
参考答案	96
第3章 微分中值定理与导数的应用	100
3.1 微分中值定理	100
3.1.1 罗尔中值定理	100
3.1.2 拉格朗日中值定理	102
3.1.3 柯西中值定理	104
3.2 洛必达法则	107
3.3 泰勒公式	113
3.4 函数的单调性与极值	118
3.4.1 函数的单调性	118
3.4.2 函数的极值	120

3.5 函数的最值及其应用	125
3.6 曲线的凹凸性及拐点	128
3.7 函数图形的描绘	132
3.7.1 曲线的渐近线	132
3.7.2 函数图形的描绘	134
3.8 曲率	136
3.8.1 弧微分	136
3.8.2 曲率	137
3.8.3 曲率圆与曲率半径	139
总习题 3	140
实验 3 导数的应用	142
参考答案	144
第 4 章 不定积分	148
4.1 不定积分的概念与性质	148
4.1.1 原函数与不定积分	148
4.1.2 不定积分的性质	151
4.1.3 基本积分公式	151
4.1.4 直接积分法	152
4.2 换元积分法	154
4.2.1 第一类换元法	155
4.2.2 第二类换元法	161
4.3 分部积分法	167
4.4 有理函数和可化为有理函数的积分	171
4.4.1 有理函数的积分	171
4.4.2 三角函数有理式的积分	174
4.4.3 简单无理函数的积分	176
4.4.4 积分表的使用	177
总习题 4	178
实验 4 不定积分	179
参考答案	181
第 5 章 定积分及其应用	185
5.1 定积分的概念与性质	185
5.1.1 定积分问题举例	185
5.1.2 定积分定义	187
5.1.3 定积分的性质	189
5.2 微积分基本公式	193
5.2.1 位置函数与速度函数的联系	193
5.2.2 积分上限的函数及其导数	193
5.2.3 牛顿-莱布尼茨公式	196
5.3 定积分的换元法与分部积分法	199

5.3.1	定积分的换元法	200
5.3.2	定积分的分部积分法	203
5.4	反常积分	207
5.4.1	无穷限的反常积分	207
5.4.2	无界函数的反常积分	209
* 5.4.3	Γ 函数	211
5.5	平面图形的面积	213
5.5.1	定积分的元素法	213
5.5.2	平面图形的面积	215
5.6	立体的体积	219
5.6.1	旋转体的体积	219
5.6.2	平行截面面积为已知的立体的体积	222
5.7	平面曲线的弧长与旋转曲面的面积	224
5.7.1	平面曲线的弧长	224
* 5.7.2	旋转曲面的面积	227
5.8	定积分在物理学上的应用	229
5.8.1	变力沿直线所做的功	229
5.8.2	压力	230
5.8.3	引力	231
* 5.9	数值积分	233
5.9.1	矩形法与梯形法	233
5.9.2	抛物线法	236
总习题 5		239
实验 5	定积分及其应用	241
参考答案		245
第 6 章	空间解析几何	250
6.1	空间直角坐标系	250
6.1.1	定义	250
6.1.2	空间点的直角坐标	251
6.1.3	两点间的距离和中点坐标公式	251
6.2	向量及其线性运算	253
6.2.1	向量的基本概念	253
6.2.2	向量的线性运算	254
6.2.3	向量的分解、方向角、投影	255
6.3	数量积 向量积 * 混合积	258
6.3.1	两向量的数量积	258
6.3.2	两向量的向量积	260
* 6.3.3	三向量的混合积	262
6.4	曲面及其方程	264
6.4.1	曲面方程的概念	264

6.4.2 旋转曲面	265
6.4.3 柱面	266
6.4.4 二次曲面	267
6.5 平面及其方程	270
6.5.1 平面方程的几种形式	270
6.5.2 两平面的夹角	272
6.5.3 点到平面的距离	273
6.6 空间曲线及其方程	275
6.6.1 空间曲线的一般方程	275
6.6.2 空间曲线的参数方程	275
6.6.3 空间曲线在坐标面上的投影	277
6.7 空间直线及其方程	279
6.7.1 空间直线方程的几种形式	279
6.7.2 两直线的夹角	281
6.7.3 直线与平面的夹角	282
6.7.4 平面束	283
总习题 6	284
实验 6 三维图形的绘制	286
参考答案	289
附录 A 二阶和三阶行列式简介	292
附录 B 常用的曲线与曲面	295
附录 C 积分表	300

第 1 章 函数与极限

函数是自然科学中普遍使用的数学概念之一,它是数学的基础概念,也是微积分学的基本研究对象,而研究函数的主要方法是极限.本章介绍函数的概念、函数的性质以及函数的运算,数列极限与函数极限的概念、性质及计算方法.

1.1 映射与函数

1.1.1 映射

定义 1.1.1 设 A, B 为两个非空集合,如果存在一个对应关系 f ,使得对 A 中每个元素 a ,通过 f 在 B 中有唯一确定的元素 b 与之对应,则称 f 为 A 到 B 的映射,记为

$$f: A \rightarrow B, a \mapsto b \quad \text{或} \quad b = f(a),$$

其中: b 称为 a 的像, a 称为 b 的原像, A 称为 f 的定义域,记为 D_f , A 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域,记为 R_f .

注 (1) A 中每个元素都有像,且像都在 B 中;

(2) A 中每个元素的像都是唯一的;

(3) 映射 f 的值域 R_f 是 B 的子集,即 $R_f \subseteq B$;

(4) 值域 R_f 中的每个元素都有原像,但原像可以不唯一.

例 1.1.1 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = |x|$, 则 f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{y \mid y \geq 0\}$, 它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 显然 R_f 中除 $y = 0$ 外每一元素的原像是不唯一的.

例 1.1.2 设 $f: [0, 1] \rightarrow [1, 2]$, 对每个 $x \in [0, 1]$, $f(x) = x + 1$, 则 f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = [0, 1]$, 值域 $R_f = [1, 2]$, 且 R_f 中每一个元素的原像是唯一的.

例 1.1.3 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1]$, 对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \cos x$, 则 f 是一个映射, f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = [-1, 1]$, 值域 R_f 中每一个元素的原像不唯一.

映射是集合之间元素的一种对应关系,这种对应关系可以是多对一,也可以是一对一.按照对应关系,可以将映射进行分类.

定义 1.1.2 设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,若 A 中任意两个不同元素 $a_1 \neq a_2$, 它们的像 $f(a_1) \neq f(a_2)$, 则称 f 为单射;若 $R_f = B$, 即 B 中任一元素在 A 中都有原像,则称 f 为满射;若 f 既是单射又是满射,则称 f 为双射或一一映射.

由此分类可知,例 1.1.1 不是单射也不是满射;例 1.1.2 是一一映射;例 1.1.3 不是单射是满射.

1.1.2 函数

1. 函数概念

定义 1.1.3 设 f 为集合 A 到 B 的映射,即 $\forall x \in A$, 按照映射 f , 都有唯一的 $y \in B$, 如果 B 为数集, 则称映射 f 为函数, 记为

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x).$$

当 B 为实数集时, 称 f 为实值函数; 当 B 为复数集时, 称 f 为复值函数.

2. 几点说明

1) 关于定义域

函数的定义域 A 可以是数集, 也可以不是数集. 当 A 为实数集时, f 称为实变量函数; 当 A 为复数集时, f 称为复变量函数. 给定一个函数 f , 同时也就给出了函数 f 的定义域 A . 有时给定的函数 $y = f(x)$ 并不明确指出它的定义域, 这时认为函数 $y = f(x)$ 的定义域 A 是自明的, 即定义域是使函数 $y = f(x)$ 有意义的数 x 的集合.

例如, 给定的函数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ 没有指出它的定义域, 它的定义域就是使函数 $f(x) = \sqrt{1-x}$ 有意义的数 x 的集合 A , 即 $A: \{x \mid x \leq 1\}$.

在具有实际意义的函数中, 函数的定义域受实际意义的约束. 例如, 半径为 r 的圆的面积 $S = \pi r^2$. 从抽象的数学公式来说, r 可以取任意实数, 但是从它的实际意义来说, 圆的半径不能取负值, 即 $r \geq 0$ 或定义域是区间 $[0, +\infty)$.

2) 关于函数 f

在函数定义中, 函数 f 是抽象的, 只有在给定的具体函数中, 函数 f 才是具体的. 具体的函数表示有列表法、解析法、图像法. 只要对数集 A 中的任意 x 都能明确指出它所对应的唯一的 y , 就具体地表现了一个映射 f , 即给定了定义在 A 上的函数 f , 至于这种对应规律用什么方法给出是无关紧要的.

3) 关于值域

函数 f 的值域 R_f 一般为集合 B 的子集, 在具体的函数表达式中, 是通过集合 A 中的元素来确定的, 即

$$R_f = f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}.$$

例 1.1.4 取整函数: $\forall x \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ 为实数集合), 定义

$$f(x) = [x] = n \quad (n \leq x < n+1, n \text{ 为整数}),$$

即 $[x]$ 为不大于 x 的最大整数. 例如, $[-1.5] = -2$, $[2.5] = 2$, $[3] = 3$. 称 $[x]$ 为取整函数, 如图 1-1 所示.

显然有

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

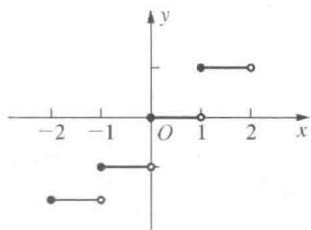


图 1-1

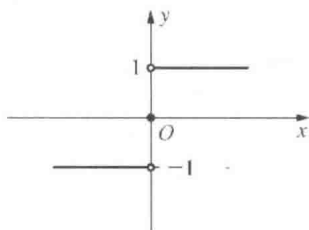


图 1-2

例 1.1.5 符号函数:

$$\operatorname{sgn}^{\textcircled{1}} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $|x| = x \operatorname{sgn} x$, 所以 $\operatorname{sgn} x$ 起了符号的作用. 这个函数称为符号函数, 如图 1-2 所示.

例 1.1.6 狄利克雷^②函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

这个函数有很多“奇怪”的性质(以后会涉及), 以前见到的函数大多可以通过一个解析式表示, 这个函数的出现意味着数学从研究“算”到研究“概念、性质、结构”的转变.

如果一个函数在定义域的不同区间上(个别的区间也可退缩为一点)分别用不同的解析式表示, 则称之为分段定义的函数, 简称为分段函数. 例 1.1.5 即为分段函数.

1.1.3 基本初等函数

在数学的发展过程中, 逐步筛选出最简单、最基础、最常用的六种函数, 即常数函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数与反三角函数. 这六种函数统称为基本初等函数.

1. 常数函数

$$y = C \quad \text{或} \quad f(x) = C \quad (C \text{ 是常数}, x \in \mathbf{R}).$$

定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = \{C\}$.

2. 指数函数

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1, x \in \mathbf{R}).$$

定义域 $D_f = \mathbf{R}$, 值域 $R_f = (0, +\infty)$.

3. 对数函数

$$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1, x > 0).$$

① sgn 是拉丁文 *signum*(符号) 的缩写.

② 狄利克雷(P. G. Dirichlet, 1805—1859), 德国数学家.

定义域 $D_f = (0, +\infty)$, 值域 $D_f = \mathbf{R}$.

4. 幂函数

$$y = x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbf{R}).$$

幂函数 $y = x^\alpha$ 的性态与幂指数 α 有关. 通常幂函数 $y = x^\alpha$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.

5. 三角函数

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是闭区间 $[-1, 1]$.

$y = \tan x$ 与 $y = \sec x$ 的定义域是

$$\left\{x \mid x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}\right\},$$

值域分别是 $\mathbf{R}$ 与 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$y = \cot x$ 与 $y = \csc x$ 的定义域是

$$\{x \mid x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbf{Z}\},$$

值域分别是 $\mathbf{R}$ 与 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

6. 反三角函数

$y = \arcsin x$ 与 $y = \arccos x$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$, 值域分别是 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 与 $[0, \pi]$.

$y = \arctan x$ 与 $y = \operatorname{arccot} x$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 值域分别是 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 与 $(0, \pi)$.

在微积分学中, 大量的函数都是由基本初等函数构造而得到的, 因此, 掌握好基本初等函数的性质, 对学习微积分知识是很有帮助的.

习 题 1.1

1. 下列映射中哪些是单射, 哪些是满射, 哪些是双射? 为什么?

(1) $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}, f(x) = x + 2$;

(2) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = x + 2$;

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 1$.

2. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 计算 $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ($x_0 \neq 0, x_0+h \neq 0$).

3. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = 1, g(x) = \csc^2 x - \cot^2 x$;

(2) $f(x) = \ln x^2, g(x) = 2 \ln x$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x-1}$.

4. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$;

(2) $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$;

$$(3) y = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + 1;$$

$$(4) f(x) = \sqrt{2+x+x^2};$$

$$(5) f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(6) f(x) = \ln(2x+1) + \sqrt{4-3x};$$

$$(7) f(x) = \sqrt{\cos 2x};$$

$$(8) f(x) = \log_3(\log_2 x);$$

$$(9) f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2};$$

$$(10) f(x) = \sqrt{\log_4 \sin x}.$$

$$5. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}. \end{cases} \text{ 求 } f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(-\frac{\pi}{4}\right), f(-2), \text{ 并作函数 } y = f(x) \text{ 的}$$

图形.

6. 将等边三角形的面积和周长表示为边长 x 的函数.

7. 将半径为 R 的圆片切掉弧长为 x 的扇形, 将剩下部分的两条边相拼成为一个圆锥.

(1) 将圆锥底周长用 x 表示;

(2) 将圆锥底半径用 x 表示;

(3) 将圆锥容积用 x 表示.

8. 一块长为 a , 宽为 b 的长方形铁皮, 四个角上各剪去边长为 x 的正方形, 折起来做成一个无盖盒子. 将盒子容积 V 用 x 表示.

9. 已知直圆柱的高为 h , 半径为 r , 取半径 r 为自变量, 将直圆柱表面积 S 用 r 表示.

1.2 函数的几种特性

1.2.1 有界性

定义 1.2.1 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上, 如果函数 $f(x)$ 的值域 $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$ 有上界(或有下界、有界), 则称函数 $f(x)$ 在 A 上有上界(或有下界、有界); 否则, 称函数 $f(x)$ 在 A 上无上界(或无下界、无界).

函数 $f(x)$ 在 A 上有上界和无上界, 有下界和无下界, 有界和无界, 用不等式表示如下:

函数 $f(x)$ 在 A 上有上界: $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{ 有 } f(x) \leq M;$

函数 $f(x)$ 在 A 上无上界: $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{ 有 } f(x_0) > M;$

函数 $f(x)$ 在 A 上有下界: $\exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \text{ 有 } f(x) \geq M;$

函数 $f(x)$ 在 A 上无下界: $\forall M \in \mathbf{R}, \exists x_0 \in A, \text{ 有 } f(x_0) < M;$

函数 $f(x)$ 在 A 上有界: $\exists M > 0, \forall x \in A, \text{ 有 } |f(x)| \leq M;$

函数 $f(x)$ 在 A 上无界: $\forall M > 0, \exists x_0 \in A, \text{ 有 } |f(x_0)| > M.$

显然, 函数 $f(x)$ 在 A 上有界 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 A 上既有上界又有下界.

函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界的几何意义是: 存在两条直线 $y = M$ 与 $y = -M$, 函数 $y = f(x)$ 的图像位于这两条直线之间, 如图 1-3 所示.

例 1.2.1 反正切函数 $y = \arctan x$ 与反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上有界, 如图 1-4 与图 1-5 所示.

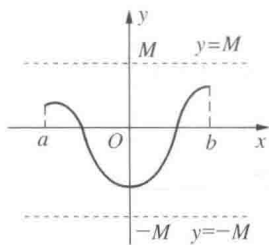


图 1-3

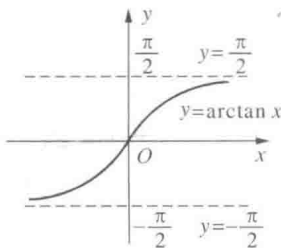


图 1-4

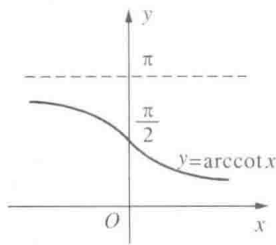


图 1-5

例 1.2.2 数列 $\{(-1)^n\}$ 与 $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ 都有界.

事实上, $\exists M=1$ 与 $M=2$, $\forall n \in \mathbf{N}^+$, 有 $|(-1)^n| \leq 1$, $\left|\frac{n+1}{n}\right| = \left|1 + \frac{1}{n}\right| < 2$.

定理 1.2.1 设 $f(x)$, $g(x)$ 均为 A 上的有界函数, 则 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 也为 A 上的有界函数.

证 由于 $f(x)$, $g(x)$ 在 A 上有界, 则存在常数 $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, $\forall x \in A$, 有

$$|f(x)| \leq M_1, \quad |g(x)| \leq M_2,$$

从而 $|f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$,

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq M_1 M_2.$$

这说明 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ 在 A 上有界.

注 定理 1.2.1 可推广为: 有限个有界函数的和、积仍为有界函数.

1.2.2 单调性

定义 1.2.2 设函数 $f(x)$ 在 A 上有定义. 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) \geq f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上单调递增(或单调递减).

如果将上述不等式改为

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上严格递增(或严格递减).

在几何上, $f(x)$ 单调递增(或单调递减)意味着: $y = f(x)$ 的图形沿 x 轴的正向渐升(或渐降), 如图 1-6 所示.

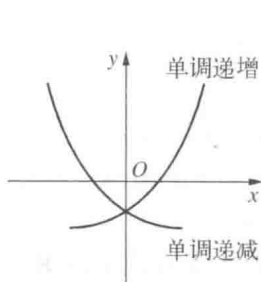


图 1-6

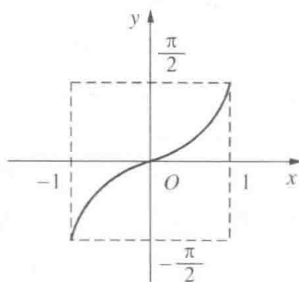


图 1-7

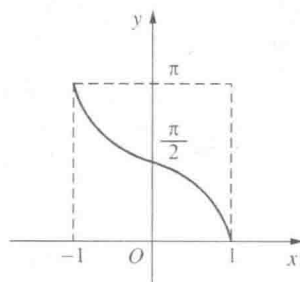


图 1-8

例 1.2.3 反正弦函数 $y = \arcsin x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上严格递增, 如图 1-7 所示. 反余弦函数 $y = \arccos x$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上严格递减, 如图 1-8 所示.

例 1.2.4 取整函数 $f(x) = [x]$ 与符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上都是单调递增, 如图 1-1 和图 1-2 所示.

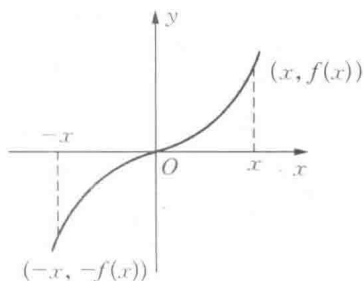
1.2.3 奇偶性

定义 1.2.3 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上. 如果 $\forall x \in A$, 且 $-x \in A$, 有

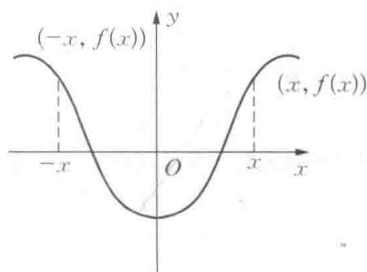
$$f(-x) = -f(x) \quad (\text{或 } f(-x) = f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 是奇函数(或偶函数).

在几何上, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称, 如图 1-9 所示.



(a) 奇函数图像



(b) 偶函数图像

图 1-9

依定义 1.2.3 可知, $\sin x$, $\operatorname{sgn} x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的奇函数; $\cos x$, $D(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 内的偶函数, 其中 $D(x)$ 为狄利克雷函数.

定理 1.2.2 (1) 两个奇函数之和为奇函数, 两个偶函数之和为偶函数;

(2) 两个奇函数或两个偶函数之积为偶函数;

(3) 奇函数与偶函数之积为奇函数.

证 只证(3).

设 $f(x)$, $g(x)$ 分别为 A 上的奇函数和偶函数, 即 $\forall x \in A$, 有 $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$, 则

$$f(-x)g(-x) = [-f(x)]g(x) = -[f(x)g(x)],$$

从而 $f(x)g(x)$ 为奇函数.

同理可证(1)与(2).

1.2.4 周期性

定义 1.2.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 A . 若存在正常数 $T \neq 0$, $\forall x \in A$, 且 $x \pm T \in A$, 有

$$f(x+T) = f(x)$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**, T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则 $nT (n=1, 2, \cdots)$ 都是 $f(x)$ 的周期, 因此 $f(x)$ 有无限多个周期.

若函数 $f(x)$ 有最小的正周期, 则通常把这个最小的正周期称为函数的周期, 亦称为**基本周期**.

例如, $f(x) = \sin x$ 与 $f(x) = \cos x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上都是以 2π 为周期的周期函数.

例 1.2.5 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$ 是周期函数.

事实上, 任何正有理数都是它的周期, 但它没有最小正周期.

习 题 1.2

1. 判定函数 $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 在所给区间上的有界性.

2. 判定下列函数在所给区间的单调性:

(1) $f(x) = x^2 + 1, (-\infty, 0), (0, +\infty);$

(2) $f(x) = \sin x - 1, \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$

(3) $f(x) = 3\ln x^2, (-\infty, 0), (0, +\infty).$

3. 判定下列函数的奇偶性:

(1) $f(x) = \sin x + x;$

(2) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$

(3) $f(x) = \sin x^2;$

(4) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x};$

(5) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x});$

(6) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x};$

(7) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x;$

(8) $f(x) = x \sin x.$

4. 证明:

(1) 两个偶函数的和与积为偶函数;

(2) 两个奇函数的和是奇函数, 其积是偶函数;

(3) 奇函数与偶函数的积是奇函数.

5. 判定下列函数的周期性. 若是周期函数, 指出其周期.

(1) $f(x) = \sin(x+2);$

(2) $f(x) = x \cos x;$

(3) $f(x) = \sin x^2;$

(4) $f(x) = \sin^2 x;$

(5) $f(x) = [x];$

(6) $f(x) = x - [x].$

6. 证明: 若函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$, 则

$$F_1(x) = f(x) + f(-x), \quad F_2(x) = f(x) - f(-x)$$

分别是偶函数与奇函数, 且定义在 $\mathbf{R}$ 的任意函数都可表为偶函数与奇函数之和.

7. 证明下列函数在所给区间的单调性:

(1) $f(x) = x^3 (x \in (-\infty, +\infty));$ (2) $f(x) = \ln x (x > 0).$